

## PODSTAWY MECHANIKI CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

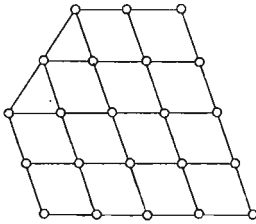
CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

### 1. Ciała dyskretyzowane

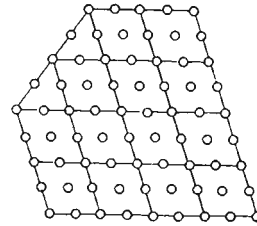
Spotykane w przyrodzie odkształcalne ciała stałe opisujemy w ramach mechaniki klasycznej najczęściej przez zastosowanie jednego z dwóch następujących podejść: strukturalnego, zwanego też dyskretnym, oraz kontynualnego. W podejściu strukturalnym, typowym dla fizyki ciała stałego, uwzględniamy rzeczywistą, nieciągłą strukturę materii. Podejście kontynualne polega na wprowadzeniu ośrodka ciągłego jako modelu ciała, a samo ciało występuje pod postacią materiału, którego własności są określone w infinytezymalnym otoczeniu każdej cząstki wprowadzonego kontinuum. Oprócz obu tych podejść warto także zwrócić uwagę na trzecie, które nazwijmy dyskretyzowanym. W podejściu dyskretyzowanym ciało stałe występuje pod postacią zbioru elementów materialnych o wymiarach skończonych, przy czym każdy element ma skończoną liczbę stopni swobody. To ostatnie podejście jest typowe np. dla zagadnień mechaniki konstrukcji, gdzie mniej jesteśmy zainteresowani własnościami ciała w infinytezymalnych otoczeniach jego cząstek (podejście kontynualne, materiałowe), nie wspominając już o niecelowości wnikania w jego strukturę atomową, lecz raczej interesują nas własności globalne pewnych skończonych części ciała. Celowość wprowadzenia podejścia dyskretyzowanego do mechaniki uzasadnimy w punkcie 6. Ciało dyskretyzowane otrzymuje się zwykle w wyniku procesu dyskretyzacji, jako pewien uproszczony model ośrodka ciągłego, jak to ma miejsce np. w znanej metodzie elementów skończonych [7], w zagadnieniach statyki budowli lub dynamiki konstrukcji (zastąpienie ciągłego rozkładu masy — masami skupionymi). Jednakże w rozważaniach, w których będzie nas interesować nie sam proces dyskretyzacji, lecz to, co w jego wyniku otrzymujemy, dogodniej pojęcie ciała dyskretyzowanego wprowadzić a priori (w sposób zupełnie niezależny od pojęcia ośrodka ciągłego), jako model rzeczywistego ciała stałego. Postępować możemy więc podobnie, jak w mechanice kontinuum, gdzie pojęcie ośrodka ciągłego wprowadzamy niezależnie od podejścia strukturalnego.

Celem uczynienia wykładu bardziej poglądowym, za punkt wyjścia przyjmijmy tutaj kontinuum materialne. Uogólniając nieco proces dyskretyzacji kontinuum materialnego omówiony np. w [7] (s. 11), podzielmy umownie to kontinuum przy pomocy pewnych powierzchni materialnych (lub krzywych w przypadku kontinuum dwuwymiarowego) na co najwyżej przeliczalny zbiór otwartych i rozłącznych części zwanych elementami skończonymi. Przyjmijmy następnie, że elementy skończone są powiązane wyłącznie przy pomocy pewnych, dodatkowo przez nas wprowadzonych, układów materialnych. Każdy

z tych układów nazwijmy cząstką ciała dyskretyzowanego. Zakładamy jednocześnie, że ciągły rozkład masy w kontinuum jest aproksymowany masami zaczepionymi tylko w cząstkach oraz że każda cząstka jest niezależnym<sup>1)</sup> układem dynamicznym, holonomicznym, o tej samej, skończonej, liczbie stopni swobody (tj. cząstka może być swobodnym punktem materialnym, ich układem lub układem punktów materialnych poddanych całkowalnym więzom). Zbiór wszystkich cząstek, które łączą dany element z innymi elementami skończonymi, nazwijmy elementem dyskretnym, odpowiadającym danemu elementowi skończonemu. Podobnie, jak w [7] zakładamy, że ruch każdego elementu skończonego jest jednoznacznie określony przez ruch odpowiadającego elementu dyskretnego. Ponadto przyjmijmy, że przestrzenią konfiguracyjną [3] dla każdej cząstki<sup>1)</sup> jest  $n$ -wymiarowa przestrzeń wektorowa.

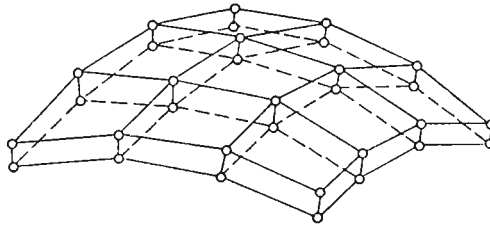


Rys. 1



Rys. 2

Prosty przykład ciała (dyskretyzowanego płaskiego) przedstawia rys. 1. Elementami skończonymi są zaznaczone (otwarte) trójkąty i równoległoboki; ruch każdego z tych elementów skończonych jest opisany (w ramach mechaniki ciał dyskretyzowanych) przy pomocy ruchu odpowiedniego elementu dyskretnego, będącego zbiorem wierzchołków



Rys. 3

danego trójkąta lub równoległoboku. Jako cząstki dyskretyzowanego ciała należy tu przyjąć swobodne punkty materialne, będące wierzchołkami tych figur, po zaczepieniu w nich mas skupionych aproksymujących bezwładność ciała. Każdy element dyskretny składa się więc z trzech lub czterech cząstek. Ciało dyskretyzowane zaznaczone na rys. 2 uwzględnia te same elementy skończone, jak na rys. 1, lecz poszczególne elementy dyskretne zawierają teraz 6 lub 9 cząstek, z których każda jest, jak poprzednio, swobodnym punktem materialnym; niektóre z cząstek należą tu tylko do jednego elementu dyskretnego. Inny przykład ciała dyskretyzowanego pokazano na rys. 3, gdzie mamy do czynienia z powłoką złożoną z czworokątnych płytek, które przyjmijmy jako elementy skończone.

<sup>1)</sup> Dwa układy dynamiczne nazywamy niezależnymi, gdy nie zawierają ani jednego wspólnego punktu materialnego oraz gdy ruch punktów należących do różnych układów nie jest poddany wspólnym więzom.

Stosując założenia Love'a–Kirchhoffa, jako cząstki ciała dyskretyzowanego możemy przyjąć zaznaczone na rysunku pary punktów materialnych (wraz z przyporządkowanymi im masami) o stałej odległości, którą jest grubość powłoki. Liczba stopni swobody każdej cząstki wynosi 5, a każdy element dyskretny jest zbiorem czterech cząstek (czterech par wierzchołków czworokątnego elementu skończonego).

Z punktu widzenia powyższych rozważań ciało dyskretyzowane jest parą  $(D, \mathcal{E})$ , gdzie  $D$  jest skończonym lub przeliczalnym zbiorem cząstek  $d, d \in D, \bar{D} > 1$ , oraz  $\mathcal{E}$  jest pokryciem zbioru  $D$  elementami dyskretnymi  $E, D \supset E \in \mathcal{E}$ . Zakładamy, że cząstki oddziałują wyłącznie w podzbiorach  $E \in \mathcal{E}^2$ ). Przyjmujemy jednocześnie, że każdy element dyskretny zawiera skończoną i nie mniejszą od dwóch liczbę cząstek oraz że dowolna cząstka może należeć do przecięcia najwyżej skończonej liczby elementów dyskretnych. Liczbę stopni swobody dowolnej cząstki oznaczmy przez  $n$  i nazwiemy liczbą lokalnych stopni swobody ciała dyskretyzowanego. Uogólnione współrzędne cząstki  $d$  oznaczamy przez  $q^a(d, \tau), a = 1, 2, \dots, n$  ( $\tau$  jest współrzędną czasową) oraz zakładamy, że są one współrzędnymi wektora w  $n$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V^n$ , tej same dla każdego  $d \in D$ . Postulujemy więc, że istnieje przestrzeń  $V^n$ , która jest przestrzenią konfiguracyjną dla każdej cząstki  $d \in D^3$ ). Ponieważ cząstki  $d \in D$  oddziałują tylko w podzbiorach  $E \subset D$ , (tj. w poszczególnych elementach dyskretnych), dlatego siły wewnętrzne w ciele dyskretyzowanym możemy określić dla każdego elementu dyskretnego niezależnie. Zgodnie z zasadą przyczynowości, siły w elemencie dyskretnym  $E$  i w chwili  $\tau$  zależą od historii ruchu tego elementu aż do chwili  $\tau$ , a zależność tę nazwiemy równaniem konstytutywnym danego elementu dyskretnego (por. pkt 3 tej pracy). Celem otrzymania równań ruchu dowolnej cząstki  $d$  należy natomiast uwzględnić siły wewnętrzne działające na tę cząstkę ze wszystkich elementów dyskretnych, do których cząstka ta należy. Równania ruchu cząstki  $d$  otrzymujemy więc rozpatrując parę  $(D_d, \mathcal{E}_d)$ , gdzie  $\mathcal{E}_d \subset \mathcal{E}$  jest zbiorem wszystkich elementów dyskretnych zawierających cząstkę  $d, \bar{\mathcal{E}}_d \geq 1$ , oraz  $D_d$  jest zbiorem cząstek, dla którego  $\mathcal{E}_d$  jest pokryciem (por. pkt 4). Należy tu pamiętać, że własności bezwładne ciała dyskretyzowanego, jako modelu ciała rzeczywistego, nie są rozdzielone na poszczególne elementy dyskretne, lecz są charakteryzowane masami poszczególnych cząstek. Jednocześnie widzimy, że nie zachodzi konieczność rozpatrywania całego ciała dyskretyzowanego w ramach rozważań teoretycznych, lecz wystarczy się ograniczyć w równaniach konstytutywnych do dowolnego elementu dyskretnego  $E, E \in \mathcal{E}$ , a w równaniach ruchu do dowolnej pary  $(D_d, \mathcal{E}_d), d \in D$ . Z powyższych uwag wynika, że mechanikę ciała dyskretyzowanego możemy scharakteryzować jako teorię ciała odkształcalnego opisaną na podstawie założeń i równań mechaniki analitycznej, przy wykorzystaniu zasady determinizmu. Związek mechaniki ciał dyskretyzowanych z mechaniką

<sup>2)</sup> Mówimy, że cząstki  $d \in D$  oddziałują wyłącznie w podzbiorach  $E \in \mathcal{E}$ , gdy siły wzajemnego oddziaływania między cząstkami należącymi do każdego podzbioru  $E$ , nie zależą od ruchu (od położenia, prędkości, przyspieszenia itp.) cząstek nie należących do  $E$ , oraz gdy siły te zależą od ruchu wszystkich cząstek należących do  $E$ .

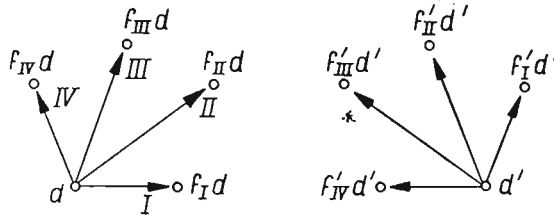
<sup>3)</sup> W przypadku bardziej ogólnym, którym nie będziemy się tu zajmować, dla każdej cząstki postulujemy istnienie osobnej przestrzeni konfiguracyjnej  $V_d^n$ , wprowadzając jednocześnie koneksję w wiązce takich przestrzeni nad zbiorem  $D$ , osobno dla każdego elementu dyskretnego  $E$  (por. [5]).

ośrodków ciągłych oraz uzasadnienie celowości wprowadzenia pojęcia ciała dyskretyzowanego podamy w punkcie 6.

## 2. Układy współrzędnych i struktury różnicowe

W celu napisania równań konstytutywnych ciała dyskretyzowanego należy uprzednio wprowadzić pojęcie układu współrzędnych w dowolnym elemencie dyskretnym  $E$ , natomiast w celu napisania równań ruchu należy wprowadzić pojęcie struktury różnicowej dla dowolnej pary  $(D_a, \mathcal{E}_a)$ . Pojęcia te pełnią podobną rolę, jak pojęcie współrzędnych materialnych w mechanice ośrodków ciągłych.

Oznaczmy  $s = s(E) = \bar{\bar{E}} - 1$ . Układem współrzędnych w elemencie dyskretnym  $E$  nazywamy dowolne wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie  $\kappa: E \rightarrow \{0, A_1, \dots, A_s\} \subset \mathcal{N}$ ,  $A_1 < A_2 < \dots < A_s$ . Oznaczmy  $d = \kappa^{-1}(0)$ ,  $f_A d = \kappa^{-1}(A)$ . Sens symbolu  $f_A$ ,  $A = A_1, A_2, \dots, A_s$  wyjaśnimy poniżej omawiając pojęcie struktury różnicowej. W każdym elemencie dyskretnym istnieje więc nieskończenie wiele różnych układów współrzędnych; dla każdej pary  $\kappa: E \rightarrow \{0, A_1, \dots, A_s\}$ ,  $\kappa': E \rightarrow \{0, A'_1, \dots, A'_s\}$  takich układów istnieje założenie  $T' = \kappa' \circ \kappa^{-1}: \{0, A_1, \dots, A_s\} \rightarrow \{0, A'_1, \dots, A'_s\}$ , które nazwiemy transformacją układu współrzędnych. Zbiór transformacji dla każdego  $E$  tworzy grupę, co umożliwia wprowadzenie takich pojęć, jak obiekt w elemencie dyskretnym, obiekt geometryczny, komitanta obiektu itp. Każdy układ współrzędnych w  $E$  dogodnie



Rys. 4

przedstawić przy pomocy grafu zorientowanego, przyporządkowując każdej z  $s$  par cząstek  $d, f_A d$ ,  $A = A_1, A_2, \dots, A_s$ , wektor o początku w  $d$  oraz końcu w  $f_A d$ . Na rys. 4 podano przykład dwóch różnych układów współrzędnych dla elementu dyskretnego o pięciu cząstkach, oznaczając wektor łączący cząstkę  $d$  z cząstką  $f_A d$  symbolem  $A$ , gdzie  $A = I, II, III, IV$ .

Niech  $\varphi: E \rightarrow R$  będzie dowolną daną funkcją na  $E$ . Każdemu układowi współrzędnych w  $E$  można wtedy przyporządkować ciąg  $s+1$  liczb  $\varphi_0 = \varphi(d)$ ,  $\Delta_{A_1} \varphi = \varphi(f_{A_1} d) - \varphi(d)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_{A_s} \varphi = \varphi(f_{A_s} d) - \varphi(d)$ . Jednocześnie każdej transformacji układu współrzędnych  $T' = \kappa' \circ \kappa^{-1}$  możemy przyporządkować macierz  $(s+1) \times (s+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 'a^{A_i} \\ 0 & B_{A_j}^A \end{pmatrix}, \quad 'a^A = \begin{cases} 1 & \text{gdy } T(A) = 0, \\ 0 & \text{gdy } T(A) \neq 0, \end{cases} \quad B_{A_j}^A = \begin{cases} 1 & \text{gdy } T(A) = A', \\ -1 & \text{gdy } T(A) = 0, \\ 0 & \text{gdy } T(A) \neq A' \text{ i } T(A) \neq 0, \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s,$$

przy czym można wykazać, że zbiór tych macierzy tworzy grupę. Podobnie łatwo zauważyć, że

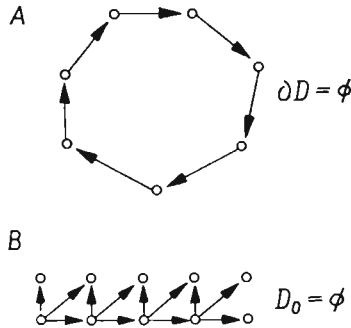
$$(2.1) \quad \begin{pmatrix} \varphi'_0 \\ \Delta_{A'_j} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 'a^{A'_i} \\ 0 & B_{A'_i}^{A'_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \Delta_{A_i} \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi'_0 = \varphi(d'), \quad d' = 'z^{-1}(0), \\ \Delta_{A'} \varphi = \varphi(f_{A'} d') - \varphi(d'), \quad f_{A'} d' = 'z^{-1}(A),$$

tj. ciąg liczb  $\varphi_0, \Delta_{A_1} \varphi, \dots, \Delta_{A_s} \varphi$  jest ciągiem składowych obiektu geometrycznego w  $E$ , który nazwijmy kowektorem w  $E$ . Przyporządkujmy teraz elementowi dyskretnemu  $E$  w każdym układzie współrzędnych  $s+1$  liczb  $\psi^0, \psi^{A_1}, \psi^{A_2}, \dots, \psi^{A_s}$ , które przy zmianie układu współrzędnych transformują się zgodnie z wzorem

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} \psi^{0'} \\ \psi^{A'_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{A'_j} & B_{A'_i}^{A'_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^{A_i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{A_i} & B_{A'_i}^{A'_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 'a^{A_i} \\ 0 & B_{A'_i}^{A'_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{A'_i}^{A'_k} \end{pmatrix}.$$

Ciąg liczb  $\psi^0, \psi^{A_1}, \psi^{A_2}, \dots, \psi^{A_s}$  nazwiemy składowymi wektora w elemencie dyskretnym  $E$ . Wzory transformacyjne (2.1) oraz (2.2) wykorzystamy przy wprowadzaniu pojęcia grupy izotropii w p. 4.

Rozpatrzmy teraz parę  $(D_d, \mathcal{E}_d)$ , gdzie  $d$  jest dowolną, lecz ustaloną cząstką zbioru  $D$ , oraz oznaczmy  $m_d = \max(\bar{E}, \bar{\mathcal{E}}_d) - 1$ , gdzie  $E$  przebiega cały zbiór  $\mathcal{E}_d$ . Dopuszczalną strukturą różnicową na  $(D_d, \mathcal{E}_d)$  nazywamy ciąg  $m_d$  wzajemnie jednoznacznych odwzo-



Rys. 5

rowań  $f_A: D_d^A \rightarrow D_d^{-A}$ ;  $D_d^A \subset D_d, D_d^{-A} \subset D_d$ ;  $A = I, II, \dots, m_d$ , jednoznacznie określających w każdym  $E \in \mathcal{E}_d$  układ współrzędnych  $z: E \rightarrow \{0, A_1, A_2, \dots, A_s\}$ ,  $s = \bar{E} - 1 \leq m_d$ , gdzie  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_s$  jest podciągiem ciągu  $I, II, III, \dots, m_d$ ; przyjmujemy tutaj  $f_A d \equiv f_A(d)$ . Przykład pary  $(D_d, \mathcal{E}_d)$  oraz dopuszczalnej struktury różnicowej na  $(D_d, \mathcal{E}_d)$  podano na rys. 5 przy pomocy grafu; obowiązują tu oznaczenia podobne, jak na rys. 4, tj. wektor zaopatrzony wskaźnikiem  $A$  łączy cząstkę podzbioru  $D_d^A$  z jej obrazem należącym do podzbioru  $D_d^{-A}$ ; zbiór wszystkich wektorów zaopatrzonych wskaźnikiem  $A$  przedstawia więc funkcję  $f_A: D_d^A \rightarrow D_d^{-A}$ .

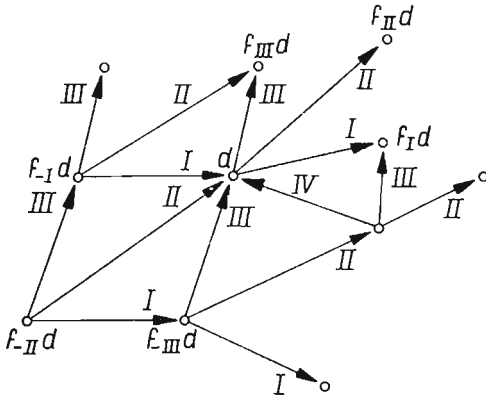
Oznaczmy przez  $f_{-A}: D_d^{-A} \rightarrow D_d^A$  funkcje odwrotne do  $f_A$  oraz połączmy  $f_{-A} d' = f_{-A}(d')$  dla każdego  $d' \in D_d^{-A}$  i każdego  $A$ . Dla dowolnej funkcji rzeczywistej  $\varphi: D_d \rightarrow R$  i każdego

$\Delta$  możemy wtedy zdefiniować dwie funkcje  $\Delta_A \varphi: D_d^A \rightarrow R$ ,  $\bar{\Delta}^A \varphi: D_d^{-A} \rightarrow R$  definiując ich wartości jako

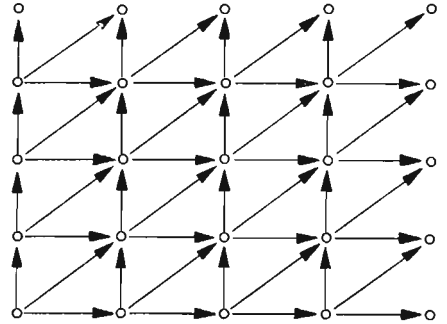
$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Delta_A \varphi(d') &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(f_A d') - \varphi(d') & \text{gdy } d' \in D_d^A, \\ \bar{\Delta}_A \varphi(d') &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(d') - \varphi(f_{-A} d') & \text{gdy } d' \in D_d^{-A}. \end{aligned}$$

Wskaźnik  $\Delta$  przebiega w (2.3) ciąg  $I, II, \dots, m_d$ , a funkcje  $\Delta_A \varphi$  i  $\bar{\Delta}_A \varphi$  nazywamy odpowiednio prawymi i lewymi różnicami funkcji  $\varphi$ . Celem otrzymania grafu funkcji  $f_{-A}$  dla przypadku pokazanego na rys. 5, należy zmienić zwroty wektorów oznaczonych przez  $\Delta$ .

Dla niektórych ciał dyskretyzowanych dopuszczalną strukturę różnicową można wprowadzić dla całego  $(D, \mathcal{E})$ . W przeciwieństwie do struktury różnicowej na  $(D_d, \mathcal{E}_d)$ , którą można nazwać strukturą lokalną, dopuszczalną strukturę różnicową na  $(D, \mathcal{E})$  nazwiemy globalną. Oznaczając  $m = \max m_d$ ,  $d \in D$ , dopuszczalną strukturę różnicową na  $(D, \mathcal{E})$  nazwiemy ciąg  $m$  wzajemnie jednoznacznych odwzorowań  $f_A: D_A \rightarrow D_{-A}$ ;  $D_A \subset D$ ,  $D_{-A} \subset D$ ,  $\Delta = I, II, \dots, m$ , jednoznacznie określających w każdym  $E \in \mathcal{E}$  układ współrzędnych  $\kappa: E \rightarrow \{0, \Delta_1, \dots, \Delta_s\}$ ,  $s = \bar{E} - 1 \leq m$ , gdzie  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$  jest podciągiem ciągu  $I, II, \dots, m$ .



Rys. 6



Rys. 7

Każda struktura globalna indukuje dla dowolnego  $(D_d, \mathcal{E}_d)$ ,  $d \in D$ , strukturę lokalną; zależność odwrotna oczywiście nie zawsze musi zachodzić. Strukturę różnicową globalną można wprowadzić, między innymi, gdy dla każdego  $E \in \mathcal{E}$  mamy  $\bar{E} = m + 1 = \text{const}$  oraz gdy każda cząstka  $d \in D$  należy najwyżej do  $m + 1$  różnych elementów dyskretnych. Przypadek ten występuje często w praktyce. Jeżeli ponadto każdy element dyskretny zawiera co najmniej jedną cząstkę wspólną z  $m$  innymi elementami dyskretnymi, to warto dodatkowo zdefiniować pojęcie brzegu i wnętrza pary  $(D, \mathcal{E})$ . Wnętrzem pary  $(D, \mathcal{E})$  nazywamy podzbiór  $D_0 \subset D$  taki, że  $d \in D_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bar{E}_d = m + 1$ , tj. gdy cząstka  $d$  należy równocześnie do  $m + 1$  różnych elementów dyskretnych. Brzegiem pary  $(D, \mathcal{E})$  nazywamy podzbiór  $\partial D \subset D$  zdefiniowany przez  $\partial D = D - D_0$ . W przypadkach szczególnych  $\partial D = \Phi$  (por. rys. 5A, gdzie  $m = 1$ ) lub  $D_0 = \Phi$  (por. rys. 5B, gdzie  $m = 3$ ). Przykład globalnej struktury różnicowej na parze  $(D, \mathcal{E})$ , dla której  $\bar{E} = 4$  (tj.  $m = 3$ ) podano na rys. 7 w postaci grafu, na którym wektory «poziome» reprezentują

funkcję  $f_I$ , wektory «pionowe» reprezentują funkcję  $f_{II}$  oraz pozostałe wektory reprezentują funkcję  $f_{III}$ . Można wykazać, że  $D_0 = \bigcap_{\Lambda=I}^m (D_\Lambda \cap D_{-\Lambda})$  w każdej dopuszczalnej strukturze różnicowej na  $(D, \mathcal{E})$ .

### 3. Siły wewnętrzne

Siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym  $E \in \mathcal{E}$  są to siły działające między cząstkami  $d \in E$ . Są one przenoszone przez element skończony ciała stałego przy założeniu, że element dyskretny  $E$  jest modelem tego elementu skończonego (por. pkt 1), a sam element skończony można traktować niezależnie od reszty ciała<sup>4)</sup>. Celem przedstawienia ruchu i sił wewnętrznych elementu dyskretnego  $E$  w postaci analitycznej, wprowadzimy w  $E$  układ współrzędnych  $\kappa: E \rightarrow \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s\}$ ,  $s = \bar{E} - 1$ . Ruch elementu dyskretnego wyznaczają wektory  $\mathbf{q}(d, \tau) \in V^n$ ,  $\mathbf{q}(f_\Lambda d, \tau) \in V^n$ ,  $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s$ , o składowych odpowiednio  $q_a^s(d, \tau)$ ,  $q^a(f_\Lambda d, \tau)$ ,  $a = 1, 2, \dots, n$ . Korzystając z układu współrzędnych  $\kappa$  ruch ten dogodnie zlokalizować w cząstce  $d \in E$ , określając go  $s+1$  funkcjami wektorowymi  $\mathbf{q}(d, \tau)$ ,  $\Delta_\Lambda \mathbf{q}(d, \tau)$ ,  $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s$ . Siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym możemy określić, w przyjętym układzie współrzędnych  $\kappa$ , funkcjami  $T_a(d, \tau)$ ,  $T_a^\Lambda(d, \tau)$ , gdzie  $T_a(d, \tau)$  są uogólnionymi siłami działającymi na cząstkę  $d$  w danym elemencie dyskretnym  $E = \{d, f_{\Lambda_1} d, \dots, f_{\Lambda_s} d\}$  oraz  $-T_a^\Lambda(d, \tau)$  są uogólnionymi siłami działającymi na cząstkę  $f_\Lambda d$  w tymże elemencie dyskretnym  $E$ <sup>5)</sup>. Dogodniej jednak wprowadzić na miejsce sił uogólnionych  $T_a(d, \tau)$ , siły uogólnione  $t_a(d, \tau)$  dane przez

$$(3.1) \quad t_a(d, \tau) = T_a(d, \tau) - \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T_a^\Lambda(d, \tau).$$

Siły  $t_a(d, \tau)$  są, zgodnie z definicją (3.1), uogólnionymi wypadkowymi wszystkich sił wewnętrznych w  $E$  działających na element dyskretny  $E$ . Należy pamiętać, że wszystkie wprowadzone wielkości są określone tylko w dowolnym lecz przyjętym uprzednio układzie współrzędnych  $\kappa$ .

Oznaczmy przez  $\delta L = \delta L(E)$  wariację pracy sił wewnętrznych w na  $E$  dowolnych przemieszczeniach wirtualnych  $\delta q^a(d, \tau)$ ,  $\delta q^a(f_\Lambda d, \tau)$  elementu dyskretnego  $E$ . Zgodnie ze znaną definicją sił uogólnionych mamy

$$(3.2) \quad \delta L = -T_a(d, \tau) \delta q_a^s(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T_a^\Lambda(d, \tau) \delta q^a(f_\Lambda d, \tau) = \\ = -T_a(d, \tau) \delta q_a^s(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T_a^\Lambda(d, \tau) \delta q^a(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T_a^\Lambda(d, \tau) \delta \Delta_\Lambda q^a(d, \tau),$$

co zgodnie z (3.1) prowadzi do

$$(3.3) \quad \delta L = T_a^\Lambda(d, \tau) \delta (\Delta_\Lambda q^a(d, \tau)) - t_a(d, \tau) \delta q^a(d, \tau)$$

przy założeniu, że obowiązuje konwencja sumacyjna względem wszystkich wskaźników.

<sup>4)</sup> Współdziałanie danego elementu skończonego z resztą ciała dyskretyzowanego wyraża się wyłącznie przez fakt istnienia cząstek wspólnych dla różnych elementów dyskretnych.

<sup>5)</sup> Wskaźniki  $\Lambda, \Phi, \dots$  przebiegają w tym punkcie pracy ciąg  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s$ ;  $s = s(E) = \bar{E} - 1$ , natomiast wskaźniki  $a, b, \dots$  przebiegają w całej pracy ciąg  $1, 2, \dots, n$ .

Z równania (3.3) wynika, że  $T_a^A(d, \tau)$  są, dla każdego ustalonego  $A, d, \tau$ , składowymi kowektora w przestrzeni  $V^{*n}$ , dualnej do przestrzeni konfiguracyjnej. Jednocześnie z (2.1) wynika, że  $s+1$  liczb  $q^a(d, \tau), \Delta_A q^a(d, \tau)$  dla każdego ustalonego  $a, \tau$ , można traktować jako składowe pewnego  $s+1$  wymiarowego kowektora, gdyż

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} 'q^a \\ \Delta_{A_i} q^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 'a^{A_j} \\ 0 & B_{A_i}^{A_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^a \\ \Delta_{A_j} q^a \end{pmatrix}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Korzystając z (3.3) możemy wykazać, że  $s+1$  liczb  $T_a^A(d, \tau), t_a(d, \tau)$  (dla każdego ustalonego  $a, d, \tau$ ), to składowe  $s+1$  wymiarowego wektora o regule transformacji

$$(3.5) \quad \begin{pmatrix} -'t_a \\ 'T_a^{A_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{A_j} & B_{A_i}^{A_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_a \\ T_a^{A_i} \end{pmatrix}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie macierz  $(s+1) \times (s+1)$  występująca w (3.5) jest odwrotna (po transpozycji) względem odpowiedniej macierzy występującej w (3.4). Wielkości «primowane» odnoszą się do układu współrzędnych  $\varkappa': E \rightarrow \{0, A'_1, A'_2, \dots, A'_s\}$ , a wielkość  $\delta L$  jest niezmiennikiem tak względem zmiany układu współrzędnych w  $E$ , jak i zmiany bazy w przestrzeni konfiguracyjnej  $V^n$  i przestrzeni dualnej  $V^{*n}$ .

Wprowadzimy teraz dla dowolnego elementu dyskretnego  $E$  i dowolnego układu współrzędnych w  $E$ , ciąg złożony z  $K = K(E)$  ( $K$  jest liczbą całkowitą dodatnią oraz  $E \in \mathcal{E}$ ) różniczkowalnych funkcji

$$(3.6) \quad \gamma_A = \varphi_A(d, \mathbf{q}(d, \tau), \Delta_A \mathbf{q}(d, \tau)), \quad A = 1, 2, \dots, K,$$

których postać jest taka sama w każdym układzie współrzędnych w  $E$ . Jednocześnie żądamy, by rozwiązaniem równań  $\varphi_A(d, \dots) = 0$  były wszystkie ruchy sztywne elementu dyskretnego  $E$  (tj. ruchy nie wywołujące zmiany sił wewnętrznych w tym elemencie, por. pkt 4) oraz by każdemu ruchowi elementu  $E$  odpowiadały funkcje  $\gamma_A = \gamma_A(d, \tau)$  określające ten ruch z dokładnością do dowolnego ruchu sztywnego. Wprowadzimy następnie  $K = K(E), E \in \mathcal{E}$ , funkcji  $q^A = p^A(d, \tau)$  w ten sposób, by wyrażenie  $\delta L = p^A \delta \gamma_A$  (obowiązuje konwencja sumacyjna) określało dowolną wariację pracy sił wewnętrznych w elemencie dyskretnym  $E$ . Tym samym związek

$$(3.7) \quad \delta L = p^A \delta \gamma_A = p^A (\Phi_{Aa}^A \delta \Delta_A q^a + \Phi_{Aa} \delta q^a) = T_a^A \delta \Delta_A q^a - t_a \delta q^a,$$

w którym oznaczono

$$(3.8) \quad \Phi_{Aa}^A = \frac{\partial \varphi_A}{\partial \Delta_A q^a}, \quad \Phi_{Aa} = \frac{\partial \varphi_A}{\partial q^a},$$

winien zachodzić dla dowolnych  $\delta \Delta_A q^a$  oraz  $\delta q^a$ . Wynika stąd, że

$$(3.9) \quad T_a^A = p^A \Phi_{Aa}^A, \quad t_a = -p^A \Phi_{Aa}.$$

Funkcje  $p^A(d, \tau), A = 1, 2, \dots, K$ , spełniające związki (3.9), nazwiemy napięciami w elemencie dyskretnym  $E$ , natomiast funkcje  $\gamma_A = \gamma_A(d, \tau)$  nazwiemy odkształceniami tego elementu. Zarówno napięcia, jak i odkształcenia określone są w danym układzie współrzędnych.



4. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne dla dowolnego elementu dyskretnego wyrażają związek między siłami wewnętrznymi w tym elemencie a jego ruchem (tj. ruchem wszystkich jego cząstek). Równania te napiszemy postulując dla każdego  $E \in \mathcal{E}$  zasadę determinizmu, [4], tj. przyjmując, że siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym  $E$  (siły działające pomiędzy cząstkami tego elementu) w dowolnej chwili  $\tau$  są określone historią ruchu elementu  $E$  aż do chwili  $\tau$  włącznie. Nie uwzględniamy więc tutaj żadnych czynników działających na element skończony innych od sił między cząstkami odpowiedniego elementu dyskretnego. W dowolnym układzie współrzędnych  $\varkappa: E \rightarrow \{0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s\}$  zasadę determinizmu dla ciał dyskretyzowanych wyrażają więc następujące równania konstytutywne

$$(4.1) \quad \begin{aligned} T_a^A(d, \tau) &= \int_{\sigma=-\infty}^{\tau} S_a^A [d, \mathbf{q}(d, \sigma), \Delta_{\Phi} \mathbf{q}(d, \sigma)], \\ t_a(d, \tau) &= \int_{\sigma=-\infty}^{\tau} S_a [d, \mathbf{q}(d, \sigma), \Delta_{\Phi} \mathbf{q}(d, \sigma)], \end{aligned}$$

gdzie argument  $d$  oznacza, że ruch elementu dyskretnego jest zlokalizowany w cząstce  $d$  oraz gdzie  $S_a^A, S_a$  nazywamy funkcjonalami konstytutywnymi elementu dyskretnego  $E$ . Funkcjonały te opisują jednoznacznie pewne globalne własności materiałowe i strukturalne odpowiedniego elementu skończonego. Postać funkcjonałów konstytutywnych zależy od wyboru układu współrzędnych  $h\kappa$  w elemencie dyskretnym  $E$ . Niech  $\varkappa: E \rightarrow \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s\}$  oraz  $\varkappa': E \rightarrow \{0, \Lambda'_1, \Lambda'_2, \dots, \Lambda'_s\}$  będą dowolnymi dwoma takimi układami. Funkcjonały konstytutywne w obu tych układach współrzędnych oznaczmy przez  $S_a^A(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Lambda} \mathbf{q})$ ,  $S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Lambda} \mathbf{q})$  oraz  $'S_a^A(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Lambda'} \mathbf{q}')$ ,  $'S_a(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Lambda'} \mathbf{q}')$ , gdzie argumenty  $d$  oraz  $d'$  oznaczają lokalizację ruchów odpowiednio w cząstkach  $d$  lub  $d'$ . Korzystając ze związków transformacyjnych (3.5) i (3.4) napiszemy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} S_a^A(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) &= B_{\Lambda'}^A, 'S_a^A(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'} \mathbf{q}') + 'a^A S'_a(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'} \mathbf{q}') = \\ &= B_{\Lambda'}^A, 'S_a^A(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) + 'a^A S'_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}), \\ S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) &= S'_a(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'} \mathbf{q}') = S'_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}); \\ \Lambda, \Phi &= \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s; \Lambda', \Phi' = \Lambda'_1, \Lambda'_2, \dots, \Lambda'_s. \end{aligned}$$

oraz równości (4.2) będziemy interpretować nie jako transformację  $'T = \varkappa' \circ \varkappa^{-1}: \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_s\} \rightarrow \{0, \Lambda'_1, \Lambda'_2, \dots, \Lambda'_s\}$  układu współrzędnych w  $E$ , lecz jako przekształcenie zbioru  $E$ , w którym obrazem cząstki  $d = \varkappa^{-1}(0)$  jest cząstka  $d' = '\varkappa^{-1}(0)$ , a obrazem cząstki  $f_{\Lambda_i} d = \varkappa^{-1}(\Lambda_i)$  jest cząstka  $f_{\Lambda'_i} d' = '\varkappa^{-1}(\Lambda'_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$ . Cząstka  $d$  w tej interpretacji zmienia swój ruch z  $\mathbf{q}(d, \tau)$  na  $\mathbf{q}(d, \tau) + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}(d, \tau)$ , a ruch cząstki  $f_{\Lambda_i} d$  względem cząstki  $d$  ulega zmianie z  $\Delta_{\Lambda_i} \mathbf{q}(d, \tau)$  na  $B_{\Lambda'_i}^{\Lambda_i} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}(d, \tau)$ . Zauważmy, że zawsze istnieje podgrupa grupy przekształceń (3.4), która nie zmienia postaci funkcjonałów konstytutywnych, tj. dla której  $'S_a^A = S_a^A$ ,  $S_a = S_a$ . Zgodnie z (4.2) istnieją więc zawsze takie  $'a^{\Phi}$  oraz  $B_{\Phi'}^{\Phi}$ , dla których

$$(4.3) \quad \begin{aligned} S_a^A(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) &= B_{\Lambda'}^A, S_a^A(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) + 'a^A S_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}), \\ S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi} \mathbf{q}) &= S_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi} \Delta_{\Phi} \mathbf{q}). \end{aligned}$$

W szczególności związki (4.3) mogą zachodzić tylko gdy odpowiednia podgrupa grupy przekształceń zawiera tylko element jednostkowy  $'a^\phi = 0$ ,  $B\phi_i^{\phi_j} = \delta_i^j$ . Podgrupę grupy przekształceń (3.4), która spełnia (4.3), nazwiemy grupą izotropii funkcjonałów konstytutywnych (4.1). Grupa izotropii w mechanice ciał dyskretyzowanych nie zależy od żadnej «konfiguracji odniesienia» ciała (jak to ma miejsce w mechanice ośrodków ciągłych), lecz może zależeć od wyboru układu współrzędnych, a ściślej mówiąc od sposobu lokalizacji ruchu w elemencie dyskretnym  $E$ . Jeżeli grupa izotropii zawiera wszystkie przekształcenia (3.4), dla których  $'a^\phi = 0$ , wtedy element dyskretny nazwiemy izotropowym w cząstce  $d$ ; wszystkie  $s$  wektorów  $\Delta_A^i \mathbf{q}$ ,  $A = A_1, A_2, \dots, A_s$ , w przestrzeni konfiguracji są, mówiąc obrazowo, jednakowo uprzywilejowane z punktu widzenia własności elementu dyskretnego. Interpretując bowiem (4.3) jako zmianę ruchu elementu dyskretnego łatwo zauważyć, że dla elementu  $E$  izotropowego w cząstce  $d$ , zamiana miejscami cząstek  $f_{A_1} d, f_{A_2} d, \dots, f_{A_s} d$  nie zmienia sił wewnętrznych w elemencie dyskretnym. Element dyskretny izotropowy w każdej cząstce nazwiemy izotropowym. Można wykazać, że dla elementu izotropowego w cząstce  $d$  równania (4.3) sprowadzają się do postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} S_a^A(d, \mathbf{q}, \Delta_\phi \mathbf{q}) &= Q_A^A S^{A'}(d, \mathbf{q}, Q_\phi^\phi \Delta_\phi \mathbf{q}), \\ S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_\phi \mathbf{q}) &= S_a(d, \mathbf{q}, Q_\phi^\phi \Delta_\phi \mathbf{q}), \end{aligned}$$

gdzie  $(Q_\phi^\phi)$  jest macierzą  $s \times s$ , która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma  $s-1$  zer oraz jedynekę (macierz permutacji). Zbiór tych macierzy tworzy podgrupę grupy ortogonalnej.

Jeżeli dla każdego elementu dyskretnego w ciele dyskretyzowanym istnieje taki układ współrzędnych, że funkcjonały konstytutywne tych elementów są identyczne, to ciało nazwiemy równomiernym. Gdy ponadto wszystkie te układy są indukowane przez jedną globalną strukturę różnicową, omówioną na końcu p. 2, to ciało dyskretyzowane nazwiemy jednorodnym. Podane definicje są wzorowane na odpowiednich definicjach mechaniki ośrodków ciągłych [4].

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny, w którym dla danego elementu dyskretnego  $E$  istnieje potencjał sprężysty. Wprowadzając w  $E$  układ współrzędnych  $\kappa: E \rightarrow \{0, A_1, A_2, \dots, A_s\}$ , potencjał ten przedstawimy w postaci  $e[d, (d, \mathbf{q}, \tau), \mathbf{q}(f_{A_1} d, \tau)]$ , a zgodnie z definicją sił  $T_a, T_a^A$  otrzymamy

$$(4.5) \quad T_a(d, \tau) = -\frac{\partial e(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)}, \quad T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial e(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)}; \quad A = A_1, A_2, \dots, A_s.$$

Zdefiniujmy następnie funkcję  $\varepsilon(d, \dots)$ , zwaną potencjałem sprężystym, kładąc

$$(4.6) \quad \varepsilon[d, \mathbf{q}(d, \tau), \Delta \mathbf{q}(d, \tau)] \equiv e[d, \mathbf{q}(d, \tau), \mathbf{q}(d, \tau) + \Delta \mathbf{q}(d, \tau)],$$

uj lokalizując ruch elementu dyskretnego w cząstce  $d$ . Z uwagi na

$$(4.7) \quad \frac{\partial e(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(f_{A_1} d, \tau)} = \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \Delta_{A_1} \mathbf{q}^a(d, \tau)}, \quad \frac{\partial e(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)} = \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)} + \sum_{A=A_1}^{A_s} \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \Delta_A \mathbf{q}^a(d, \tau)},$$

otrzymamy ostatecznie

$$(4.8) \quad T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \Delta_A \mathbf{q}^a(d, \tau)}, \quad t_a(d, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)}.$$

Równania (4.8) są przypadkiem szczególnym równań konstytutywnych (4.1); element dyskretny, dla którego one obowiązują, nazwiemy sprężystym. Jeżeli wszystkie elementy dyskretne ciała dyskretyzowanego są sprężyste, wtedy ciało to nazwiemy sprężystym, a odpowiednie równania dla takiego ciała — równaniami dyskretnej teorii sprężystości [6]. Podobnie można sformułować podstawowe równania dyskretyzowanych ciał sprężysto-plastycznych [1].

Korzystając ze składowych stanu napięcia  $p^A(d, \tau)$  oraz składowych stanu odkształcenia  $\gamma_A(d, \tau)$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ , można przedstawić alternatywną postać równań konstytutywnych

$$(4.9) \quad p^A(d, \tau) = \int_{\sigma=-\infty}^{\tau} P^A(d, \gamma_B(d, \sigma)), \quad A, B = 1, 2, \dots, K,$$

gdzie  $P^A$  są funkcjonalami konstytutywnymi. Dla sprężystego elementu dyskretnego istnieje potencjał

$$(4.10) \quad \varepsilon = \varepsilon(d, \gamma_B(d, \tau)),$$

a równania konstytutywne mają postać

$$(4.11) \quad p^A_i(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(d, \gamma_B(d, \tau))}{\partial \gamma_A(d, \tau)}.$$

Przykłady równań konstytutywnych dla niektórych dyskretyzowanych ciał sprężystych podano w [2].

### 5. Równania ruchu

Niech  $d \in D$  będzie dowolną cząstką ciała dyskretyzowanego,  $Q_a(d, \tau)$  niech oznacza uogólnione siły działające na tę cząstkę oraz niech

$$(5.1) \quad T = T(d, \dots) = \frac{1}{2} a_{ab}(d) \dot{q}^a(d, \tau) \dot{q}^b(d, \tau)$$

będzie jej energią kinetyczną (wskaźniki  $a, b$  przebiegają ciąg  $1, 2, \dots, n$ ; obowiązuje konwencja sumacyjna). W (5.1) założyliśmy, dla uproszczenia, że cząstka  $d$  jest układem dynamicznym skleronomicznym. Równania Lagrange'a II rodzaju dla cząstki  $d$  mają znaną postać

$$(5.2) \quad Q_a(d, \tau) = a_{ab}(d) \ddot{q}^b(d, \tau).$$

Celem wyrażenia sił  $Q_a(d, \tau)$  przez siły wewnętrzne należy rozważyć parę  $(D_d, \mathcal{E}_d)$  i przyjąć na niej daną dopuszczalną strukturę różnicową (por. p. 1 i 2). Przyjmujemy, że wskaźniki  $I, \Phi$  przebiegają teraz ciąg  $I, II, \dots, m_d$  oraz wprowadzamy następujące pomocnicze oznaczenia:

$$T_a(d', \tau) \stackrel{\text{df}}{=} 0, \quad T_a^A(d', \tau) \stackrel{\text{df}}{=} 0,$$

gdy w  $d'$  nie jest zlokalizowany ruch żadnego elementu dyskretnego,

$$T_a^A(d', \tau) \stackrel{\text{df}}{=} 0 \quad \text{gdy} \quad d' \sim \in D_d^A,$$

$$T_a^A(f_{-A}d', \tau) \stackrel{\text{df}}{=} 0 \quad \text{gdy} \quad d' \sim \in D_d^{-A}.$$

Tym samym wielkości  $T_a^A(d', \tau)$ ,  $T_a^A(f_{-A}d', \tau)$ ,  $T_a(d', \tau)$  są określone dla każdego  $d' \in \in D_d$  oraz dla  $A = I, II, \dots, m_d$  (por. p. 3). Także wielkość  $t_a(d, \tau)$  można teraz zdefiniować wzorem

$$(5.3) \quad t_a(d, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} T_a(d, \tau) - \sum_{A=I}^{m_d} T_a^A(d, \tau),$$

wynikającym z (3.1) oraz wyprowadzonych tu pomocniczych definicji. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$(5.4) \quad Q_a(d, \tau) = T_a(d, \tau) - \sum_{A=I}^{m_d} T_a^A(f_{-A}d, \tau) + f_a(d, \tau),$$

gdzie  $f_a(d, \tau)$  są uogólnionymi siłami zewnętrznymi działającymi na cząstkę  $d$ , oraz  $T_a(d, \tau)$  i  $-T_a^A(f_{-A}d, \tau)$  są siłami wewnętrznymi działającymi na cząstkę  $d$  we wszystkich elementach dyskretnych  $E \in \mathcal{E}_d$  zawierających tę cząstkę. Rugując z (5.3) i (5.4) siły uogólnione  $T_a(d, \tau)$  oraz korzystając z (5.2), otrzymamy ostatecznie równania

$$(5.5) \quad \bar{\Delta}_A T_a^A(d, \tau) + t_a(d, \tau) + f_a(d, \tau) = a_{ab}(d) \ddot{q}^b(d, \tau),$$

w których obowiązuje konwencja sumacyjna podług wskaźników  $A = I, II, III, \dots, m_d$ , oraz  $b = 1, 2, \dots, n$ . Równania (5.5) są niezależne od własności elementów dyskretnych i w związku z tym możemy je nazwać równaniami ruchu ciała dyskretyzowanego. Równania te powinny być spełnione dla każdego  $d \in D$ , a celem ich napisania należy wprowadzić dopuszczalną strukturę różnicową dla każdego  $(D_d, \mathcal{E}_d)$ ,  $d \in D$ , lub, gdy to jest możliwe, globalną strukturę różnicową na  $(D, \mathcal{E})$ . W szczególnym przypadku, gdy spełnione są warunki podane na końcu p.2, równania ruchu w postaci (5.5) dotyczą każdego  $d \in D_0$  (nie zachodzi wtedy potrzeba definiowania dodatkowych «zerowych» sił wewnętrznych, a wskaźnik  $A$  przebiega ciąg  $I, II, III, \dots, m$ ), natomiast dla  $d \in \partial D$  równania ruchu mają postać [6]

$$(5.6) \quad \sum_{A \in R_d} T_a^A(d, \tau) - \sum_{A \in L_d} T_a^A(f_{-A}d, \tau) + t_a(d, \tau) + f_a(d, \tau) = a_{ab} \ddot{q}^b(d, \tau),$$

gdzie  $R_d \subset (I, II, \dots, m)$ ,  $L_d \subset (I, II, m)$  są podciągami ciągu  $I, II, \dots, m$  takimi, że  $(A \in R_d) \Leftrightarrow (d \in D_{+A})$  oraz  $(A \in L_d) \Leftrightarrow (d \in D_{-A})$ . W pracy [6] związki postaci (5.6) nazwano umownie «warunkami brzegowymi»; należy jednak zaznaczyć, że w mechanice ciał dyskretyzowanych warunki brzegowe w ścisłym tego pojęcia znaczeniu nie występują («warunki brzegowe» podane np. w [6] są tylko inną postacią równań ruchu).

Alternatywną postać równań ruchu otrzymamy korzystając z (3.9), tj. po wprowadzeniu składowych stanu napięcia  $p^A$ . Zgodnie z (5.5) i (3.9) napiszemy

$$(5.7) \quad \bar{\Delta}_A (\Phi_{Aa}^A p^A) - \Phi_{Aa} p^A + f_a = a_{ab} \ddot{q}^b,$$

pomijając argumenty poszczególnych funkcji; obowiązuje tu konwencja sumacyjna podług wskaźników  $A = I, II, \dots, m_d$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ , oraz  $b = 1, 2, \dots, n$ .

Równania ruchu (5.5) oraz równania konstytutywne (4.1) stanowią podstawowy układ równań mechaniki ciał dyskretyzowanych; alternatywna postać tego układu wyraża się wzorami (5.7), (3.6) i (4.9). Podstawowymi niewiadomymi są najczęściej funkcje  $q^a(d, \tau)$ ,

$d \in D$ , których liczba jest równa  $n$ -krotnej liczbie cząstek w układzie, oraz przez które wyrażamy wszystkie pozostałe niewiadome funkcje (siły wewnętrzne lub napięcia i odkształcenia). W przypadkach szczególnych niektóre z funkcji  $q^a(d, \tau)$  mogą być dane z góry; wtedy ich miejsce jako niewiadomych zajmują odpowiednie funkcje  $f_a(d, \tau)$ , a liczba poszukiwanych funkcji nie ulega zmianie. Łatwo sprawdzić, że liczba niewiadomych funkcji jest równa liczbie równań, którymi dysponujemy w mechanice ciał dyskretyzowanych. Należy podkreślić, że jedyną lecz zasadniczą trudnością przy formułowaniu równań danego ciała dyskretyzowanego jest wyznaczenie prawych stron równań konstytutywnych. Trudność tę można pokonać albo korzystając z równań mechaniki ośrodków ciągłych (co dokonano dla pewnych dyskretyzowanych ciał sprężystych, [2] i sprężystoplastycznych [1]) lub też ewentualnie na drodze doświadczalnej.

## 6. Uwagi końcowe

Dokonajmy krótkiego porównania mechaniki ciał dyskretyzowanych z mechaniką ośrodków ciągłych. Zaznaczmy od razu, że problemy dające się rozwiązać przy pomocy równań mechaniki ośrodków ciągłych nie są z reguły interesujące jako zagadnienia mechaniki ciał dyskretyzowanych, a rozpatrywanie ich w oparciu o równania tej ostatniej jest po prostu niecelowe. Jednakże mechanika ośrodków ciągłych, w której podstawowe równania są najczęściej równaniami różniczkowymi cząstkowymi, praktycznie umożliwia wyczerpującą analizę i rozwiązanie jedynie stosunkowo prostych zagadnień, w których mamy do czynienia z obszarami o nieskomplikowanych kształtach i regularnych brzegach, z obciążeniami o niewielkiej liczbie nieciągłości i osobliwości oraz z materiałami o własnościach nie charakteryzujących się wieloma nieciągłościami lub defektami. Warunki te nie zachodzą jednak w zdecydowanej większości zagadnień współczesnej techniki, w których mamy do czynienia z konstrukcjami o złożonych kształtach, o nieciągłych i skupionych obciążeniach oraz o materiałach, których własności doznają wielu skokowych nieciągłości (materiały zbrojone). Korzystanie w tych przypadkach z równań różniczkowych cząstkowych mechaniki ośrodków ciągłych ogranicza się wtedy praktycznie do zapisania odpowiedniego zagadnienia granicznego bez możliwości sformułowania nawet najbardziej ogólnych wniosków jakościowych. Również zastąpienie równań różniczkowych cząstkowych równaniami różnicowymi, przy dużej liczbie osobliwości (związanych np. z działaniem sił skupionych, koncentracją naprężeń, nieciągłościami etc.) prowadzi do trudności numerycznych (bardzo wielka liczba równań) uniemożliwiających często uzyskanie rozwiązania ilościowego. W zagadnieniach takich zastosowanie równań mechaniki ciał dyskretyzowanych wydaje się być obecnie jedną teoretyczną drogą, na której można uzyskać tak jakościową, jak i ilościową analizę problemu. Powyższe stwierdzenie wynika, między innymi, z następujących przesłanek. Przede wszystkim w mechanice ciał dyskretyzowanych nie występują warunki brzegowe (por. uwagi po wzorze (5.6)), a tym samym nawet najbardziej złożony kształt ciała nie utrudnia analizy zagadnienia. Po drugie, przy odpowiedniej dyskretyzacji także nieciągłość obciążeń oraz nieciągłość materiału nie prowadzą do bardziej złożonej postaci równań, bowiem równania konstytutywne opisują niezależnie własności poszczególnych elementów skończonych, które zawsze można traktować w przybliżeniu jako jednorodne i nieobciążone. Wreszcie w mechanice ciał dyskretyzowanych

nie występują osobliwości, które w mechanice ośrodków ciągłych są związane z np. z występowaniem sił skupionych i które często komplikują problem. Z drugiej strony należy jednak pamiętać, że rozwiązania, których dostarcza mechanika ciał dyskretyzowanych, zależą od rodzaju dyskretyzacji i są różnymi przybliżeniami w opisie tego samego zagadnienia. Zauważmy także, że równania mechaniki ciał dyskretyzowanych, przy numerycznym rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień dotyczących statyki, drgań harmoniczných, rozchodzenie się pewnych fal etc., prowadzą od razu do równań algebraicznych znanej metody elementów skończonych, a więc dają się rozwiązywać na EMC. Tym samym mechanikę ciał dyskretyzowanych można w pewnym stopniu traktować jako fizyczną nadbudowę nad metodą elementów skończonych w zakresie mechaniki ciał odkształcalnych.

Na zakończenie zaznaczymy, że przedstawione w tej pracy ogólne równania mechaniki ciał dyskretyzowanych [równania ruchu (5.5) i równania konstytutywne (4.1)] stanowią tylko punkt wyjścia do analizy różnych problemów mechaniki ciał dyskretyzowanych (ciała sprężyste i plastyczne, teoria liniowa i teoria małych odkształceń, ciała izotropowe, zagadnienia stateczności, drgań etc.) oraz do rozwiązywania różnych zagadnień szczególnych. Możliwe jest także uogólnienie równań mechaniki ciał dyskretyzowanych celem objęcia nimi także zagadnień termodynamicznych. Wszystkie te problemy są tematem osobnych publikacji.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. KLEIBER, *Note on the discrete plastic bodies*, Arch. Mech. Stos. (w przygotowaniu).
2. W. KUFEL, *O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości ciał dyskretyzowanych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 11 (1973).
3. J. L. SYNGE, *Classical dynamics*, Handbuch der Physik, III/1, Springer Verlag, 1960.
4. C. TRUSDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, Springer Verlag 1965.
5. Cz. WOŹNIAK, *Basic concepts of the difference geometry*, Annales Polon. Math., 28 (1972).
6. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, 23 (1971).
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw Hill, 1967.

#### Р е з ю м е

#### ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ ТЕЛ

Темой работы является приближенное описание деформируемого тела, построенное в рамках предположений теории сплошной среды, но с использованием системы с конечным или счетным числом степеней свободы. Такая система названа дискретизированным телом.

Исходя из общей схемы дискретизации сплошной среды вводится понятие дискретизированного тела, а затем выводятся для этого тела уравнения движения и определяющие соотношения. Особым свойством этих уравнений следует считать их простоту и одновременно весьма общую форму, а также формальное сходство с соответствующими уравнениями механики сплошных сред.

Рассмотрены пределы практической применимости уравнений механики дискретизированных тел.

## S u m m a r y

## BASIC CONCEPTS OF THE MECHANICS OF DISCRETIZED BODIES

The paper deals with an approximate description of the deformable body within the known assumptions of the continuous media theory and using the additional assertion that the body under consideration has only finite or countable number of degrees of freedom. Such body is said to be a discretized body. Starting from the general scheme of discretization of continuous media we arrive at the concept of discretized body and then we obtain the equations of motion and the constitutive equations of such a body. The characteristic feature of the equations obtained is their simple and general form and their formal resemblance to the known equations of the continuous media theory. At the end of the paper the problem of applications of the mechanics of discretized bodies is also widely discussed.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
WYDZIAŁ MATEMATYKI I MECHANIKI

*Praca została złożona w redakcji dnia 26 kwietnia 1972 r.*

---