MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 11 (1973)

ZASTOSOWANIE OPERATORÓW MIKUSIŃSKIEGO DO ZAGADNIEŃ TEORII KONSTRUKCJI NOŚNYCH

JERZY BOBLEWSKI, KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

Operatory Mikusińskiego są pożyteczne głównie tam, gdzie rozwiązuje się liniowe równania różniczkowe, zwyczajne lub cząstkowe, niejednorodne, o prawej stronie zawierającej funkcje Heaviside'a, Diraca oraz ich pochodne uogólnione.

Tego rodzaju równania pojawiają się stale w zagadnieniach teorii konstrukcji nośnych. Rozwiązywanie tych równań napotyka często poważne trudności rachunkowe, wynikające między innymi z konieczności rozważania, w wielu zagadnieniach praktycznych, obciążeń nieciągłych, skupionych oraz dyslokacji. Siły skupione rozważane w zagadnieniach dźwigarów sprężystych odpowiadają formalnie impulsom napięcia w zagadnieniach elektrotechnicznych.

Mimo tej formalnej analogii rachunek operatorowy powszechnie stosowany w literaturze elektrotechnicznej, w tym również w literaturze podręcznikowej, był rzadko stosowany do rozwiązywania zagadnień teorii konstrukcji. Wyjątek stanowi tu kilka zaledwie prac, w których jednak stosowano rachunek operatorowy oparty na transformacji Laplace'a. Są więc one dostępne dla czytelników znających teorię funkcji analitycznych. Poza tym rozważania ograniczono na ogół do zagadnień jednowymiarowych.

Chcąc w pełni wykorzystać rachunek oparty na transformacji Laplace'a, należy znać także teorię dystrybucji, aby móc stosować transformację dystrybucyjną, konieczną przy uwzględnianiu obciążeń skupionych oraz dyslokacji. Ponadto przy rozpatrywaniu zagadnień dwuwymiarowych zachodzi często konieczność stosowania wraz z dystrybucyjną transformacją Laplace'a dystrybucyjnej transformacji Fouriera. A zatem ujęcie takie jest skomplikowane zarówno pod względem teoretycznym, jak i w zastosowaniach praktycznych.

Na podstawie prac prowadzonych ostatnio w ośrodku śląskim można stwierdzić, że w szeregu zagadnień ważnych z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, znacznie korzystniejsze jest stosowanie operatorów MIKUSIŃSKIEGO [1]. Stanowią one obok teorii dystrybucji alternatywną teorię funkcji uogólnionych, a oprócz tego dostarczają wygodnego podejścia do rozwiązania równań różniczkowych tak zwyczajnych, jak i cząstkowych. Operatory te stosowane wraz z szeregami lub całkami Fouriera umożliwiają ogólne i przejrzyste formułowanie złożonych zadań teorii konstrukcji, a następnie ich proste rozwiązanie. Niektóre z tych możliwości zostaną omówione w dalszych punktach pracy.

1. Zagadnienia jednowymiarowe

Zagadnienia jednowymiarowe opisywane są zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Są to zagadnienia statyki belek, łuków, cienkościennych dźwigarów nośnych, zagadnienia obliczania ugięć walcowych płyt, ugięć powłok walcowych osiowo symetrycznie obciążonych itp. Opisujące je równania są z reguły równaniami liniowymi, o stałych współczynnikach, w postaci

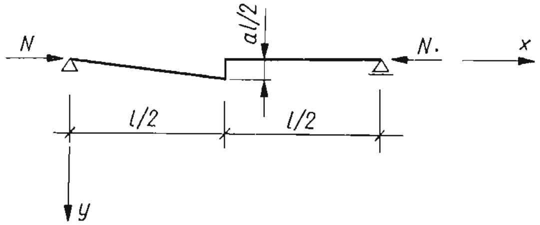
$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)}(x) = q. \tag{1.1}$$

Równanie (1.1) obejmuje jako przypadki szczególne, w zależności od wartości współczynników a_i oraz od wielkości q, prawie wszystkie praktycznie ważne zagadnienia jednowymiarowe teorii dźwigarów sprężystych.

Na przykład, gdy q zawiera obciążenie rozłożone, siły skupione, momenty skupione, dyslokacje kątowe oraz liniowe, to

$$q = \{q(x)\} + \sum_{i=1}^{I} P_i h^{x_i} + \sum_{j=1}^{J} M_j s h^{x_j} + EJ \sum_{k=1}^{K} \Delta_k s^2 h^{x_k} + EJ \sum_{l=1}^{L} \bar{\Delta}_l s^3 h^{x_l}, \tag{1.2}$$

gdzie s jest operatorem różniczkowym.



Rys. 1

W innych przypadkach q może przedstawiać inne wielkości. Na przykład dla pręta ściskanego o małej wstępnej krzywiźnie, w równaniu (1.1) współczynniki a_i przyjmują wartości

$$a_0 = k^2, \quad a_1 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_2 = 1,$$

po prawej zaś stronie należy podstawić

$$q = -k^2\{f(x)\},$$

przy czym

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}},$$

gdzie N jest siłą ściskającą pręt, a $\{f(x)\}$ jest funkcją określającą początkowy kształt osi pręta.

Funkcja ta może przedstawiać także linię łamaną, na przykład

$$\{f(x)\} = a\left[\frac{1}{s^2} - \left(\frac{l}{2s} + \frac{1}{s^2}\right)h^{l/2}\right], \quad 0 < a \ll 1. \tag{1.3}$$

Kształt pręta o osi danej wzorem (1.3) przedstawia rys. 1.

Stosowanie do omawianych równań operatorów Mikusińskiego daje duże korzyści. Nie wymaga ono poszukiwania osobnych sposobów rozwiązywania w przypadku dowolnych «obciążeń», sprowadzając je automatycznie w każdym przypadku do zwykłych równań algebraicznych. Tak więc, zalety metody operatorowej w porównaniu z metodami klasycznymi polegają na uproszczeniu obliczeń, często bardzo uciążliwych, a także na ich ujednoliceniu. Zalety te występują tym wyraźniej, im bardziej skomplikowane jest rozpatrywane zadanie.

Zastosowania operatorów Mikusińskiego do statyki belek podano w ósmym rozdziale pracy [1]. Rozdział ten z konieczności zawiera jednak zaledwie wstęp do możliwych zastosowań. Niektóre dalsze możliwości podano w pracach [2, 10].

2. Zagadnienia dwuwymiarowe

Rachunek operatorów Mikusińskiego można w zasadzie stosować bezpośrednio do wszelkich liniowych równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach.

W zastosowaniu do dźwigarów powierzchniowych (głównie płyt) zasadniczą korzyścią jest to, że za pomocą pojedynczych szeregów lub całek Fouriera uwzględnia się prosto i jednolicie wszelkiego rodzaju obciążenia i dyslokacje.

Równanie liniowe o stałych współczynnikach

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{ij}\frac{\partial^{i+j}w(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} = q \tag{2.1}$$

można przekształcić do następującej postaci operatorowej:

$$\sum_{i=0}^{I} a_i w^{(i)}(x) = \varphi(x), \tag{2.2}$$

gdzie

$$a_i = \sum_{j=0}^{J} a_{ij}s^j,$$

$$\varphi(x) = q + \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=0}^{j-1} a_{ij}s^{j-l-1}\frac{\partial^{i+l}w(x,0)}{\partial x^i \partial y^l}, \qquad w(x) = \{w(x,y)\}. \tag{2.3}$$

Jeżeli dane zagadnienie opisuje równanie (2.1) przy warunku brzegowym

$$\lim_{x\to\pm\infty} w = 0$$

oraz dowolnych ciągłych warunkach brzegowych na prostych $y = 0$ i $y = b$, a rozwiązanie ma być określone w obszarze

$$\Omega\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 \leqslant y \leqslant b, \end{cases}$$

przy założeniu, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q|\,dx$$

ma wartość ograniczoną oraz, że równanie charakterystyczne

$$\sum_{i=0}^{I} a_i u^i = 0 \tag{2.4}$$

nie ma pierwiastków logarytmów, to można je łatwo otrzymać za pomocą operatorowych całek Fouriera, przedstawiając $w(x)$ i $\varphi(x)$ w postaci

$$w(x) = \int_0^\infty (w_{(\alpha)} \cos \alpha x + w_{[\alpha]} \sin \alpha x) d\alpha$$

oraz

$$\varphi(x) = \int_0^\infty (\varphi_{(\alpha)} \cos \alpha x + \varphi_{[\alpha]} \sin \alpha x) d\alpha .$$

Operatory $w_{(\alpha)}$ i $w_{[\alpha]}$ są wielkościami szukanymi, a operatory $\varphi_{(\alpha)}$ i $\varphi_{[\alpha]}$ traktujemy jako dane. Postać operatorów $\varphi_{(\alpha)}$ i $\varphi_{[\alpha]}$ zależy, jak to wynika z (2.3), nie tylko od znanej prawej strony równania (2.1), lecz również od warunków brzegowych na prostej $y = 0$. W skład operatorów $\varphi_{(\alpha)}$ i $\varphi_{[\alpha]}$ mogą zatem wchodzić także pewne na razie nieznane operatory liczbowe, jednak przy poprawnie sformułowanych warunkach brzegowych rozpatrywanego zagadnienia można je łatwo wyznaczyć.

Gdy $I+J = 4$ to między innymi szczególnym przypadkiem równania (2.1) jest równanie cienkiej, jednorodnej płyty anizotropowej o małych ugięciach [9].

Przy odpowiednio sformułowanych warunkach brzegowych wzdłuż linii $y = 0$ i $y = b$, omawianym sposobem można wyznaczyć powierzchnię ugięcia anizotropowego pasma płytowego o szerokości b, dowolnie podpartego wzdłuż krawędzi $y = 0$ i $y = b$ oraz dowolnie poprzecznie obciążonego. Będzie to rozwiązanie dość ogólne obejmujące przypadek pasma wieloprzęsłowego podpartego wzdłuż linii $y = y_r$, a także przypadek pasma przegubowego podzielonego przegubami wzdłuż linii $y = y_t$.

W przypadku pasm wieloprzęsłowych dodatkowymi niewiadomymi są liniowo rozłożone oddziaływania podpór pośrednich, podatnych i niepodatnych.

W przypadku pasm przegubowych niewiadomymi są wzajemne kąty obrotu krawędzi połączonych przegubami sprężystymi lub beztarciowymi.

We wszystkich przypadkach wyznaczenie powierzchni ugięcia sprowadza się do rozwiązania prostych układów liniowych równań algebraicznych. Dla zilustrowania powyższego rozpatrzymy dwuprzęsłowe izotropowe pasmo płytowe o szerokości b i o krawędziach sztywno utwierdzonych, obciążone siłą skupioną o wartości P w punkcie o współrzędnych $x = 0$ i $y = y_1$ oraz podparte sprężyście wzdłuż linii $y = y_2$ podporą o współczynniku podatności równym K. W tym przypadku

$$q = \frac{Q}{D},$$

gdzie Q przedstawia obciążenie pasma siłą P oraz nie znanym na razie oddziaływaniem podpory pośredniej, a D jest sztywnością.

Współczynniki a_{ij} w równaniu (2.1) przyjmują następujące wartości

$$a_{04} = a_{22} = a_{40} = 1;$$

pozostałe współczynniki a_{ij} są równe zeru.

Warunki brzegowe na prostych $y = 0$ i $y = b$ mają postać

$$w(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, 0) = 0, \tag{2.5}$$

$$w(x, b) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, b) = 0. \tag{2.6}$$

Ponieważ w tym przypadku równanie (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne funkcji operatorowej $w(x)$, a obciążenie jest symetrycznie rozłożone względem osi y, należy przyjąć

$$w(x) = \int_0^\infty w_{(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha, \qquad w_{[\alpha]} = 0,$$

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi_{(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha, \qquad \varphi_{[\alpha]} = 0.$$

W rozpatrywanym przypadku po uwzględnieniu warunków (2.5) otrzymujemy

$$\varphi_{(\alpha)} = \frac{P}{\pi D} h^{y_1} - \frac{1}{D} q^*_{(\alpha)} h^{y_2} + A_{(\alpha)} s + B_{(\alpha)}.$$

Operatory liczbowe $A_{(\alpha)}$ i $B_{(\alpha)}$ są współczynnikami rozwinięcia w całki Fouriera następujących wielkości:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, 0) = \int_0^\infty A_{(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} w(x, 0) = \int_0^\infty B_{(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Zaś operator liczbowy $q^*_{(\alpha)}$ określa oddziaływanie podpory pośredniej

$$q^*(x) = \int_0^\infty q^*_{(\alpha)} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Na podstawie (2.2) otrzymujemy

$$w_{(\alpha)} = \frac{\varphi_{(\alpha)}}{(s^2 - \alpha^2)^2},$$

a stąd

$$w(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\alpha)}}{(s^2 - \alpha^2)} 2 \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Wartości $A_{(\alpha)}$, $B_{(\alpha)}$ i $q^*_{(\alpha)}$ wyznacza się z warunków (2.6) oraz z dodatkowego warunku w postaci następującej:

$$q^*(x) = Kw(x, y_2).$$

W ten sposób całe zagadnienie sprowadza się do rozwiązania trzech prostych liniowych równań algebraicznych.

Korzystając z równań przemieszczeniowych teorii sprężystości dla płaskiego stanu naprężenia, można za pomocą przedstawionego sposobu rozwiązać szereg zagadnień statyki anizotropowych pasm tarczowych oraz szereg dwuwymiarowych ustalonych zagadnień termosprężystości.

Gdy równanie (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne szukanej funkcji operatorowej, to rozwiązanie otrzymuje się za pomocą całek tylko sinusowych lub cosinusowych. Można w ten sposób rozwiązać szereg zagadnień półpasm płytowych.

Jeżeli rozwiązanie pewnego zagadnienia opisanego równaniem (2.1) ma być określone w obszarze

$$\Omega \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant b, \end{cases}$$

przy warunkach

$$w(0, y) = w(a, y) = 0,$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w(0, y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w(a, y) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, m$$

oraz dowolnych, poprawnie sformułowanych warunkach na prostych $y = 0$ i $y = b$, to możnaje otrzymać za pomocą pojedynczych operatorowych szeregów sinusowych, zaś przy warunkach

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} w(0, y) = \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} w(a, y) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, m$$

za pomocą pojedynczych operatorowych szeregów cosinusowych, przy założeniu, że równanie charakterystyczne (2.4) nie ma pierwiastków logarytmów, a równanie operatorowe (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne szukanej funkcji operatorowej. Wartość m zależy od najwyższego rzędu pochodnej cząstkowej względem x, występującej w równaniu (2.1)

Szczególnym przypadkiem równania (2.1) odpowiadającym przedstawionym warunkom jest równanie ortotropowej, jednorodnej, cienkiej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na brzegach $x = 0$ i $x = a$ oraz o dowolnych warunkach podparcia na krawędzi $y = 0$ i $y = b$. W tym przypadku mamy $I+J = 4$, zaś $m = 1$.

Rozwiązania należy poszukiwać w postaci

$$w(x) = \sum_{n\geqslant 1} w_n \sin \alpha_n x,$$

przyjmując

$$\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \varphi_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Tok postępowania jest tu analogiczny do opisanego poprzednio sposobu rozwiązywania zagadnień pasma płytowego. Również w omawianym przypadku można otrzymać w sposób jednolity rozwiązania obejmujące obszerną klasę zagadnień takich, jak zagadnienia płyt ciągłych, przegubowych, spoczywających na jednorodnym sprężystym podłożu oraz płyt obciążonych pewnymi dużymi siłami w swej płaszczyźnie. We wszystkich przypadkach można uwzględniać w ten sam sposób poprzeczne obciążenia ciągłe, obciążenia skupione oraz dyslokacje. Operatorowe rozwiązania dla płyty izotropowej przedstawiono w pracy [3].

Jak zatem widać, za pomocą całek lub szeregów operatorowych nie rozwiązujemy bezpośrednio równania cząstkowego (2.1), lecz odpowiadające mu równanie operatorowe (2.2).

Analogicznie można otrzymać ogólne rozwiązania zagadnień dynamiki prętów w postaci szeregów pojedynczych. Rozwiązania te mogą obejmować obciążenia dowolnie rozłożone oraz dowolnie zmienne w czasie (siły skupione przyłożone w sposób nagły, impulsy itp.).

Operatory Mikusińskiego stosuje się również z powodzeniem do zagadnień trójwymiarowych, np. do zagadnień dynamiki płyt. Również łatwo można otrzymać za pomocą tych operatorów rozwiązania układów równań różniczkowych, na przykład układów opisujących płyty siatkowe, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy ośrodek Cosseratów z wyróżnioną włóknistą strukturą [8]. Rozwiązania takie przedstawiono w pracach [5, 7].

3. Zagadnienia opisane za pomocą równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach

W poprzednich punktach ograniczyliśmy rozważania do równań o stałych współczynnikach, opisujących między innymi dźwigary jednorodne (stała sztywność), spoczywające na jednorodnym podłożu sprężystym. Jednak wiele ważnych zagadnień teorii konstrukcji wymaga rozwiązania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Jak wiadomo za pomocą operatorów nie da się sprowadzić takich równań do równań algebraicznych i może dlatego do tego typu równań operatorów prawie nie stosowano. Ale i tu również można, za pomocą omawianych operatorów, osiągnąć w niektórych przypadkach duże korzyści.

Rozpatrzmy zwyczajne liniowe równanie różniczkowe rzędu n o zmiennych współczynnikach

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)}(x) = q. \tag{3.1}$$

Jeżeli współczynniki $a_i(x)$ dadzą się aproksymować wielomianami stopnia m (np. uwzględniając m pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji $a_1(x)$ w szereg potęgowy lub stosując inne znane metody aproksymacji), a q wyraża się wzorem (1.2), to w wielu wypadkach udaje się rozwiązać równanie (3.1) za pomocą pochodnej algebraicznej P_A [1]. Uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\{a(x)\}\in\mathscr{K}} [P_A^j\{a(x)\} = \{(-x)^j a(x)\}],$$

gdzie $\mathscr{K}$ jest pewną klasą funkcji zdefiniowaną w pracy [1], równanie

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}x^j y^{(i)}(x) = q, \tag{3.2}$$

można sprowadzić do następującej postaci operatorowej:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}(-1)^j P_A^j s^i y = \varphi, \tag{3.3}$$

gdzie

$$\varphi = q + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{i-1} a_{i0} s^{i-l-1} y^{(l)}(0) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{l=0}^{i-2}\sum_{j=1}^{i-l-1} (-1)^j a_{ij}(i-l-1)(i-l-2)\ldots \\ \ldots (i-l-j)s^{i-l-j-1} y^{(l)}(0). \tag{3.4}$$

Jeżeli q dane jest wzorem (1.2), to y należy przyjąć w następującej postaci:

$$y = \sum_{k\geqslant 0}\left(C_{ok} + \sum_{t=1}^{T} C_{tk} h^{x_t}\right)\frac{1}{s^{k+1}}, \tag{3.5}$$

gdzie T zależy od ilości punktów nieciągłości obciążenia. Podstawiając wyrażenie (3.5) do równania (3.3), a następnie uwzględniając, że

$$\bigwedge_{a\in W(s)}\left(P_A^j a = \frac{d^j}{ds^j} a\right)$$

oraz że (por. [4])

$$\bigwedge_{x_t\geqslant 0}\left(P_A^j h^{x_t} = (-x_t)^j h^{x_t}\right),$$

gdzie $W(s)$ jest wyrażeniem wymiernym operatora różniczkowego, wartości C_{ok} i C_{tk} można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych, porównując wyrażenia przy takich samych potęgach operatora różniczkowego oraz przy tych samych operatorach przesunięcia.

Przedstawiony sposób jest szerokim uogólnieniem klasycznej metody szeregów potęgowych i nadaje się szczególnie dobrze do rozwiązywania zagadnień teorii dźwigarów nośnych, gdzie mamy stale do czynienia z równaniami o prawej stronie równej (1.2). Uogólnienie tego sposobu na zagadnienia wielowymiarowe nie przedstawia większych trudności. W pracy [4] zastosowano przedstawioną metodę do obliczania ugięć płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach.

Jak wynika z kształtu wyrażenia (3.4) nie zawsze po prawej stronie równania (3.3) występuje n stałych $y^{(l)}(0)$, a zatem nie zawsze można tym sposobem otrzymać całkę ogólną rozpatrywanego zagadnienia.

Jednak przy rozwiązywaniu omawianych równań najtrudniej znaleźć całkę szczególną równania niejednorodnego. Całkę ogólną równania jednorodnego można już na ogół łatwo wyznaczyć jakąkolwiek znaną metodą klasyczną. Przy rozwiązywaniu konkretnego zagadnienia należy poza tym zwrócić uwagę na to, czy otrzymane szeregi wyrażające rozwiązanie są zbieżne w żądanym przedziale. Niektóre typy równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach można rozwiązać także za pomocą operacji T^α [1].

Jeżeli współczynniki $a_i(x)$ równania (3.1) dadzą się aproksymować funkcjami wykładniczymi

$$a_i(x) = a_i\delta^{x/b}, \tag{3.6}$$

gdzie x/b jest zmienną bezwymiarową określoną w przedziale $0 \leqslant x/b \leqslant 1$, a δ odpowiednio dobraną stałą, to równanie (3.1) można przedstawić w postaci

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\delta^{x/b}y^{(i)}(x) = q. \tag{3.7}$$

Uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\{a(x)\}\in\mathscr{K}} [T^{\alpha}\{a(x)\} = \{e^{\alpha x}a(x)\}],$$

równanie (3.7) sprowadza się do następującej postaci operatorowej:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i T^{b^{-1}\ln\delta}s^i y = \varphi, \tag{3.8}$$

gdzie

$$\varphi = q+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{i-1} a_i\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{i-l-1} y^{(l)}(0).$$

Jeżeli q przedstawia obciążenie złożone tylko z sił skupionych, to y można przyjąć w postaci (3.5). Podstawiając wyrażenie (3.5) do równania (3.8) a następnie uwzględniając, że

$$\bigwedge_{aW\in(s)} [T^{\alpha}a(s) = a(s-\alpha)]$$

oraz że (por. [6])

$$\bigwedge_{x_t\geqslant 0} (T^{b^{-1}\ln\delta}h^{x_t} = \delta^{x_t/b}h^{x_t}),$$

wartości C_{ok} i C_{tk} wyznacza się metodą współczynników nieoznaczonych porównując współczynniki przy tych samych potęgach wyrażenia

$$\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right) \tag{3.9}$$

oraz przy tych samych operatorach przesunięcia.

Jeżeli po prawej stronie równania (3.8) wystąpią operatory różniczkowe, w wyrazach których nie można przekształcić do potęg wyrażenia (3.9), to sposobem tym nie można otrzymać rozwiązania.

Jeżeli natomiast y przedstawiamy w postaci następującej:

$$y = \sum_{k\geqslant 0}\left(C_{ok}+\sum_{t=1}^{T} C_{tk}h^{x_t}\right)\frac{1}{\left(s+\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{k+1}},$$

to można w każdym przypadku wyznaczyć wartości C_{ok} i C_{tk} porównując wyrażenia przy tych samych potęgach operatora różniczkowego oraz przy tych samych operatorach przesunięcia. Również i w tym przypadku uogólnienie omawianego sposobu na zagadnienia wielowymiarowe nie przedstawia większych trudności. W pracy [6] zastosowano omawiany sposób do rozwiązania zagadnienia płyty o jednokierunkowo zmiennej sztywności.

W wielu przypadkach rozwiązanie można otrzymać w sposób prosty, wykonując po prawej i lewej stronie równania (3.8) operację $T^{-b^{-1}\ln\delta}$, otrzymujemy wtedy równanie następujące:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i y = \bar{\varphi},$$

gdzie

$$\bar{\varphi} = T^{-b^{-1}\ln\delta}\varphi = T^{-b^{-1}\ln\delta} q + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{i-1} a_i s^{i-l-1} y^{(l)}(0).$$

Sposób ten nadaje się szczególnie dobrze do tych przypadków, w których q zawiera tylko siły skupione

$$q = \sum_{i=1}^{I} P_i h^{x_i},$$

gdyż wtedy

$$T^{-b^{-1}\ln\delta} q = \sum_{i=1}^{I} \delta^{-x_i/b} P_i h^{x_i}.$$

Widać więc, że rachunek operatorów Mikusińskiego stanowi skuteczne i nowoczesne narzędzie. Powinien zatem być powszechniej stosowany przez inżynierów oraz pracowników naukowych interesujących się zagadnieniami konstrukcji nośnych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. A. SŁOMKA, K.H. BOJDA, *O zastosowaniu operatorów Mikusińskiego do obliczania ugięć walcowych płyt ściskanych o małej wstępnej krzywiźnie walcowej*, Prace Wydz. Tech. U. Śl. (w druku).
3. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku podatności*, Rozpr. Inż., 3 (1971).
4. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż., 4 (1971).
5. K. H. BOJDA, *Pewne problemy statyki płyt siatkowych*, Rozpr. Inż., 2 (1972).
6. K. H. BOJDA, *Płyty prostokątne o jednokierunkowo zmiennej sztywności*, Mech. Teoret. i Stosowana, 3 (1972).
7. K. H. BOJDA, *Obliczanie perforowanych płyt ciągłych*. Rozprawa doktorska, Pol. Śląska, Gliwice 1972.
8. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
9. Z. KACZKOWSKI, *Płyty*, Arkady, Warszawa 1968.
10. K. H. BOJDA, *Analityczno-wykreślna metoda Mohra w ujęciu operatorowym*, Prace Wydz. Tech. U. Śl. (w druku).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ МИКУСИНСКОГО В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлены приложения операторов Микусинского к решению задач теории несущих конструкций. Обсуждены применения этих операторов в одномерных и двумерных задачах, а также в задачах, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Представленные способы охватывают как классические методы в широком обобщении, так и новые методы теории несущих систем. Во всех рассмотренных случаях указана значительная польза, достигаемая применением рассматриваемых операторов.

Summary

APPLICATION OF THE MIKUSIŃSKI OPERATORS TO THE PROBLEMS OF ENGINEERING STRUCTURES

The paper presents the application of the Mikusiński operators to one- and two-dimensional problems and to problems which may be reduced to the differential equations with variable coefficients. The methods presented contain broadly generalized classical methods as well as certain methods which have not been applied so far in the theory of structures. In all cases considerable advantages of the operators are demonstrated.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 grudnia 1972 r.