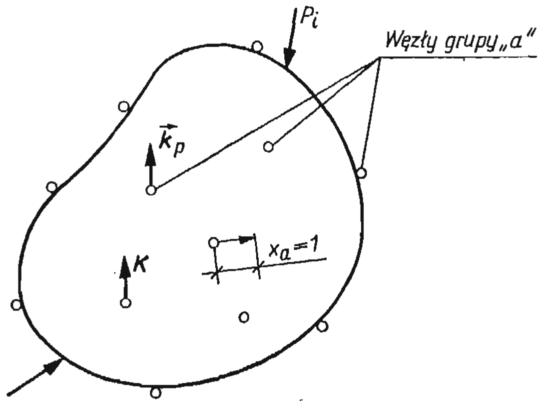
MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 12 (1974)

MACIERZ SZTYWNOŚCI I WEKTOR OBCIĄŻEŃ SUPERELEMENTU

JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

Przy obliczaniu dużych konstrukcji metodą elementów skończonych — przy żądanej dokładności obliczeń — mogą zachodzić przypadki otrzymywania równań o liczbie przekraczającej wielokrotnie liczbę równań możliwą do rozwiązania na maszynie cyfrowej. W takich przypadkach można zastosować sposób polegający na podziale ustroju na superelementy [1] stanowiące części składowe całej konstrukcji, obliczeniu macierzy sztywności tych superelementów i za ich pomocą obliczeniu macierzy sztywności całej konstrukcji.



Rys. 1

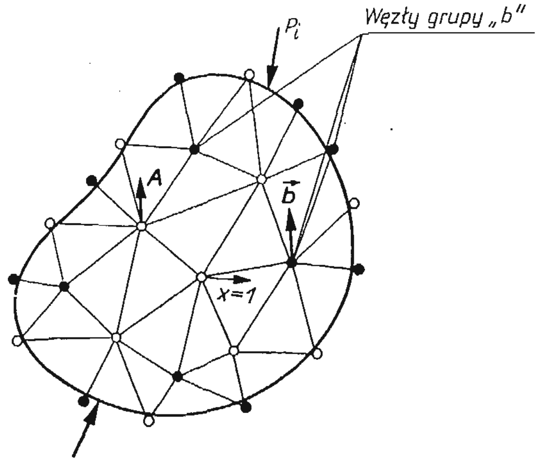
Różnica między elementem skończonym a superelementem polega na odmiennym sposobie obliczania ich macierzy sztywności. Macierz sztywności elementu skończonego oblicza się na podstawie funkcji kształtu [2], macierz sztywności superelementu zaś za pomocą macierzy sztywności elementów skończonych. Otrzymuje się ją poprzez eliminację pewnej liczby dowolnych węzłów z ich ogólnej liczby wynikającej z podziału superelementu na elementy skończone.

W pracy [2] wykazano możliwość eliminacji węzłów wewnętrznych przy zastosowaniu minimalizacji funkcjonału χ.

W pracy niniejszej sformułowano zadanie eliminacji dowolnych węzłów — odmiennie od ZIENKIEWICZA [2]. Zastosowano do tego celu metodę przemieszczeń. Wykazano, że macierz sztywności superelementu może być obliczona przez eliminację pewnej liczby niewiadomych z ogólnego układu równań, wynikającego ze stosowania metody elementów skończonych.

Macierz sztywności superelementu wyprowadzimy na przykładzie tarczy (rys. 1). Podany sposób jest również ważny dla dowolnego dwuwymiarowego lub trójwymiarowego superelementu. Liczba węzłów elementu przedstawionego na rys. 1 jest mała, toteż obliczenie macierzy sztywności tego elementu przez bezpośrednie odpowiednie «zbieranie» macierzy sztywności elementów skończonych prowadziłoby do zbyt dużych błędów. Dodanie pewnej liczby węzłów (węzły czarne na rys. 2) zwiększa dokładność obliczeń, lecz również liczbę niewiadomych.

Załóżmy, że grupa węzłów oznaczona indeksem a (białe), łącznie z grupą węzłów oznaczona indeksem b (czarne) tworzą siatkę podziału na elementy skończone. Za pomocą wszystkich węzłów $a+b$ znajdziemy macierz sztywności elementu wyłącznie z węzłami a (rys. 1). Jeżeli macierz sztywności elementu skończonego trójkątnego (rys. 2) jest znana, to znana jest również macierz sztywności całego elementu tarczowego z węzłami $a+b$. Oznaczmy tę macierz przez **A**, a macierz sztywności z węzłami a, czyli poszukiwaną macierz sztywności superelementu przez **K**.



Rys. 2

Równanie metody przemieszczeń elementu tarczowego z węzłami $a+b$ można zapisać w postaci

$$A\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

gdzie

$\vec{\mathbf{x}}$ wektor niewiadomych przemieszczeń

$\vec{\mathbf{b}}$ wektor obciążeń.

Jeżeli podzielimy macierz **A** na cztery bloki w ten sposób, by wektor przemieszczeń $\vec{\mathbf{x}}$ rozdzielić na dwie grupy: $\vec{\mathbf{x}}_a$ i $\vec{\mathbf{x}}_b$ tzn. tak, by wektor $\vec{\mathbf{x}}_a$ był wektorem przemieszczeń węzłów grupy a (rys. 1), a wektor $\vec{\mathbf{x}}_b$ był wektorem przemieszczeń węzłów grupy b, to układ równań możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{aa}\vec{\mathbf{x}}_a+\mathbf{A}_{ab}\vec{\mathbf{x}}_b+\vec{\mathbf{b}}_a &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{ba}\vec{\mathbf{x}}_a+\mathbf{A}_{bb}\vec{\mathbf{x}}_b+\vec{\mathbf{b}}_b &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Jeżeli liczba węzłów grupy a wynosi s, a liczba węzłów grupy b przy wymiarze macierzy $\mathbf{A}$ $n \times n$ wynosi $n-s$, wówczas macierze z układu równań (2) przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{A}_{aa} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ a_{s,1} & \dots & & a_{s,s} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{ab} = \mathbf{A}_{ba}^T = \begin{bmatrix} a_{1,s+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,s+1} & \dots & \\ \vdots & & \\ a_{s,s+1} & \dots & a_{s,n} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix} a_{s+1,s+1} & \dots & a_{s+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,s+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{b}}_a = \begin{bmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ \vdots \\ b_{s,a} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{b}}_b = \begin{Bmatrix} b_{s+1,b} \\ b_{s+2,b} \\ \vdots \\ b_{n,b} \end{Bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{x}}_a = \begin{Bmatrix} x_{1,a} \\ x_{2,a} \\ \vdots \\ x_{s,a} \end{Bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{x}}_b = \begin{Bmatrix} x_{s+1,b} \\ x_{s+2,b} \\ \vdots \\ x_{n,b} \end{Bmatrix}.$$

Mnożąc obie strony drugiego równania układu (2) przez $\mathbf{A}_{bb}^{-1}$ i przekształcając je otrzymamy

(3) $$\vec{\mathbf{x}}_b = -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}\vec{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b.$$

Podstawiając relację (3) do pierwszego równania (2) otrzymamy po przekształceniu

(4) $$(\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba})\vec{\mathbf{x}}_a + (\vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b) = \mathbf{0}.$$

Jeżeli oznaczymy

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba},$$

$$\vec{\mathbf{k}}_p = \vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b,$$

wówczas równanie (4) można zapisać w postaci

(5) $$\mathbf{K}\vec{\mathbf{x}}_a + \vec{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}.$$

W dalszym ciągu rozważań wykażemy, że macierze $\mathbf{K}$ i $\vec{\mathbf{k}}_p$ są odpowiednio macierzą sztywności superelementu, tzn. elementu z węzłami grupy a, i wektorem obciążeń superelementu.

Jeżeli węzłom grupy b nadawać będziemy kolejno odpowiednie przemieszczenia $x_b = 1$ (rys. 3a), wówczas w każdym węźle grupy a wystąpią siły tworzące macierz $\mathbf{A}_{ab}$, a w każdym węźle grupy b, siły tworzące macierz $\mathbf{A}_{bb}$. Podobnie, nadając przemieszczenia jednostkowe węzłom grupy a (rys. 3b), otrzymamy macierz $\mathbf{A}_{aa}$ utworzoną z sił występujących w węzłach grupy a, i macierz $\mathbf{A}_{ba}$ utworzoną z sił występujących w węzłach grupy b.

Możemy więc zapisać następujące równanie metody przemieszczeń jako równanie równowagi sił w węzłach grupy b

(6) $$\mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{A}_{ba} = \mathbf{0},$$

gdzie

$\mathbf{A}_{bb}$ macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy b, kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy b,

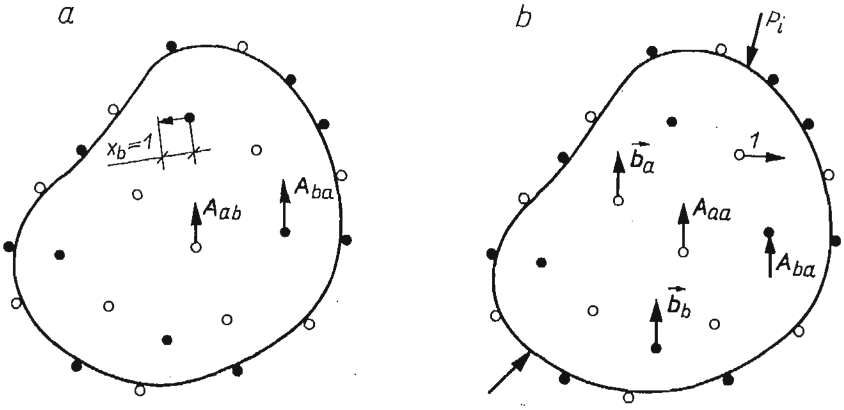
$\mathbf{A}_{ba}$ macierz prostokątna utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy b, kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a,

$\mathbf{x}_{ba}$ macierz prostokątna przemieszczeń węzłów grupy b dla kolejno wymuszanych przemieszczeń jednostkowych węzłów grupy a

$$\mathbf{x}_{ba} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,s} \\ x_{2,1} & \dots & & x_{2,s} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{p,1} & \dots & & x_{p,s} \end{bmatrix},$$

Z równania (6) otrzymamy

(7) $$\mathbf{x}_{ba} = -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}.$$



Rys. 3

Poszukiwana macierz sztywności $\mathbf{K}$ superelementu z węzłami a jest macierzą utworzoną z wartości sił w węzłach grupy a w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych węzłów grupy a, więc

(8) $$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_{ba} + \mathbf{A}_{aa},$$

gdzie

$\mathbf{A}_{ab}$ macierz prostokątna utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy b,

$\mathbf{A}_{aa}$ macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a.

Podstawiając do relacji (8) relację (7) otrzymamy macierz sztywności $\mathbf{K}$ superelementu

(9) $$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{-1}\mathbf{A}_{ba}.$$

W podobny sposób otrzymać można wektor obciążeń $\vec{\mathbf{k}}_p$ w węzłach superelementu dla dowolnych obciążeń zewnętrznych P_i. Oznaczmy wektor obciążeń w węzłach grupy a przez $\vec{\mathbf{b}}_a$, a w węzłach grupy b przez $\vec{\mathbf{b}}_b$, wówczas

(10) $$\mathbf{A}_{bb}\vec{\mathbf{x}}_b + \vec{\mathbf{b}}_b = \mathbf{0},$$

stąd

(11) $$\vec{\mathbf{x}}_b = -\mathbf{A}_{bb}^{-1}\vec{\mathbf{b}}_b.$$

Wektor obciążeń $\vec{k}_p$ otrzymamy w postaci

(12) $$\vec{k}_p = A_{ab}\vec{x}_b + \vec{b}_a.$$

Podstawiając (11) do (12) otrzymamy wektor obciążeń superelementu

(13) $$\vec{k}_p = \vec{b}_a - A_{ab}A_{bb}^{-1}\vec{b}_b.$$

Na podstawie znanych macierzy sztywności i wektorów obciążeń zespołu superelementów obliczyć można macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu, na który składają się wszystkie elementy zespołu. Obliczenie przeprowadzić można według wzorów (12) i (13).

Macierz sztywności **K** jest zbiorem sił występujących w węzłach grupy a (rys. 1) w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych $x_a = 1$, wektor $\vec{k}_p$ zaś, zbiorem sił występujących w węzłach superelementu (rys. 1) wywołanych siłami zewnętrznymi P_i.

Równanie (5) może być traktowane również jako pewien sposób rozwiązywania równania (1).

Literatura cytowana w tekście

1. A. KOCIOŁEK, *Mechanika budowli w systemie automatyzacji projektowania. Zastosowanie elektronicznych maszyn cyfrowych w pracach inżynierskich*, Konferencja nauk.-techn. NOT, Katowice 1971.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОР НАГРУЗКИ СУПЕРЭЛЕМЕНТА

В работе указан метод построения матрицы жесткости и вектора нагрузок суперэлемента, т. е. большого, по сравнению с размерами конструкции, элемента с малым числом степеней свободы.

Доказывается, что матрицу жесткости суперэлемента и его вектор нагрузок можно найти путем соответствующего приведения общей системы уравнений для элемента с большим числом степеней свободы.

Summary

STIFFNESS MATRIX AND A LOAD VECTOR OF A SUPERELEMENT

The paper presents the method of forming the stiffness matrix and the load vector for a so-called superelement, that is for an element with a small number of degrees of freedom and of dimensions large in comparison with dimensions of the entire construction.

It is shown that the superelement stiffness and its load vector can calculated by a suitable reduction of the general set of equations written for an element with many degrees of freedom.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1974 r.