MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

O LINIOWYCH ZAGADNIENIACH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

WIESŁAW KUFEL (WARSZAWA)

Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych sformułowano w [1]. W niniejszej pracy definiuje się jednobiegunowe ciała sprężyste jako szczególny przypadek ciał dyskretyzowanych. Przyjmując za punkt wyjścia podstawowy układ równań opisujący ruch ciał dyskretyzowanych, wyprowadza się równania ruchu oraz równania konstytutywne liniowej teorii sprężystych jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych. Na gruncie tej teorii formułuje się prawa zachowania, zasadę prac wirtualnych, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań oraz twierdzenie o wzajemności Bettiego. W pracy podano także prosty przykład jednobiegunowego ciała dyskretyzowanego.

1. Sprężyste jednobiegunowe ciała dyskretyzowane. Przypadek ogólny

Ciało dyskretyzowane $(D, \mathscr{E})$ zdefiniowane w [1] nazwiemy jednobiegunowym ciałem dyskretyzowanym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D będzie przeliczalnym zbiorem punktów materialnych $d \in D$. Ruch takiego punktu opisuje wektor wodzący, który w ortogonalnym układzie kartezjańskim przestrzeni fizycznej ma współrzędne $z^k = \psi^k(d, \tau)$. Tym samym funkcje $q^a(d, \tau)$ określone w punkcie 1 pracy [1] będą miały postać $q^a(d, \tau) = \delta^a_k \psi^k(d, \tau)$, $a = 1, 2, 3$, a wymiar przestrzeni wektorowej V^n będzie $n = 3$. Wprowadzając w każdym elemencie dyskretnym $E \in \mathscr{E}$ układ współrzędnych [1] $f_E : E \to (d, f_A d)$, $A = I, II, \ldots, m$,[1] możemy opisać ruch takiego elementu funkcjami $\psi^k(d, \tau)$ $\Delta_A \psi^k(d, \tau)$. W dalszym ciągu założymy, że jednobiegunowe ciało dyskretyzowane jest dyskretyzowanym ciałem sprężystym. Oznacza to, zgodnie z definicją podaną w [1], p. 4, że dla każdego elementu dyskretnego $E \in \mathscr{E}$ istnieje funkcja energii sprężystej $\varepsilon[d, \psi^k(d, \tau), \Delta_A \psi^k(d, \tau)]$. Wykorzystując niezmienniczość funkcji ε względem przesunięć w czasoprzestrzeni możemy pominąć zależność $\varepsilon(d, \psi^k, \Delta_A \psi^k)$ od ψ^k przyjmując $\varepsilon = \varepsilon(d, \Delta_A \psi^k)$.

W związku z tym równania konstytutywne (wzór (4.8) w pracy [1]) sprowadza się do postaci

$$T^A_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Delta_A \psi^k}, \tag{1.1}$$

natomiast z równań ruchu (4.5) otrzymamy

$$\bar{\Delta}_A T^A_k + f_k = m\ddot{u}_k, \tag{1.2}$$

---

1) Wskaźniki $A, \Phi, \ldots$ przebiegają ciąg $I, II, \ldots, m$, a wskaźniki $k, l, \ldots$ ciąg $1, 2, 3$. Obowiązuje konwencja sumacyjna.

gdzie $m = m(d)$ jest masą punktu, a $f_k = f_k(d, \tau)$ są siłami zewnętrznymi działającymi na ten punkt. Postać równań ruchu (1.2) oraz równań konstytutywnych (1.1) wykazuje dużą analogię do odpowiednich równań ruchu ośrodka sprężystego w klasycznej teorii sprężystości. W szczególnym przypadku, gdy spełnione są warunki podane na końcu p.2 [1], jednobiegunowe ciało dyskretyzowane posiada wnętrze $D_0 \subset D$ oraz brzeg $\partial D = D/D_0$. Równania ruchu (1.2) dotyczą wtedy każdego $d \in D_0$. Równania te dla $d \in \partial D$ trzeba zastąpić odpowiednimi warunkami brzegowymi (5.6) [1], które przyjmą postać

$$\sum_{\Lambda \in R_d} T_k^{\Lambda}(d, \tau) - \sum_{\Lambda \in L_d} T_k^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d, \tau) + f_k(d, \tau) = m(d)\ddot{\psi}_k(d, \tau), \tag{1.3}$$

gdzie R_d i L_d są odpowiednimi podciągami ciągu $I, II, \ldots, m$. Zauważmy, że dla wielkości $T_k^{\Lambda}(d, \tau)$, $T_k^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d, \tau)$ zachodzi wzór

$$-\sum_{\partial D}\Big[\sum_{\Lambda \in R_d} T_k^{\Lambda}(d, \tau) - \sum_{\Lambda \in L_d} T_k^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d, \tau)\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d, \tau)N_{\Lambda}, \tag{1.4}$$

gdzie $d \in \Delta D_0 \Leftrightarrow [(d \in D_0) \wedge (\bigvee_{\Lambda} f_{-\Lambda}d \sim \in D_0)] \vee [(d \sim \in D_0) \wedge (\bigvee_{\Lambda} f_{-\Lambda}d \in D_0)]$

oraz

$$N_{\Lambda} = N_{\Lambda}(d) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 1 \text{ dla } (d \sim \in D_0) \wedge (\bigvee_{\Lambda} f_{-\Lambda}d \in D_0), \\ -1 \text{ dla } (d \in D_0) \wedge (\bigvee_{\Lambda} f_{-\Lambda}d \sim \in D_0), \\ 0 \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Warunek (1.3) po wykorzystaniu (1.4) można zapisać w postaci

$$\sum_{\partial D}(f_k - m\ddot{\psi}_k) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}, \tag{1.6}$$

gdzie $T_k^{(N)} = T_k^{(N)}(d, \tau) \overset{\mathrm{df}}{=} T_k^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d, \tau)N_{\Lambda}$.

2. Równania liniowe

Niech dla pewnej chwili τ_0 istnieje stan naturalny dyskretyzowanego jednobiegunowego ciała sprężystego, tj. stan, w którym $\varepsilon = 0$ i $T_k^{\Lambda} = 0$. Oznaczając $l_k = \psi_k(d, \tau_0)$, a składowe wektora przemieszczenia $u_k = \psi_k - l_k$ oraz wykorzystując niezmienniczość funkcji energii sprężystej ε względem obrotów układu współrzędnych możemy przyjąć

$$\varepsilon = \frac{1}{2}A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Lambda\Phi}\gamma_{\Gamma\Delta}, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\gamma_{\Lambda\Phi} = \Delta_{(\Lambda}u^k l_{\Phi)k} \tag{2.2}$$

oraz $l_{\Phi k} \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta_{\Phi} l_k$. Uwzględniając (2.1) wykażemy, że wzór (2.2) dotyczy przypadków, w których ruchy sztywne dyskretnego elementu E są jedynymi ruchami nie wywołującymi sił wewnętrznych, tym samym $T_k^{\Lambda} = 0$ wtedy, gdy $\gamma_{\Lambda\Phi} = 0$. Istotnie, niech wektor $\mathbf{l}_{\Lambda}$, $\Lambda =$

$= I, II, \ldots, m$, łączy w przestrzeni fizycznej w chwili τ_0 cząstki $d, f_\Lambda d$, a wektory $\mathbf{u}(d, \tau)$ i $\mathbf{u}(f_\Lambda d, \tau)$ będą przemieszczeniami tych cząstek w chwili τ. Przemieszczenia $\mathbf{u}(d, \tau)$, $\mathbf{u}(f_\Lambda d, \tau)$ opisują ruch sztywny d i $f_\Lambda d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbf{l}_\Lambda| = |\mathbf{l}_\Lambda + \Delta_\Lambda \mathbf{u}|$. Odrzucając człony nieliniowe względem $\mathbf{u}$ ostatnia równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_\Lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{l}_\Lambda = 0$. Rozpatrzmy następnie przypadek trzech cząstek $d, f_\Lambda d, f_\Phi d$, $\Lambda \neq \Phi$ połączonych w chwili τ_0 wektorami $\mathbf{l}_\Lambda, \mathbf{l}_\Phi$. Wektory $\mathbf{l}_\Lambda$ i $\mathbf{l}_\Phi$ tworzą kąt opisany iloczynem skalarnym $\mathbf{l}_\Lambda \cdot \mathbf{l}_\Phi$. Kąt ten nie ulegnie zmianie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{l}_\Lambda \cdot \mathbf{l}_\Phi = (\mathbf{l}_\Lambda + \Delta_\Lambda \mathbf{u})(\mathbf{l}_\Phi + \Delta_\Phi \mathbf{u})$, tj. gdy $\Delta_{(\Lambda} \mathbf{u} \mathbf{l}_{\Phi)} = 0$, gdzie także pominięto człony nieliniowe względem $\mathbf{u}$. Wobec (2.1) widzimy więc, że $T_k^\Lambda = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_{\Lambda\Phi} = 0$, tj. gdy ciało dyskretyzowane dozna ruchu sztywnego. W przypadku funkcji energii sprężystej (2.1) równania konstytutywne (1.2) przyjmą postać $T_k^\Lambda = p^{\Lambda\Phi} l_{\Phi k}$, gdzie

$$p^{\Lambda\Phi} = A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} \gamma_{\Gamma\Delta}. \tag{2.3}$$

Wielkość $p^{\Lambda\Phi}$ nazywamy składowymi napięcia (4.11), [1]. Podstawiając związki geometryczne (2.2) do (2.3) oraz wykorzystując równania ruchu (1.2) otrzymamy

$$\bar{\Delta}_\Lambda (a_{kl}^{\Lambda\Phi} \Delta_\Phi u^l) + f_k = m\ddot{u}, \tag{2.4}$$

gdzie $a_{kl}^{\Lambda\Phi} = A^{\Lambda\Gamma\Phi\Delta} l_{\Gamma k} l_{\Delta l}$. Równania (2.4) stanowią przemieszczeniową postać równań ruchu liniowej teorii sprężystości jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych. W szczególnym przypadku, gdy $\bar{\Delta}_\Lambda a_{kl}^{\Lambda\Phi} \approx 0$ z równań (2.4) otrzymamy

$$a_{kl}^{\Lambda\Phi} \bar{\Delta}_\Lambda \Delta_\Phi u^l + f_k = m\ddot{u}_k.$$

Rozpatrując ciała dyskretyzowane, dla których określony jest brzeg ∂D podstawowy układ równań (2.2)–(2.4) opisujący liniowe problemy teorii sprężystych ciał jednobiegunowych uzupełnić trzeba warunkami brzegowymi (1.6) w postaci

$$\sum_{\partial D} (f_k - m\ddot{u}_k) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}. \tag{2.5}$$

Na zakończenie tego punktu rozpatrzmy przypadek, gdy struktura różnicowa ciała dyskretyzowanego $(D, \mathscr{E})$ jest regularna, tj. $f_\Lambda f_\Phi d = f_\Phi f_\Lambda d$ dla każdego $d \in D_{\Lambda,\Phi} \cap D_{\Phi,\Lambda}$; [2], wtedy dla dowolnej funkcji $\varphi\colon D \to R$ zachodzi związek $\Delta_{[\Lambda} \Delta_{\Phi]} \varphi = 0$. W przypadku, gdy $l_{\Lambda\Phi k} \approx 0$, gdzie $l_{\Lambda\Phi k} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Delta_\Lambda l_{\Phi k}$ łatwo sprawdzić, że prawdziwa jest równość

$$\Delta_{[\Lambda} \Delta_{[\Phi} \gamma_{\Gamma]\Delta]} = 0. \tag{2.6}$$

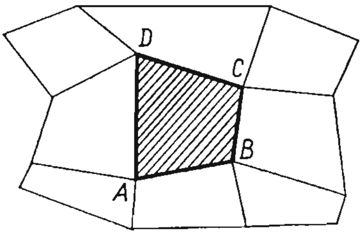
Związki (2.6) są równaniami nierozdzielności w liniowej teorii jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych.

3. Przykład

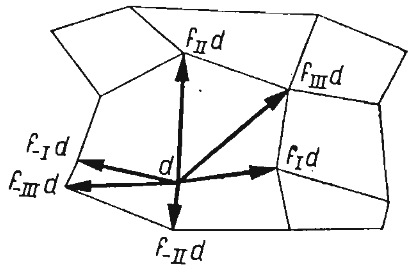
W celu zilustrowania opisanych w punkcie 2 pojęć liniowej teorii sprężystości jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych rozpatrzmy niejednorodną tarczę złożoną z czworokątnych elementów sprężystych $ABCD$ (rys. 1).

Dyskretyzację tarczy przeprowadzimy przyporządkowując jednorodnemu elementowi sprężystemu $ABCD$ punkt materialny d, natomiast elementom sąsiednim do $ABCD$ punkty $f_\Lambda d$, gdzie $\Lambda = I, II, III$ (rys. 2).

Przyjmiemy więc, że w strukturze różnicowej tego zbioru $m = 3$. Załóżmy dalej, że jedynymi zmiennymi dynamicznymi opisującymi ruch punktów materialnych d i $f_\Lambda d$ są wektory przemieszczenia $u^K(d, \tau)$, $u^K(f_\Lambda d, \tau)$, $K = 1, 2$, tym samym przyjmiemy, że ruch elementu $ABCD$ jest określony całkowicie przez przemieszczenia jego wierzchołków. Masa punktu d równa będzie masie elementu $ABCD$.



Rys. 1



Rys. 2

W celu określenia funkcji energii sprężystej ε zastosujemy podejście podobne jak w metodzie elementów skończonych. Dzieląc czworokątny element sprężysty $ABCD$ na dwa trójkątne elementy skończone ABC i ACD wyliczymy najpierw energię dla elementu ABC. Przyjmiemy, że wektor przemieszczenia $\mathbf{w}$ dowolnej cząstki elementu skończonego o współrzędnych Lagrange'a x^1, x^2, aproksymuje się funkcją liniową

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad w^K(d, x^1, x^2, \tau) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\Delta}\{&(a+bx^1+cx^2)u^K(d, \tau)+\\
&+(a_I+b_Ix^1+c_Ix^2)u^K(f_Id, \tau)+(a_{III}+b_{III}x^1+c_{III}x^2)u^K(f_{III}d, \tau)\},
\end{aligned}
$$

gdzie
$$
\begin{aligned}
a &= (l^1+l_I^1)(l^2+l_{III}^2)-(l^1+l_{III}^1)(l^2+l_I^2),\\
b &= l_I^2-l_{III}^2,\\
c &= l_{III}^1-l_I^1,\\
a_I &= l^2(l^1+l_{III}^1)-l^1(l^2+l_{III}^2),\\
b_I &= l_{III}^2,\\
c_I &= -l_{III}^1,\\
a_{III} &= l^1(l^2+l_I^2)+l^2(l^1+l_I^1),\\
b_{III} &= -l_I^2,\\
c_{III} &= l_I^1
\end{aligned}
$$

oraz gdzie
$$
2\Delta = \det\begin{bmatrix} 1 & l^1 & l^2 \\ 1 & l^1+l_I^1 & l^2+l_I^2 \\ 1 & l^1+l_{III}^1 & l^2+l_{III}^2 \end{bmatrix}.
$$

Wektor $w(d, x^K, \tau)$ dla $x^K = l^K$, $x^K = l^K + l_I^K$, $x^K = l^K + l_{III}^K$, przyjmuje odpowiednio wartości $u^K(d, \tau)$, $u^K(f_I d, \tau)$, $u^K(f_{III} d, \tau)$. Składowe odkształcenia $\gamma_{KL} = w_{(K,L)}$ w dowolnej cząstce elementu skończonego ABC o współrzędnych Lagrange'a x^1, x^2 mają postać

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_I u^1 l_{III}^2 - \Delta_{III} u^1 l_I^2),\\
\gamma_{22} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_{III} u^2 l_I^1 - \Delta_I u^2 l_{III}^1),\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_{III} u^1 l_I^1 - \Delta_{III} u^2 l_I^2 + \Delta_I u^2 l_{III}^2 - \Delta_I u^1 l_{III}^1).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Energia elementu skończonego ABC, po scałkowaniu po obszarze trójkąta wynosi

$$
\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta[(\lambda+2\mu)\gamma_{11}\gamma_{11} + 2\lambda\gamma_{11}\gamma_{22} + 4\mu\gamma_{12}\gamma_{12} + (\lambda+2\mu)\gamma_{22}\gamma_{22}],
\tag{3.3}
$$

gdzie Δ jest polem ABC. Podstawiając do (3.3) związki (3.2) otrzymuje się występującą w (2.4) macierz $a_{KL}^{\Lambda\Phi}$, gdzie Λ, $\Phi = I, III$; $K, L = 1, 2$, o składowych:

$$
\begin{aligned}
a_{1\,1}^{I\,I} &= \frac{\mu(l_{III}^1)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_{III}^2)^2}{4\Delta},\\
a_{2\,2}^{I\,I} &= \frac{\mu(l_{III}^2)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_{III}^1)^2}{4\Delta},\\
a_{1\,2}^{I\,I} &= -l_{III}^1 l_{III}^2\left(\frac{\lambda}{4\Delta} + \frac{\mu}{4\Delta}\right),\\
a_{2\,1}^{I\,I} &= a_{1\,2}^{I\,I},\\
a_{1\,1}^{I\,III} &= -\left(\frac{\mu l_I^1 l_{III}^1}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu) l_{III}^2 l_I^2}{4\Delta}\right),\\
a_{2\,2}^{I\,III} &= -\left(\frac{\mu l_I^2 l_{III}^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu) l_I^1 l_{III}^1}{4\Delta}\right),\\
a_{1\,2}^{I\,III} &= \frac{\lambda l_{III}^2 l_I^1}{2\Delta} + \frac{\mu l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta},\\
a_{2\,1}^{I\,III} &= \frac{2\mu l_I^1 l_{III}^2}{2\Delta} + \frac{\lambda l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta},\\
a_{1\,1}^{III\,III} &= \frac{\mu(l_I^1)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_I^2)^2}{4\Delta},\\
a_{2\,2}^{III\,III} &= \frac{\mu(l_I^2)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_I^1)^2}{4\Delta},\\
a_{1\,2}^{III\,III} &= -l_I^1 l_I^2\left(\frac{\lambda}{4\Delta} + \frac{\mu}{4\Delta}\right),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

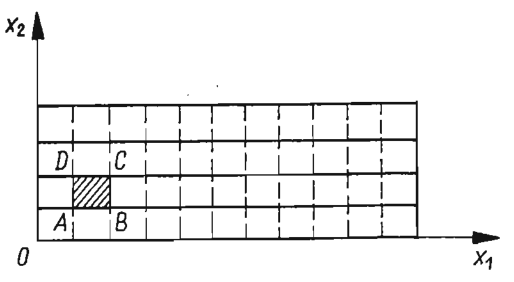
(3.4) [c.d.]

$$a_{2\ 1}^{III\,III} = a_{1\ 2}^{III\,III},$$
$$a_{1\ 1}^{III\,I} = a_{1\ 1}^{I\,III},$$
$$a_{2\ 2}^{III\,I} = a_{2\ 2}^{I\,III},$$
$$a_{1\ 2}^{III\,I} = \frac{\lambda l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta} + \frac{\mu l_I^1 l_{III}^2}{2\Delta},$$
$$a_{2\ 1}^{III\,I} = a_{2\ 1}^{I\,III}.$$

Aby otrzymać dla trójkąta ACD odpowiednią macierz $a_{KL}^{\Lambda\Phi}$, $\Lambda, \Phi = III, II$; $K, L = 1, 2$, wystarczy w (3.4) zmienić wskaźniki I na III i III na II oraz Δ na Δ^*m, gdzie Δ^* jest polem trójkąta ACD. W szczególnym przypadku, gdy czworokątnymi elementami sprężystymi są kwadraty o boku a, równoległym do jednej z osi układu współrzędnym, mamy $l_I^1 = a$, $l_I^2 = 0$, $l_{II}^1 = 0$, $l_{II}^2 = a$, $l_{III}^1 = a$, $l_{III}^2 = a$ oraz $\Delta = \Delta^*$. W tym przypadku wzory (3.4) zapiszą się w postaci:

(3.5)

$$a_{1\ 1}^{I\ I} = a_{2\ 2}^{I\ I} = a_{1\ 1}^{II\,II} = a_{2\ 2}^{II\,II} = a_{1\ 1}^{III\,III} = a_{2\ 2}^{III\,III} = \frac{3}{2}\mu + \frac{\lambda}{2},$$
$$a_{1\ 2}^{I\ I} = a_{2\ 1}^{I\ I} = a_{1\ 2}^{II\,II} = a_{2\ 1}^{II\,II} = -\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{\lambda}{2}\right),$$
$$a_{1\ 1}^{III\,III} = a_{2\ 1}^{III\,III} = 0,$$
$$a_{2\ 2}^{I\,III} = a_{2\ 2}^{III\,I} = a_{1\ 1}^{III\,II} = a_{1\ 1}^{II\,III} = -\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right),$$
$$a_{1\ 2}^{I\,III} = a_{1\ 2}^{III\,I} = a_{2\ 1}^{II\,III} = a_{2\ 1}^{III\,II} = \frac{\lambda}{2},$$
$$a_{2\ 1}^{I\,III} = a_{2\ 1}^{III\,II} = a_{1\ 2}^{II\,III} = a_{1\ 2}^{III\,II} = \frac{\mu}{2},$$
$$a_{2\ 2}^{III\,II} = a_{2\ 2}^{II\,III} = a_{1\ 1}^{I\,III} = a_{1\ 1}^{III\,I} = -\frac{1}{2}\mu,$$
$$a_{K\ L}^{I\ II} = a_{K\ L}^{II\ I} = 0.$$



Rys. 3

W celu wypisania równań ruchu (2.4) rozpatrzmy skończoną tarczę wielowarstwową. Obierając układ współrzędnych tak, aby jedna z osi była równoległa do warstw tarczy, dzielimy tarczę na elementy $ABCD$ pękiem prostych prostopadłych do warstw (rys. 3) w ten sposób, by czworokąt $ABCD$ był kwadratem o boku 1.

Przyjmując, że warstwy są jednorodne mamy $\Delta_I \mu = 0$ i $\Delta_I \lambda = 0$. Wykorzystując wzory (3.5) otrzymamy z (2.4) następujące równania równowagi:

$$
\begin{aligned}
&(3\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^1 - \mu\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^1 + \bar{\Delta}_{II}[(3\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1 - (2\mu+\lambda)\Delta_{III} u^1] + \\
&\quad + \bar{\Delta}_{III}[-\mu\Delta_I u^1 - (\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1 + (3\mu+\lambda)\Delta_{III} u^1] - (2\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^2 + \\
&\quad + 2\lambda\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^2 - \bar{\Delta}_{II}[(\mu+\lambda)\Delta_{II} u^2] + \bar{\Delta}\lambda_{III}\Delta_{II} u^2 + \bar{\Delta}_{II}(\mu\Delta_{III} u^2) + \bar{\Delta}_{III}(\mu\Delta_I u^2) = 0, \\
&-(\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^1 + \mu\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^1 - \bar{\Delta}_{II}[(\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1] + \mu\bar{\Delta}_{III}\Delta_{II} u^1 + \\
&\quad + (3\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^2 - (\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^2 + \bar{\Delta}_{II}[(3\mu+\lambda)\Delta_{II} u^2 - \mu\Delta_{III} u^2] - \\
&\quad - \bar{\Delta}_{III}[(\mu+\lambda)\Delta_I u^2 + \mu\Delta_{II} u^2 - (3\mu+\lambda)\Delta_{III} u^2] + \bar{\Delta}_{III}(\lambda\Delta_I u^1) + \bar{\Delta}_{II}(\lambda\Delta_{III} u^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Zbadajmy, kiedy układ równań (3.6) dopuszcza rozwiązanie postaci

$$
\begin{aligned}
u^1 &= ax+by, \\
u^2 &= cx+dy.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Podstawiając (3.7) do (3.6) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
(b+c)\bar{\Delta}_{II}\mu &= 0, \\
-3c\bar{\Delta}_{II}\mu + a\bar{\Delta}_{II}\lambda &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Związki (3.8) stanowią układ równań jednorodnych na $\bar{\Delta}_{II}\mu$ i $\bar{\Delta}_{II}\lambda$. Układ ten będzie miał rozwiązania $\bar{\Delta}_{II}\mu \neq 0$, $\bar{\Delta}_{II}\lambda \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyznacznik będzie równy zeru, czyli

$$a(b+c) = 0. \tag{3.9}$$

Równanie (3.9) spełnione jest tylko przez $b = -c$ i $a = 0$. Widać stąd, że tylko te spośród przemieszczeń (3.7) spełniają układ równań (3.6), dla których $b = -c$ lub $a = 0$.

4. Sformułowanie wariacyjne — prawa zachowania

Określmy w D_0 funkcjonał działania następującej postaci:

$$W(D_0) = \sum_{D_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{1}{2} m\dot{u}^k \dot{u}_k - \varepsilon\right) d\tau. \tag{4.1}$$

Niech $\delta_0 W$ będzie wariacją funkcjonału działania spowodowaną wariacją postaci $\delta_0 \psi^k$, a $\delta_\tau W$ wariacją spowodowaną wariacją czasu $\delta\tau$. Nasuwając operator δ_0 na (4.1) otrzymamy

$$\delta_0 W(D_0) = \sum_{D_0} \left\{ [m\dot{u}^k \delta_0 \psi_k]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\ddot{u}^k \delta_0 \psi_k - \delta_0 \varepsilon) d\tau \right\}.$$

Wyliczając $\delta_0 \varepsilon$ otrzymamy

$$\sum_{D_0} \delta_0 \varepsilon = \sum_{D_0} A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} \gamma_{\Lambda\Phi} \delta_0 \gamma_{\Gamma\Delta} = \sum_{D_0} T_k^\Lambda \Delta_\Lambda \delta_0 \psi^k = \sum_{D_0} [\Delta_\Lambda (\bar{T}_k^\Lambda \delta_0 \psi^k) - \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda \delta_0 \psi^k],$$

gdyż łatwo wykazać, że

$$
\begin{aligned}
&\Delta_\Lambda(\bar{\varphi}^\Lambda\xi) = \varphi^\Lambda\Delta_\Lambda\xi+\xi\Delta_\Lambda\bar{\varphi}^\Lambda, \\
&\Delta_\Lambda\bar{\varphi}^\Lambda = \bar{\Delta}_\Lambda\varphi^\Lambda,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

dla dowolnych φ^Λ i $\xi\colon D \to R$ oraz $\varphi^{-\Lambda} = \varphi^\Lambda(f_{-\Lambda}d)$. Wyliczając z kolei $\delta_\tau W(D_0)$ mamy

$$
\delta_\tau W(D_0) = \sum_{D_0}\left[\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\right]_{\tau_0}^{\tau_1}.
$$

Całkowita wariacja funkcjonału (4.1) przyjmuje postać

$$
\delta W(D_0) = \sum_{D_0}\Bigg\{\int_{\tau_0}^{\tau_1}(\bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda-m\ddot{u}_k)\delta_0\psi^k d\tau+\Bigg[m\dot{u}^k\delta_0\psi_k+
$$

$$
+\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\Bigg]_{\tau_0}^{\tau_1}-\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta_\Lambda(\bar{T}_k^\Lambda\delta_0\psi^k)d\tau\Bigg\}.
$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych funkcji φ^Λ i $\xi\colon D \to R$ jest

$$
\sum_{D_0}\Delta_\Lambda(\varphi^\Lambda\xi) = \sum_{\Delta D_0}\bar{\varphi}^\Lambda N_\Lambda\xi. \tag{4.3}
$$

Wykorzystując ten związek i oznaczając

$$
\bar{T}_k^\Lambda N_\Lambda \overset{\mathrm{df}}{=} T_k^{(N)}
$$

mamy

$$
\sum_{D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta_\Lambda(\bar{T}_k^\Lambda\delta_0\psi^k)d\tau = \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}T_k^{(N)}\delta_0\psi^k d\tau.
$$

Ostatecznie więc wariacja funkcjonału (4.1) ma postać

$$
\delta W(D_0) = \sum_{D_0}\Bigg\{\int_{\tau_0}^{\tau_1}(\bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda-m\ddot{u}_k)\,\delta_0\psi^k d\tau+\Bigg[m\dot{u}^k\delta_0\psi_k+ \tag{4.4}
$$

$$
+\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\Bigg]_{\tau_0}^{\tau_1}\Bigg\}-\sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}T_k^{(N)}\delta_0\psi^k d\tau.
$$

Korzystając z zasady stacjonarności działania [3] otrzymujemy po wprowadzeniu sił $f_k = f_k(d, \tau)$ równania ruchu

$$
\bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda+f_k = m\ddot{u}_k. \tag{4.5}
$$

Wykorzystując równania ruchu (4.5) oraz uwzględniając niezmienniczość funkcjonału działania względem infinitezymalnej grupy przesunięć i obrotów w czasoprzestrzeni

$$
\begin{aligned}
&\delta_0\psi^k = \varepsilon^k+\varepsilon^{kl}\psi_l-\delta\dot{\psi}^k, \\
&\delta\tau = 0, \qquad \varepsilon^{kl} = -\varepsilon^{lk},
\end{aligned}
$$

mamy

$$\delta W(D_0) = \Big\{\sum_{D_0}\Big([m\dot{u}_k]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_k d\tau\Big) - \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_k^{(N)} d\tau\Big\}\varepsilon^k + \tag{4.6}$$
$$+\Big\{\sum_{D_0}\Big([m\dot{u}_{[k}\psi_{l]}]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_{[k}\psi_{l]} d\tau\Big) - \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_{[k}^{(N)}\psi_{l]} d\tau\Big\}\varepsilon^{kl} +$$
$$+\Big\{\sum_{D_0}\Big(\Big[\frac{1}{2}m\dot{u}_k\dot{u}^k - m\dot{u}^k\dot{\psi}_k - \varepsilon\Big]_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_k\dot{\psi}^k d\tau\Big) + \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_k^{(N)}\dot{\psi}^k d\tau\Big\}\sigma.$$

Uwzględniając dalej dowolność stałych ε^k, ε^{kl}, σ i zastępując $\dot{\psi}^k$ przez $\dot{u}^k$ otrzymujemy z (4.6) następujące prawa zachowania

$$\frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0} m\dot{u}_k\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} + \sum_{D_0} f_k,$$
$$\frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0} m\dot{u}_{[k}\psi_{l]}\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_{[k}^{(N)}\psi_{l]} + \sum_{D_0} f_{[k}\psi_{l]}, \tag{4.7}$$
$$\frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0}\Big(\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k + \varepsilon\Big)\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}\dot{u}^k + \sum_{D_0} f_k\dot{u}^k.$$

Są to odpowiednio prawa zachowania pędu, momentu pędu i energii. Wykorzystując związek (4.3) i (4.2) prawa zachowania możemy zapisać w postaci

$$\sum_{D_0}(\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k - m\ddot{u}_k) = 0,$$
$$\sum_{D_0}[(\bar{\Delta}_A T_{[k}^A + f_{k]} - m\ddot{u}_{[k})\psi_{l]} + T_{[k}^A \Delta_A\psi_{l]}] = 0, \tag{4.8}$$
$$\sum_{D_0}[(\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k - m\ddot{u}_k)\dot{u}^k - \dot{\varepsilon} + T_k^A\Delta_A\dot{u}^k] = 0.$$

Związki (4.8) są prawdziwe, gdy zbiór D_0 zastąpimy jego dowolnym podzbiorem K z brzegiem ∂K. Ze związków (4.8) otrzymujemy wtedy następującą lokalną postać praw zachowania

$$\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k = m\ddot{u}_k,$$
$$T_{[k}^A\Delta_A\psi_{l]} = 0, \tag{4.9}$$
$$\dot{\varepsilon} = T_k^A\Delta_A\dot{u}^k.$$

Prawa zachowania (4.7) i (4.9) wykazują analogię do odpowiednich związków z klasycznej teorii sprężystości.

5. Zasada prac wirtualnych

Niech $\delta_0 u^k$ będą wariacjami postaci funkcji u^k. Wariacje $\delta_0 u^k$ powodują zmianę $\delta_0 \varepsilon$ postaci energii wewnętrznej. W celu otrzymania zasady prac wirtualnych zauważmy, że

$$\delta_0 \varepsilon = p^{\Lambda\Phi}\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi} = T_k^{\Lambda}\delta_0 \Delta_{\Lambda} u^k = \bar{\Delta}_{\Lambda}(T_k^{\Lambda}\delta_0 u^k) - \bar{\Delta}_{\Lambda} T_k^{\Lambda}\delta_0 u^k, \tag{5.1}$$

gdzie wykorzystano wzór (4.2). Oznaczając $\sum\limits_{D_0} \varepsilon = E(D_0)$ oraz stosując równania ruchu i wykorzystując związek (4.3), z równości (5.1) otrzymujemy

$$\delta_0 E(D_0) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}\delta_0 u^k + \sum_{D_0} (f_k - m\ddot{u}_k)\delta_0 u^k. \tag{5.2}$$

Prawa strona równości (5.2) jest pracą sił $f_k - m\ddot{u}_k$ oraz sił $T_k^{(N)}$ na wirtualnych przemieszczeniach $\delta_0 u^k$. Natomiast wielkość $\delta_0 E(D_0) = \sum\limits_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi}$ przedstawia pracę wirtualną sił wewnętrznych, tj. pracę składowych napięcia $p^{\Lambda\Phi}$ na wariacjach składowych odkształcenia $\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi}$. Równanie (5.2) stanowi treść zasady prac wirtualnych. Ma ona analogiczną treść jak odpowiednia zasada w klasycznej teorii sprężystości.

6. Twierdzenie o jednoznaczności

Wykażemy, że równania (2.4) rozpatrywane w przypadku quasi-statycznym, jeśli mają rozwiązanie, to rozwiązanie to jest jednoznaczne, tj. dwa rozwiązania tego samego problemu brzegowego różnią się tylko o dowolne ruchy sztywne. Dla dowodu załóżmy, że rozwiązanie nie jest jednoznaczne, tj. że istnieją dwa różne od siebie pola przemieszczeń $\overset{*}{u}{}^k$ i $\tilde{u}^k$, które spełniają równanie (2.4) oraz warunki (2.5). Niech więc przemieszczenia $\overset{*}{u}{}^k$ spełniają związki:

$$\bar{\Delta}_{\Lambda}(a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_{\Phi}\overset{*}{u}{}^l) + f_k = 0, \tag{6.1}$$

$$\sum_{\partial D} f_k = \sum_{\Delta D_0} \overset{*}{T}{}_k^{(N)}, \tag{6.2}$$

a pole przemieszczeń $\tilde{u}^k$ spełnia ten sam układ równań

$$\bar{\Delta}_{\Lambda}(a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_{\Phi}\tilde{u}^l) + f_k = 0, \tag{6.3}$$

$$\sum_{\partial D} f_k = \sum_{\Delta D_0} \tilde{T}_k^{(N)}. \tag{6.4}$$

Wprowadzając oznaczenia $u^k = \overset{*}{u}{}^k - \tilde{u}^k$, $T_k^{(N)} = \overset{*}{T}{}_k^{(N)} - \tilde{T}_k^{(N)}$ i odejmując stronami (6.1) i (6.3) oraz (6.2) i (6.4) stwierdzamy, że przemieszczenia u^k spełniają jednorodny układ równań przemieszczeniowych

$$\bar{\Delta}_{\Lambda}(a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_{\Phi} u^l) = 0, \tag{6.5}$$

$$\sum_{\partial\Delta D} T_k^{(N)} = 0. \tag{6.6}$$

Równania (6.5) odnoszą się do ciała dyskretyzowanego $(D, \mathscr{E})$, w którego wnętrzu brak sił f_k i na którego brzegu występują jednorodne warunki (6.6). Należy wykazać, że we wnętrzu ciała znikają odkształcenia $\gamma_{\Lambda\Phi}$ i napięcia $p^{\Lambda\Phi}$. Rozpatrzmy w tym celu pracę odkształcenia $\sum\limits_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum\limits_{D_0} T_k^\Lambda \Delta_\Lambda u^k$. Wykorzystując związki (4.2) oraz (4.3) otrzymujemy

$$\sum_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} u^k - \sum_{D_0} \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda u^k. \tag{6.7}$$

Wykorzystując następnie (6.5) i (6.6) z równości (6.7) mamy

$$\sum_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum_{D_0} A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Lambda\Phi}\gamma_{\Gamma\Delta} = 0.$$

Skoro $A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}$ tworzą funkcję dodatnio określoną, przeto powyższy związek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $d \in D_0$ $A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Lambda\Phi}\gamma_{\Gamma\Delta} = 0$. Po prawej stronie ostatniego związku występuje energia sprężysta elementu $E \in \mathscr{E}$. Jest ona równa zeru wtedy tylko wtedy, gdy $\gamma_{\Lambda\Phi} = 0$, a to oznacza, że wektory przemieszczenia $\mathbf{u}(d), \mathbf{u}(f_\Lambda d)$ są ruchami sztywnymi (por. 2). W takim razie na mocy oznaczenia $\mathbf{u} = \overset{*}{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}$ przemieszczenia $\overset{*}{\mathbf{u}}$ i $\tilde{\mathbf{u}}$ różnia się tylko o ruchy sztywne.

7. Twierdzenie o wzajemności. Wzory Somigliany

Rozważmy teraz dyskretyzowane ciało jednobiegunowe, które poddano działaniu dwu grup sił f_k i f_k^*. Przemieszczenia oraz składowe napięcia i odkształcenia indukowane przez te grupy oznaczymy odpowiednio $u^k, p^{\Lambda\Phi}, \gamma_{\Lambda\Phi}, \overset{*}{u}{}^k, \overset{*}{p}{}^{\Lambda\Phi}, \overset{*}{\gamma}_{\Lambda\Phi}$. Wykorzystując równania konstytutywne (2.3) mamy $p^{\Lambda\Phi}\overset{*}{\gamma}_{\Lambda\Phi} = \overset{*}{p}{}^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi}$. Podstawiając związki geometryczne (2.2) i wykorzystując (4.2) mamy:

$$\Delta_\Lambda(\bar{T}_k^\Lambda \overset{*}{u}{}^k) - \overset{*}{u}{}^k \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda = \Delta_\Lambda(\bar{T}_k^{*\Lambda} u^k) - u^k \bar{\Delta}_\Lambda T_k^{*\Lambda}. \tag{7.1}$$

Sumując następnie wielkości występujące w (7.1) po zbiorze D_0 oraz wykorzystując równania ruchu (4.5) w przypadku quasi-statycznym otrzymamy

$$\sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} \overset{*}{u}{}^k + \sum_{D_0} f_k \overset{*}{u}{}^k = \sum_{\Delta D_0} T_k^{*(N)} u^k + \sum_{D_0} f_k^* u^k. \tag{7.2}$$

Związek (7.2) stanosi treść zasady Bettiego. Wprowadzając siły $f_k^*(d_0) = \delta_{kl}$, gdzie l jest ustalone oraz oznaczając $\overset{*}{u}{}^k = u_{(l)}^k(d_0, d)$ mamy

$$u^l(d_0) = \sum_{D_0} f_k u^{(l)k} + \sum_{\Delta D_0} (T_k^{(N)} u^{(l)k} - T_k^{*(N)} u^k), \tag{7.3}$$

gdzie $T_k^{*(N)}(d_0, d)$ są spowodowane siłą $f_k^*(d_0)$. Wzory (7.3) są wzorami Somigliany w dyskretnej teorii ciał jednobiegunowych. Widzimy także i tutaj pełną analogię do klasycznej teorii sprężystości.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. Woźniak, *Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych*, Mech. Teor. i Stos., 1, **11** (1973).
2. Cz. Woźniak, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, **23** (1971), 801–816.
3. Cz. Woźniak, *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1969.

Р е з ю м е

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ ТЕЛ

В работе дано определение однополюсного упругого тела, являщегося частным случаем дискретизированного тела. Исходя из основной системы уравнений, описывающих движение дискретизированных тел, выведены уравнения движения и определяющие уравнения линейной теории упругости однополюсных дискретизированных тел. В рамках этой теории сформулированы принципы сохранения, принцип виртуальных перемещений, теорема единственности решений и теорема взаимности Бетти. Дается также простой пример однополюсного дискретизированного тела.

S u m m a r y

ON THE LINEAR PROBLEMS OF ELASTICITY OF DISCRETIZED BODIES

Monopolar elastic bodies are defined in the paper as a particular example of discretized bodies. Basing upon the fundamental system of equations describing the motion of discretized bodies, the paper presents the derivation of equations of motion and the constitutive relations of the linear theory of monopolar discretized media. On the basis of that theory are formulated the conservation laws, the virtual work principle, the theorem of uniqueness of solution and the Betti reciprocal theorem. A simple example of a monopolar discretized body is given.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1972 r.