

ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO TWORZENIA MACIERZY SZTYWNOŚCI  
W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH NA PRZYKŁADZIE ZGINANEJ PŁYTY

KRZYSZTOF DEMS, JANUSZ LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi w efekcie do rozwiązania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych. Ilość tych niewiadomych zależy od liczby węzłów wprowadzonych w ciele oraz od ilości stopni swobody wprowadzonych w każdym węźle i jest ona równa iloczynowi liczby węzłów i ilości stopni swobody w węźle. Przyjęta ilość stopni swobody w węźle decyduje o własnościach wprowadzonej funkcji przemieszczeń wewnątrz elementu, a przede wszystkim na krawędziach elementów stykających się.

W zagadnieniu zginania płyty przyjęcie w węźle elementu krzywoliniowego trzech stopni swobody zapewnia jedynie ciągłość ugięć na granicy elementów [4]. Wprowadzając natomiast cztery lub więcej stopni swobody w węźle można uzyskać ciągłość funkcji ugięcia wraz z jej pochodnymi nie tylko w obszarze jednego elementu, ale w obszarze całej płyty. Odbywa się to jednak kosztem znacznego zwiększenia liczby niewiadomych w rozwiązywanym układzie równań [2].

W pracy podjęto próbę zachowania ciągłości funkcji ugięcia i jej pochodnych przy równoczesnym zmniejszeniu ilości stopni swobody każdego węzła. Jako stopnie swobody węzła przyjęto jedynie jego ugięcie, a odpowiednie pochodne tego ugięcia zastąpiono ilorazami różnicowymi. Prowadzi to w efekcie do układu równań, w którym liczba niewiadomych równa jest liczbie węzłów. Metodę opartą na takich założeniach przedstawiono na przykładzie wyznaczania macierzy sztywności krzywoliniowego elementu cienkiej, izotropowej zginanej płyty.

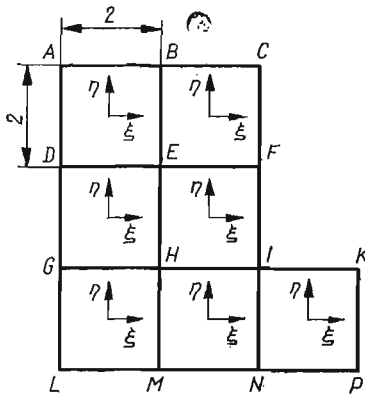
2. Funkcje jednostkowe w elemencie

Rozpatrzmy obszar składający się z kwadratowych elementów o wymiarze boków  $2 \times 2$ , leżących w jednej płaszczyźnie (rys. 1). Z każdym elementem związany jest lokalny układ współrzędnych  $\xi, \eta$  o początku leżącym w środku ciężkości elementu i osiach równoległych do boków elementu. Wierzchołki każdego elementu nazywać będziemy dalej węzłami. Rozpatrzmy jeden z elementów tego obszaru (rys. 2). Przyjmijmy, że w obszarze tego elementu istnieje ciągła i różniczkowalna funkcja dwóch zmiennych

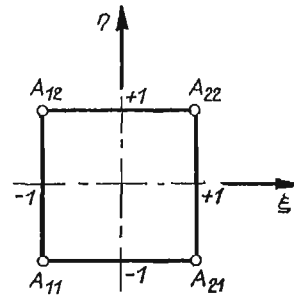
$F(\xi, \eta)$ , której postać nie jest znana. Zgodnie z przyjętym w metodzie elementów skończonych postępowaniem, funkcję tę można zastąpić jej przybliżeniem w postaci [8]

$$(2.1) \quad F(\xi, \eta) = [Q^{ik}] \cdot \{f_{ik}\},$$

gdzie  $\{f_{ik}\}$  jest zbiorem wartości w węzłach przybliżanej funkcji oraz jej pochodnych.  $[Q^{ik}]$  jest natomiast macierzą funkcyjną tzw. funkcji jednostkowych, tak obranych, aby dawały odpowiednie wartości funkcji lub jej pochodnych w węzłach, gdy do (2.1) wstawiane będą współrzędne odnośnych węzłów.



Rys. 1



Rys. 2

W dalszej części pracy przyjmować będziemy dwa rodzaje zbioru  $\{f_{ik}\}$ :

- zbiór wartości węzłowych zawiera jedynie wartości funkcji w każdym węźle,
- zbiór wartości węzłowych zawiera wartości funkcji oraz wartości obu jej pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej względem  $\xi, \eta$  w każdym węźle.

W przypadku pierwszym funkcje jednostkowe  $Q^{ik}$  przedstawimy jako iloczyny wielomianów Lagrange'a w postaci

$$(2.2) \quad Q^{ik}(\xi, \eta) = L^i(\xi)L^k(\eta), \quad i, k = 1, 2;$$

$L$  jest tu funkcją jednej zmiennej o własności

$$L^i(z_j) = \delta_{ik},$$

gdzie

- $i$  — indeks węzła dla którego opisana jest funkcja,
- $j$  — indeks węzła w którym obliczana jest wartość funkcji,
- $\delta_{ij}$  — symbol Kroneckera.

Dla elementu z rys. 2 funkcje te mają *explicité* postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2}(-z+1), \\ L^2 &= \frac{1}{2}(z-1). \end{aligned}$$

W przypadku drugim funkcje jednostkowe  $Q^{ik}$  przedstawimy jako iloczyn wielomianów Hermite'a w postaci [2]:

$$(2.4) \quad Q^{ikpq} = H^{ip}(\xi)H^{kq}(\eta), \quad i, k, p, q = 1, 2;$$

$H$  jest tu funkcją jednej zmiennej o własności

$$\frac{d^j H^{ip}(z_k)}{dz^j} = \delta_{ik} \delta_{jp},$$

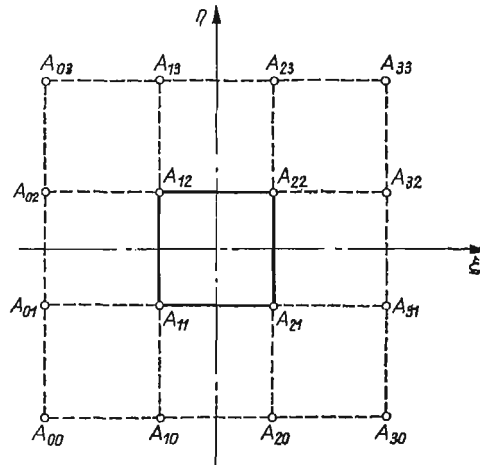
gdzie

- $i$  — indeks węzła dla którego opisana jest funkcja,
- $k$  — indeks węzła, w którym obliczana jest wartość funkcji,
- $p$  — rząd wielomianu Hermite'a,
- $j$  — rząd pochodnej względem zmiennej  $z$ .

Tak opisana funkcja (2.1) wymaga znajomości w węźle czterech parametrów. Zbiór wartości węzłowych dla rozpatrywanego elementu (rys. 2) przyjmuje zatem postać

$$(2.5) \quad \{f_{ik}\}^T = \{f_{11}, f_{11,\xi}, f_{11,\eta}, f_{11,\xi\eta}, f_{12}, f_{12,\xi}, \dots, f_{22,\xi\eta}\}^T.$$

W celu zmniejszenia ilości parametrów w węźle zastąpmy odpowiednie pochodne węzłowe ilorazami różnicowymi. Dołączamy w tym celu do rozpatrywanego elementu



Rys. 3

elementy sąsiednie (rys. 3). Odpowiednie pochodne funkcji w węzłach rozpatrywanego elementu można teraz wyrazić w postaci:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f_{ik,\xi} &= \frac{1}{4}(f_{i+1,k} - f_{i-1,k}), \\ f_{ik,\eta} &= \frac{1}{4}(f_{i,k+1} - f_{i,k-1}), \\ f_{ik,\xi\eta} &= \frac{1}{16}(f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k-1} - f_{i+1,k-1} - f_{i-1,k+1}). \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.6) w (2.5) i przekształcając następnie prawą stronę (2.1), funkcje jednostkowe (2.4) wyrazimy w formie

$$(2.7) \quad Q^{ik} = F^i(\xi)F^k(\eta), \quad i, k = 0, 1, 2, 3,$$

gdzie funkcje  $F$  są wyrażone przez wielomiany Hermite'a

$$F^0 = \frac{1}{4}H^{12}, \quad F^2 = -\frac{1}{4}H^{12} - H^{21},$$

$$F^1 = \frac{1}{4}H^{22} - H^{11}, \quad F^3 = -\frac{1}{4}H^{22}.$$

Dla elementu z rys. 3 funkcje te mają *explicité* postać:

$$(2.8) \quad F^0 = \frac{1}{16}(z^3 - z^2 - z + 1), \quad F^2 = \frac{1}{16}(3z^3 + z^2 - 11z - 9),$$

$$F^1 = \frac{1}{16}(-3z^3 + z^2 + 11z - 9), \quad F^3 = \frac{1}{16}(-z^3 - z^2 + z - 1).$$

Zauważmy, że określona w ten sposób funkcja (2.1), w której funkcje jednostkowe wyrażone są przez (2.7), zależy w dalszym ciągu od 16 parametrów węzłowych węzłów danego elementu i elementów sąsiednich (rys. 3), ale liczba parametrów węzłowych została zmniejszona do jednego — wartości funkcji w węźle.

Postać funkcji jednostkowych wpływa w decydujący sposób na własności funkcji (2.1) przy przejściu z elementu do elementu. Jeżeli funkcje jednostkowe opisane są przez (2.2), to na wspólnym brzegu dwóch sąsiednich elementów (rys. 1) zachowana jest równość jedynie wartości funkcji określonych w każdym elemencie. Jeżeli natomiast funkcje jednostkowe określimy przez (2.7), to podobnie jak przy stosowaniu wielomianów Hermite'a i czterech parametrów w węźle [2], zachowana jest na wspólnym brzegu równość wartości funkcji, jej obu pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej, przy stosowaniu tylko jednego parametru węzłowego.

### 3. Transformacja układu współrzędnych

Jeżeli rozpatrywać będziemy płytę dowolnego kształtu, to odwzorowanie jej poprzez zbiór elementów kwadratowych wymagać będzie z jednej strony dużej liczby elementów, a z drugiej — mogą wystąpić trudności z dokładnym odwzorowaniem brzegu płyty.

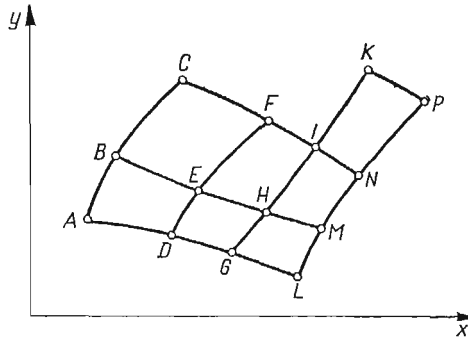
Dla stworzenia możliwości wprowadzania dostatecznie małej liczby elementów, przy równoczesnym dokładnym odwzorowaniu brzegu płyty, stosuje się przekształcenie elementu kwadratowego na inny, o bardziej dowolnym kształcie. Przekształcenie to polega na transformacji lokalnego układu współrzędnych  $\xi, \eta$  w elemencie do układu globalnego  $x, y$ . Wzajemna odpowiedniość między układem lokalnym i globalnym ma postać:

$$(3.1) \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

Najbardziej wygodny sposób przeprowadzenia transformacji (3.1) polega na wykorzystaniu w niej omówionych w pkt. 2 funkcji jednostkowych. Wzory transformacyjne (3.1) można przedstawić w postaci podobnej do (2.1):

$$(3.2) \quad x = [Q^{ik}] \cdot \{x_{ik}\}, \quad y = [Q^{ik}] \cdot \{y_{ik}\},$$

gdzie zbiory  $\{x_{ik}\}$  oraz  $\{y_{ik}\}$  są współrzędnymi węzłów elementu w układzie globalnym  $x, y$ . Przy tego rodzaju transformacji obszar przedstawiony na rys. 1 staje się odwzorowaniem płyty dowolnego kształtu przedstawionej na rys. 4. Elementy kwadratowe na rys. 1 są odwzorowaniem krzywoliniowych elementów czworokątnych z rys. 4, na które podzielona została płyta. Taki sposób odwzorowania obszaru w metodzie elementów skończonych wprowadził po raz pierwszy TAIG [5], a uogólnili ten pomysł IRONS [3], COONS [1] i inni.



Rys. 4

Jako funkcje jednostkowe w (3.2) wykorzystać można zarówno funkcje (2.2) jak i funkcje (2.7), uzyskując odpowiednio na wspólnym brzegu sąsiednich elementów w układzie lokalnym równość współrzędnych globalnych krzywoliniowego brzegu elementów lub też równość współrzędnych i ich pierwszych pochodnych oraz pochodnej mieszanej względem  $\xi, \eta$ .

#### 4. Funkcja ugięcia w elemencie krzywoliniowym

Ugięcia wewnątrz elementu płyty określać będziemy w lokalnym układzie współrzędnych. Funkcję ugięcia środkowej powierzchni elementu przyjmiemy zatem w postaci podobnej do (2.1)

$$(4.1) \quad w(\xi, \eta) = [Q^{ik}] \cdot \{w_{ik}\}.$$

Jako funkcje jednostkowe przyjmiemy funkcje (2.7), a za zbiór parametrów węzłowych  $\{w_{ik}\}$  przyjmiemy ugięcia węzłów danego elementu i elementów sąsiednich (rys. 3). Tak określona funkcja (4.1) przy przejściu z elementu do elementu zachowuje ciągłość ugięcia, obu pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej w układach lokalnych.

Przechodząc z kolei do układu globalnego, w zależności od postaci wzorów transformacyjnych (3.2) rozpatrywać będziemy dwa typy elementów [8]:

- elementy subparametryczne,
- elementy izoparametryczne.

W elemencie subparametrycznym jako funkcje jednostkowe transformacji (3.2) wykorzystuje się funkcje (2.2), w wyniku czego geometria elementu określana jest jedynie przez współrzędne węzłów rozpatrywanego elementu. W funkcji ugięcia natomiast funkcje

jednostkowe określone są przez (2.7), co powoduje, że ugięcie wewnątrz elementu zależy od ugięć węzłów danego elementu i jego sąsiadów. Tak przyjęte funkcje jednostkowe w (3.2) i (4.1) zapewniają w układzie globalnym jedynie ciągłość ugięć wzdłuż krzywoliniowego brzegu sąsiednich elementów.

W elemencie izoparametrycznym funkcje jednostkowe w (3.2) i (4.1) są przyjęte w tej samej postaci (2.7). W wyniku tego geometria elementu i ugięcia określane są przy pomocy tych samych węzłów. Powoduje to zachowanie na wspólnym brzegu ciągłości nie tylko ugięć ale również ich pierwszych pochodnych względem współrzędnych globalnych  $x, y$ .

W obu omówionych typach elementu przyjęte wzory transformacyjne (3.2) i funkcja ugięcia (4.1) zapewniają ściśle odwzorowanie przemieszczeń jednorodnych, co stanowi kryterium przydatności proponowanych funkcji jednostkowych [8].

### 5. Macierz sztywności elementu

Macierz sztywności elementu przedstawić można w znanej postaci [8]

$$(5.1) \quad [\mathbf{K}] = \int \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy,$$

gdzie  $[\mathbf{D}]$  jest macierzą stałych sprężystych, a  $[\mathbf{B}]$  jest macierzą określającą związek między odkształceniami w dowolnym punkcie elementu a ugięciami węzłów elementu.

W przypadku zginania cienkiej płyty izotropowej macierz stałych sprężystych  $[\mathbf{D}]$  przyjmuje postać:

$$(5.2) \quad [\mathbf{D}] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

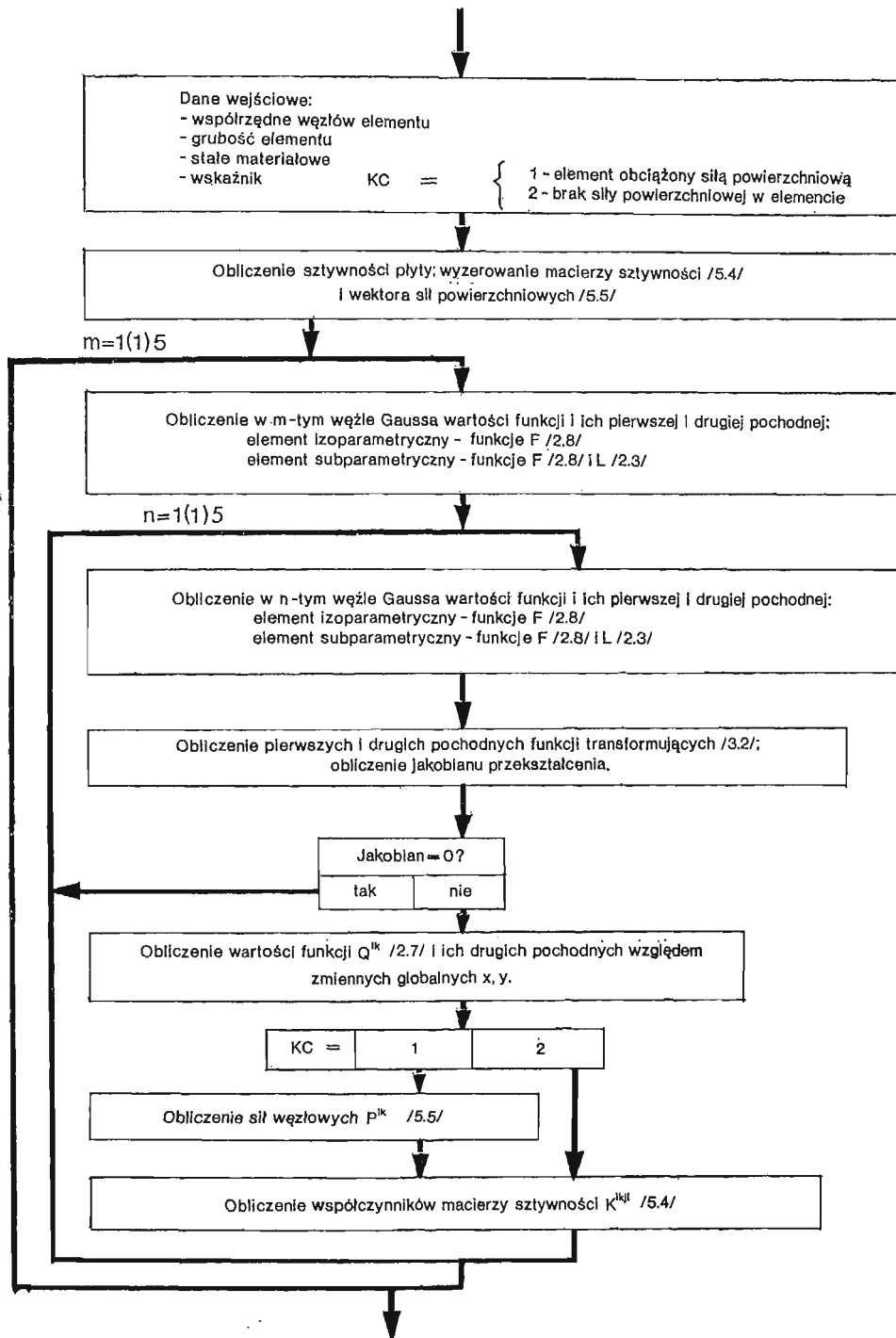
gdzie  $D$  jest sztywnością płyty. Natomiast macierz  $[\mathbf{B}]$  przedstawimy w postaci

$$(5.3) \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [Q^{ik}]_{,xx} \\ [Q^{ik}]_{,yy} \\ [Q^{ik}]_{,xy} \end{bmatrix},$$

gdzie  $Q^{ik}$  są funkcjami jednostkowymi (2.7). Uwzględniając (5.2) i (5.3) w (5.1) i dokonując zamiany zmiennych globalnych na lokalne, uzyskujemy macierz sztywności elementu płyty, której współczynniki określone są wzorem:

$$(5.4) \quad K^{ijkl} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D [(Q^{ik}_{,xx} + Q^{ik}_{,yy})(Q^{jl}_{,xx} + Q^{jl}_{,yy}) - (1-\nu)(Q^{ik}_{,xx} Q^{jl}_{,yy} + \\ + Q^{ik}_{,yy} Q^{jl}_{,xx} - 2Q^{ik}_{,xy} Q^{jl}_{,xy})] J d\xi d\eta,$$

gdzie  $J$  jest jakobianem przekształcenia. Występujące w (5.4) drugie pochodne funkcji jednostkowych względem współrzędnych globalnych  $x, y$  wyznacza się w oparciu o drugie pochodne tych funkcji względem współrzędnych lokalnych  $\xi, \eta$  i wzorów transformacyjnych (3.2).



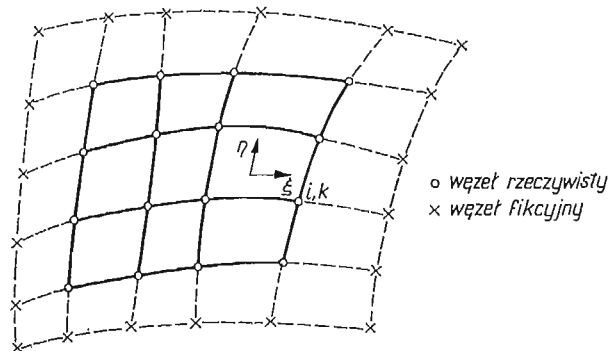
Rys. 5

Jeżeli element płyty obciążony jest siłami rozłożonymi na jego powierzchni, przy wyznaczaniu macierzy sztywności korzystnie jest znaleźć siły węzłowe wywołane tym obciążeniem. Siły te określone są zależnościami [8]:

$$(5.5) \quad P^{ik} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q^{ik} p(\xi, \eta) J d\xi d\eta,$$

gdzie  $p(\xi, \eta)$  jest funkcją rozkładu obciążenia na powierzchni elementu.

Wyznaczanie współczynników (5.4) oraz sił (5.5) najwygodniej przeprowadzić jest na drodze numerycznej, wykorzystując do całkowania metodę Gaussa. Algorytm wyzna-



Rys. 6

czania współczynników macierzy sztywności oraz sił węzłowych przedstawiono na rys. 5. Algorytm ten został zrealizowany w formie podprogramu napisanego w języku FORTRAN-1900.

## 6. Warunki brzegowe

Przyjęta postać (4.1) funkcji ugięcia wewnątrz elementu narzuca określony sposób realizacji warunków brzegowych na krawędziach płyty. Ponieważ funkcja ta zależy od ugięć węzłów elementu i jego sąsiadów koniecznym staje się wprowadzenie dla elementów brzegowych dodatkowych węzłów fikcyjnych leżących poza obszarem płyty, podobnie jak w metodzie różnic skończonych (rys. 6). Siatka linii parametrycznych lokalnego układu współrzędnych wprowadzonego w elemencie pokrywa się na jego krawędziach z kierunkiem stycznym i normalnym do tych krawędzi. Na krawędzi  $\xi = \text{const}$  kierunek  $\xi$  jest kierunkiem normalnym ( $n$ ) do krawędzi, a kierunek  $\eta$  jest kierunkiem stycznym ( $t$ ). Na krawędziach  $\eta = \text{const}$  jest odwrotnie. Rozpatrzmy zatem typowe sposoby podparcia krawędzi płyty.

Na brzegu swobodnie podpartym ugięcie  $w$ , jak również moment zginający w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi muszą być równe zero. Zerowanie się tego momentu prowadzi do warunku  $w_{,nn} = 0$  [6]. Realizację pierwszego warunku (zerowe ugięcia) zapewnia się przez założenie zerowych ugięć węzłów leżących na krawędzi elementu. Warunek zerowania się momentu zginającego wynika w sposób przybliżony z rozwiąza-



nia. Dokładność spełnienia tego warunku rośnie wraz z zagęszczaniem siatki podziału płyty na elementy.

W przypadku brzegu utwierdzonego żądamy aby na krawędzi elementu ugięcie i jego pochodna normalna były równe zeru. Warunek pierwszy realizujemy identycznie jak w przypadku brzegu swobodnie podpartego; natomiast spełnienie warunku na pochodną normalną zapewnia się przez założenie równości ugięć węzła fikcyjnego i odpowiedniego węzła wewnętrznego najbliższego krawędzi elementu. Na przykład dla węzła brzegowego  $i, k$  (rys. 6) warunek ten ma postać  $w_{i+1, k} = w_{i-1, k}$ .

Spełnienie warunków brzegowych na brzegu swobodnym wynika w sposób przybliżony z rozwiązania. Dokładność spełnienia tego warunku zwiększa się wraz z zagęszczeniem siatki podziału płyty na elementy.

Przedstawiony sposób realizacji warunków brzegowych zapewnia dokładne ich spełnienie jedynie dla brzegu utwierdzonego. Istnieją metody, które zapewniają dokładne spełnienie warunków brzegowych dla pozostałych dwóch przypadków. Polegają one na zapewnieniu zerowania się pochodnych ugięcia na drodze iteracyjnej bądź też przez nałożenie na funkcję ugięcia pewnych dodatkowych ograniczeń. To ostatnie wymaga wprowadzenia do zbioru wartości węzłowych  $\{w_{ik}\}$  dodatkowych zmiennych pozawęzłowych w postaci mnożników Lagrange'a [7]. Niech ograniczenie nałożone na funkcję ugięcia ma postać:

$$(6.1) \quad [G] \cdot \{w_{ik}\} = 0,$$

gdzie  $[G]$  jest macierzą stałych. Wprowadzając mnożniki Lagrange'a  $\{\lambda\}$  jako dodatkowe zmienne pozawęzłowe, energię potencjalną elementu płyty przedstawimy w postaci [8]

$$U = \frac{1}{2} \{w_{ik}\}^T [K] \{w_{ik}\} - \{w_{ik}\}^T \{R\} + ([G] \cdot \{w_{ik}\})^T \{\lambda\} = \text{extremum},$$

co prowadzi do układu równań:

$$(6.2) \quad \begin{bmatrix} [K] & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_{ik}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Pierwszy składnik (6.2) stanowi teraz nową macierz sztywności elementu, uwzględniającą dodatkowe ograniczenia nałożone na ugięcia. Przykładowo, nałożmy na ugięcia wewnątrz elementu dodatkowe ograniczenie w postaci:

$$(6.3) \quad (w_{,\xi\xi})_{\xi=1} = 0.$$

Ograniczenie to zapewnia zerowanie się momentu  $M_n$  na krawędzi  $\xi = 1$ , co powoduje dokładne spełnienie warunków brzegowych na krawędzi swobodnie podpartej. Proces wyznaczania macierzy  $[G]$  z (6.1) jest wtedy następujący: drugą pochodną w kierunku normalnym funkcji ugięcia uzyskamy przez dwukrotne zróżniczkowanie względem  $\xi$  wzoru (4.1). Jeżeli podstawimy następnie w miejsce  $\xi$  wartość 1, to pochodna ta wyrazi się zależnością:

$$(6.4) \quad (w_{,\xi\xi})_{\xi=1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 F^{kk}(\eta)(w_{0k} - 4w_{1k} + 5w_{2k} - 2w_{3k}).$$

Z kolei żądanie, aby pochodna ta była równa zero wzdłuż całej krawędzi  $\xi = 1$ , wymaga spełnienia układu równań:

$$(6.5) \quad w_{0k} - 4w_{1k} + 5w_{2k} - 2w_{3k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Macierz  $[G]$  przyjmie więc postać:

$$(6.6) \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

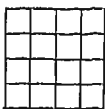
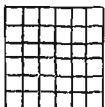
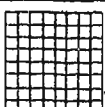
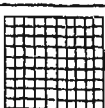
W podobny sposób można uzyskać macierz  $[G]$  dla warunków na pozostałych krawędziach.

### 7. Przykłady liczbowe

Wykorzystując macierz sztywności opisaną w pkt. 5 obliczono ugięcia oraz momenty zginające w płycie kwadratowej przy różnych sposobach podparcia i przy stosowaniu różnej liczby elementów.

W tabelicy 1 przedstawiono wartości ugięć oraz momentów zginających dla kwadratowej płyty podpartej swobodnie na krawędziach (rys. 7) obciążonej siłą skupioną w środ-

TABLICA 1

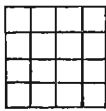
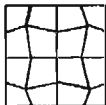
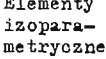
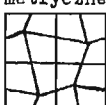
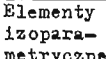
Podział płyty	Siła skupiona			Obciążenie ciągłe			
	$w_1/\frac{Pa^2}{D}$	$M_{x2}/P$	$M_{y2}/P$	$w_1/\frac{qa^4}{D}$	$M_{x1}/qa^2$	$M_{x2}/qa^2$	$M_{y2}/qa^2$
	0.01091	-0.00393	-0.00118	0.003960	0.05084	0.00329	0.00099
	0.01103	-0.00036	-0.00011	0.003985	0.04946	0.00169	0.00051
	0.01115	-0.00011	-0.00003	0.004009	0.04887	0.00102	0.00031
	0.01125	-0.00006	-0.00002	0.004026	0.04856	0.00068	0.00020
Dokładne	0.01160	0.0	0.0	0.004062	0.04790	0.0	0.0

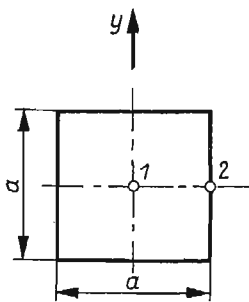
ku płyty oraz równomiernym obciążeniem ciągłym, przy podziale jej na różną ilość regularnych elementów izoparametrycznych.

Tablica 2 przedstawia wartości ugięć i momentów zginających dla tej samej płyty przy dwóch wersjach jej podziału na tę samą ilość elementów izoparametrycznych oraz subparametrycznych.

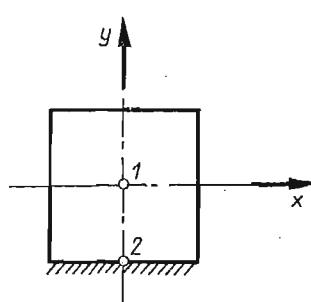
W tablicy 3 przedstawiono wartości momentów zginających wzdłuż krawędzi  $x = a/2$  (rys. 7) oraz ugięć wzdłuż linii  $y = 0$ , dla jednej wersji jej podziału na elementy z uwzględ-

TABLICA 2

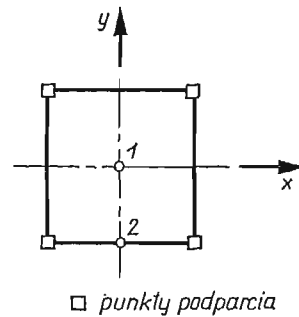
Podział płyty	Siła skupiona			Obciążenie ciągłe			
	$w_1/Pa^2/D$	$M_{x2}/P$	$M_{y2}/P$	$w_1/qa^4/D$	$M_{x1}/qa^2$	$M_{x2}/qa^2$	$M_{y2}/qa^2$
	0.01091	-0.00393	-0.00118	0.003960	0.05084	0.00329	0.00099
Elementy subparametryczne 	0.00926	-0.00023	-0.00007	0.003561	0.04425	-0.00247	-0.00074
Elementy izoparametryczne 	0.01069	-0.00004	-0.00001	0.003872	0.05471	0.00270	0.00081
Elementy subparametryczne 	0.00940	0.00031	0.00009	0.003334	0.04740	0.01210	0.00364
Elementy izoparametryczne 	0.00905	0.00070	0.00021	0.003225	0.04532	0.02360	0.00703



Rys. 7



Rys. 8



□ punkty podparcia

Rys. 9

TABLICA 3

	bez dodatkowych zmiennych poza-węzłowych	z dodatkowymi zmiennymi poza-węzłowymi	
$M_{x1}/qa^2$	0.0	0.0	
$M_{y1}/qa^2$	0.0	0.0	
$M_{xy1}/qa^2$	-0.03386	-0.03192	
$M_{x2}/qa^2$	0.00312	0.0	
$M_{y2}/qa^2$	0.00094	0.0	
$M_{xy2}/qa^2$	-0.01904	-0.01876	
$M_{x3}/qa^2$	0.00329	0.0	
$M_{y3}/qa^2$	0.00099	0.0	
$M_{xy3}/qa^2$	0.0	0.0	
$w_3/\frac{qa^4}{D}$	0.0	0.0	
$w_4/\frac{qa^4}{D}$	0.002892	0.002894	
$w_5/\frac{qa^4}{D}$	0.003960	0.003962	

TABLICA 4

Podział płyty	trzy krawędzie podparte swobodnie, jedna utwierdzona			podparcie w narożach		
	$w_1/\frac{qa^4}{D}$	$M_{x1}/qa^2$	$M_{y1}/qa^2$	$w_1/\frac{qa^4}{D}$	$M_{x1}/qa^2$	$M_{x2}/qa^2$
	0.0024	0.0321	0.0429	0.0238	0.1181	0.1548
	0.0025	0.0323	0.0407	0.0242	0.1148	0.1527
	0.00254	0.0325	0.0399	0.0245	0.1135	0.1516
	0.0026	0.0326	0.0395	0.0248	0.1129	0.1512
Dokładne	0.0028	0.034	0.039	0.0249	0.1090	0.1404

nieniem oraz bez uwzględnienia dodatkowych ograniczeń nałożonych na funkcję ugięcia, a gwarantujących dokładne spełnienie warunków brzegowych. Wymagało to wprowadzenia dodatkowych zmiennych pozawęzłowych w postaci mnożników Lagrange'a.

Wartości ugięć i momentów zginających dla płyty kwadratowej obciążonej równomiernie na całej powierzchni o trzech krawędziach swobodnie podpartych i jednej utwierdzonej (rys. 8) oraz takiej samej płyty podpartej tylko w narożach (rys. 9) przedstawiono w tablicy 4.

## 8. Wnioski końcowe

Przedstawione w tablicach 1, 2 i 4 wyniki wskazują na zbieżność przyjętej metody obliczeń, dla różnych sposobów podparcia płyty, wraz ze wzrostem liczby elementów, na które dzieli się rozpatrywany obszar. Elementy o kształtach regularnych zapewniają dokładniejsze odwzorowanie rzeczywistego stanu naprężeń i odkształceń wewnątrz obszaru płyty, niż elementy kształtu dowolnego (tablica 2). Tłumaczy się to z jednej strony faktem, że w elementach regularnych zapewniona jest w sposób automatyczny ciągłość wyższych pochodnych funkcji przemieszczeń, a z drugiej strony równomiernym rozmieszczeniem węzłów wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Wskazuje to na celowość stosowania regularnego podziału wszędzie tam gdzie jest to możliwe. Elementy krzywoliniowe należy stosować przede wszystkim przy odwzorowywaniu krzywoliniowego brzegu obszaru. Na dokładność odwzorowania stanu naprężeń i odkształceń istotny wpływ ma również dokładność spełniania założonych warunków brzegowych. Wyniki przedstawione w tablicy 3 wskazują na celowość wprowadzania dodatkowych zmiennych pozawęzłowych umożliwiających dokładne spełnienie założonych warunków brzegowych w sposób opisany w pkt. 7.

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi w efekcie do rozwiązywania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, zależnej od ilości stopni swobody w każdym węźle rozpatrywanego obszaru. Dążąc do zapewnienia ciągłości funkcji przemieszczeń w całym rozpatrywanym obszarze należy w każdym węźle wprowadzić dużą liczbę stopni swobody (przemieszczenia i ich pochodne). W przedstawionej pracy podjęto próbę zachowania wspomnianej ciągłości przy równoczesnym ograniczeniu liczby stopni swobody węzła. Zastąpienie pochodnych przemieszczenia w węźle ilorazami różnicowymi przemieszczeń węzłów sąsiednich pozwoliło, w przypadku płyty, ograniczyć liczbę stopni swobody węzła do jednego. Zatem zaletą proponowanej metody jest ograniczenie wielkości rozwiązywanego układu równań w porównaniu z tzw. prostą metodą elementów skończonych [4], [8], przy równoczesnym zachowaniu ciągłości przemieszczeń w całym rozpatrywanym obszarze. Pamiętając, że dokładność odwzorowania rzeczywistego stanu naprężeń i odkształceń jest przede wszystkim funkcją gęstości podziału ciała na elementy, przedstawiony powyżej sposób postępowania ma więc również i tę zaletę, że pozwala na wprowadzenie w rozpatrywanym obszarze dużej liczby elementów bez nadmiernego rozbudowywania rozwiązywanego układu równań, którego maksymalna wielkość może być z drugiej strony ograniczona parametrami technicznymi będącej do dyspozycji maszyny cyfrowej.

## Literatura cytowana w tekście

1. S. A. COONS, *Surfaces for computer aided design of space form*, M.I.T. Project MAC MAC-TR-41, 1967.
2. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza i wielomiany Hermite'a w metodzie elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Łódź 1971.
3. B. M. IRONS, *Engineering application of numerical integration in stiffness method*, J.A.I.A.A., 14, 2035—37, 1966.
4. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*, Biuletyn WAT, 4, 100, 1969.
5. I. C. TAIG, *Structural analysis by the matrix displacement method*, Engl. Electric Aviation Report, SO 17, 1961.
6. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.
7. R. WEINSTOCK, *Calculus of variations*, McGraw-Hill, 1952.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 1971.

## Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ  
ЖЕСТКОСТИ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ  
ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ

В работе представлена, на примере изгибаемой пластины, попытка применения метода конечных разностей для определения матрицы жесткости элемента. В качестве степеней свободы приняты лишь только их перемещения в перпендикулярном к недеформированной поверхности пластины направлении. Выведены соответствующие зависимости и приведен алгоритм определения матрицы жесткости. В работе представлены примеры численных расчетов.

## S u m m a r y

APPLICATION OF FINITE-DIFFERENCES TO THE DETERMINATION  
OF THE STIFFNESS MATRIX OF FINITE ELEMENTS METHOD  
EXEMPLIFIED BY THE PLATE BENDING

The present paper deals with the application of finite-difference method to the determination of the stiffness matrix of element, exemplified by the plate bending. The displacements of nodes in the normal direction to the undeformed surface of the plate are the only degrees of freedom. The proper formulae have been derived and the algorithm of the determination of the stiffness matrix has also been presented. The paper is illustrated by the numerical examples.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1974 r.*