

WYMIANA MASY, PĘDU I ENERGII MIĘDZY CZĄSTKĄ
KULISTĄ A OTOCZENIEM GAZOWYM

STANISŁAW M A Y (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z istotnych problemów pojawiających się w badaniach przepływów w ośrodkach wielofazowych jest problem wymiany masy, pędu i energii między poszczególnymi fazami. Opis matematyczny takiej wymiany w przypadku ogólnym jest niezwykle złożony. Zadanie przyjmuje jednak znacznie prostszą postać, gdy poszczególne fazy występują w postaci regularnych geometrycznie skupień, np. w postaci cząstek kulistych, oraz gdy rozpatrywać zagadnienie w postaci zlinearyzowanej.

W ostatnich latach literatura dotycząca przepływów wielofazowych rozwija się szczególnie gwałtownie. Powstało wiele modeli ruchu ośrodka wielofazowego. Z samej tylko literatury monograficznej poświęconej przepływowi wielofazowemu wymienić można m.in. prace [4, 6, 8, 14, 17, 22, 27]. Jedną z nowszych jest praca SZANIAWSKIEGO [25], w której dla dość ogólnego przypadku podano układ równań rządzący przepływem ośrodka wielofazowego. Przyjęto, że ośrodek składa się z jednej fazy spójnej i pewnej liczby faz rozproszonych, przy czym w każdej fazie może występować jeden lub większa liczba składników chemicznych. Ponadto założono, że fazy rozproszone występują w postaci pewnej liczby frakcji — każda frakcja składa się z kulistych cząstek o identycznych parametrach (w danym miejscu przepływu i w danej chwili). Układ równań dla przepływu takiej mieszaniny zawiera równania opisujące zachowanie mieszaniny jako całości, jak również równania opisujące zjawiska transportu między poszczególnymi frakcjami a fazą spójną (oddziaływania bezpośrednie między fazami rozproszonymi zostały we wspomnianym modelu pominięte).

Rozpatrywanie zjawisk transportu upraszcza się istotnie, jeżeli badać zjawiska, w których występują tylko niewielkie odchylenia od stanu równowagi termodynamicznej i mechanicznej. Szukane strumienie termodynamiczne są wtedy funkcjami liniowymi jednorodnymi odpowiednich sił termodynamicznych i zadanie wyznaczenia takich funkcji sprowadza się do znalezienia odpowiednich współczynników. Wartości tych współczynników zależą od składu mieszaniny, wachlarza uwzględnianych zjawisk fizycznych (lepkość, przewodnictwo cieplne, dyfuzja, termodyfuzja itp.), geometrii przepływu, zakresu zmienności parametrów (zwłaszcza liczby Knudsen).

Zagadnieniom parowania i kondensacji na kroplach (dla ustalenia uwagi będziemy używać terminu «kropla» zamiast «cząstka kulista», aczkolwiek wszystko, co zostanie powiedziane o kroplach, odnosić się będzie także do cząstek kulistych ciała stałego, na których zachodzi sublimacja lub kondensacja) poświęcono już wiele prac. Celem niniejszej pracy jest krótkie lecz systematyczne przedstawienie istniejących wyników w zakresie teorii zlinearyzowanej, a także — tam, gdzie to będzie niezbędne — ich rozszerzenie i adapt-

towanie do takiej postaci, która stanowiłaby uzupełnienie układu równań przepływu mieszaniny podanego w [25].

W dalszym ciągu będziemy zajmować się zadaniem, w którym pojedyncza kulista kropla porusza się w nieskończonym ośrodku gazowym jednoskładnikowym (para) lub dwuskładnikowym (para + gaz, nie biorący udziału w przemianie fazowej). Ograniczymy się do przypadku ustalonego, ponieważ przy niewielkich odchyleniach od stanu równowagi termodynamicznej i niewielkich prędkościach względnych kropeł, szybkości parowania i kondensacji są także małe, co pozwala traktować zjawiska nieustalone jako quasi-ustalone.

2. Podstawowe zależności ogólne

Jak już wspomnieliśmy, istotnym parametrem od którego zależy obraz zjawiska, jest liczba Knudsena $Kn = l/r_0$, gdzie l jest średnią drogą swobodną cząsteczek, r_0 zaś promieniem kropli. Drogę swobodną określimy za pomocą kinematycznego współczynnika lepkości ν (p. np. [5])

$$l = \frac{2\nu}{v},$$

gdzie v jest prędkością średnią cząsteczek

$$v = \sqrt{\frac{8R_v T}{\pi}}.$$

Zatem dla ośrodka składającego się tylko z pary, liczba Knudsena wyraża się w postaci

$$Kn_v = \frac{\nu_v}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2R_v T}}.$$

Można za pomocą analogicznego wzoru określić liczbę Knudsen dla mieszaniny

$$Kn_m = \frac{\nu_m}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2R_m T}},$$

należy jednak pamiętać, że wprowadzona przez ten wzór «droga swobodna» cząsteczek w mieszaninie ma charakter umowny. W powyższych wzorach i niżej wskaźnik v występuje przy wielkościach dotyczących pary, wskaźnik m przy odpowiednio uśrednionych wielkościach odpowiadających gazowi dwuskładnikowemu. Pominięcie wskaźników v lub m we wzorze wskazuje, że odpowiedni wzór odnosi się do gazu zarówno jedno-, jak i dwuskładnikowego.

W dalszym ciągu będziemy rozważać bezwymiarowe siły i strumienie termodynamiczne. Jako wielkości odniesienia dla strumieni termodynamicznych przyjmijmy strumienie przenoszone przez padające na powierzchnię cząsteczki o rozkładzie prędkości Maxwella. Tak określone jednostkowe strumienie masy, energii i pędu mają odpowiednio postać następującą (p. np. [11]):

$$\bar{J} = \frac{p}{\sqrt{2\pi R_v T}}, \quad \bar{E} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} R_v T \bar{J}, \quad \bar{P} = \frac{4}{3} v \bar{J},$$

gdzie p oznacza ciśnienie, T — temperaturę, R — stałą gazową, κ — wykładnik adiabaty.

Zastępując w powyższych wzorach wskaźnik v przez m otrzymamy odpowiednie wyrażenia dla mieszaniny. Bezwymiarowe strumienie termodynamiczne możemy teraz określić wzorami

$$i = \frac{J}{4\pi r_0^2 \bar{J}}, \quad e = \frac{E}{4\pi r_0^2 \bar{E}}, \quad \Pi = \frac{P}{4\pi r_0^2 \bar{P}}.$$

Strumień energii w gazie można przedstawić jako sumę 2 składników: strumienia ciepła Q (tzn. strumienia energii w układzie środka masy) i konwekcyjnego strumienia energii

$$(1) \quad E = Q + c_p T J.$$

Wprowadzimy także bezwymiarowy strumień ciepła q

$$q = \frac{Q}{4\pi r_0^2 \bar{E}}.$$

Jako siły termodynamiczne przyjmiemy 3 niezależne wielkości:

$$\Delta T = \frac{T_v - T_l}{T_v}, \quad \Delta p = \frac{p_v - p_s(T_l)}{p_v}, \quad \Delta U = \frac{\Delta u}{v}.$$

Wskaźniki v i l odnoszą się odpowiednio do pary i cieczy, $p_s(T_l)$ oznacza prężność pary nasyconej w temperaturze powierzchni kropki, Δu — prędkość kropki względem gazu w nieskończoności. Wszystkie 3 wprowadzone wyżej wielkości są w myśl przyjętych założeń dużo mniejsze od 1.

Z termodynamiki wiadomo, że przy niewielkich odchyleniach od stanu równowagi strumienie termodynamiczne wyrażają się liniowo przez odpowiednie siły termodynamiczne, przy czym (w ośrodku izotropowym) siły termodynamiczne będące tensorami różnych rzędów nie mogą występować w tym samym wyrażeniu liniowym. Otrzymujemy więc związki:

$$i = \bar{A}\Delta T + \bar{B}\Delta p, \quad e = \bar{C}\Delta T + \bar{D}\Delta p, \quad \Pi = \bar{H}\Delta U.$$

Korzystając z równości (1) można zamiast strumienia energii wprowadzić strumień ciepła

$$q = \bar{K}\Delta T + \bar{L}\Delta p.$$

Tak więc w przybliżeniu liniowym wymiana masy i energii (lub ciepła) z jednej strony, a wymiana pędu z drugiej strony nie są ze sobą sprzężone (zależą od różnych sił termodynamicznych). Znaczy to, że dla kropki poruszającej się z niewielką (względem prędkości termicznej cząsteczek), prędkością, strumienie masy i energii są identyczne, jak dla kropki spoczywającej, jednocześnie zaś siła oporu przy ruchu kropki parującej jest identyczna z oporem, jaki doznaje cząstka nie wymieniająca masy i energii.

Z ogólnych rozważań termodynamicznych wynika, że współczynniki w związkach liniowych między siłami i strumieniami termodynamicznymi są powiązane przez pewne zależności. Zależności te przybierają szczególnie prostą postać (zależności symetrii Onsagera), gdy siły i strumienie termodynamiczne są odpowiednio dobrane (sprzężone); taka sytuacja zachodzi np. wtedy, gdy dla sił termodynamicznych ΔT i Δp jako strumienie termodynamiczne przyjąć J oraz Q . Związki między siłami i strumieniami termodynamicznymi oraz zależności Onsagera dla zjawisk transportu w ośrodku wielofazowym omówio-

no bliżej w [25]. W naszych oznaczeniach zależności między współczynnikami fenomenologicznymi przyjmują postać

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \bar{D} = \bar{A} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \bar{B}$$

i

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \bar{L}.$$

W następnych rozdziałach rozpatrzmy bliżej współczynniki fenomenologiczne dla kropli w różnych zakresach liczb Knudsena.

3. Krople małe ($\text{Kn} \gg 1$)

W tym przypadku zjawiska transportu przebiegają w warunkach swobodnie molekularnych, co znacznie upraszcza analizę zagadnienia. Pierwsze próby rozpatrywania zjawisk w tym zakresie znane są już od dawna (LANGMUIR, HERZ, KNUDSEN, EPSTEIN; por. [7, 9, 10]), jednakże pełniejszą analizę procesów wymiany między kroplą małą a otoczeniem zawierają dopiero stosunkowo niedawne prace BROCKA [1, 2] (dla ośrodka wieloskładnikowego), a także KONORSKIEGO [12] i SZANIAWSKIEGO [24] (dla ośrodka jednoskładnikowego).

Dla dużych liczb Knudsena o intensywności wymiany międzyfazowej decydują wyłącznie zjawiska zachodzące na powierzchni rozdziału faz. Do ujęcia tych zjawisk służą współczynniki kondensacji α , akomodacji energii β_e i akomodacji pędu β_p . Przyjmuje się że część (α) cząsteczek padających na powierzchnię zostaje pochłonięta przez ciecz, pozostała zaś część ulega odbiciu od powierzchni. Ponieważ dysponujemy tylko ograniczonymi informacjami o energii i pędzie cząsteczek odbitych od powierzchni, przyjmuje się zazwyczaj, że ich wartości są zawarte między wartościami skrajnymi odpowiadającymi odbiciu zwierciadlanemu i dyfuzyjnemu, przy czym zmiana wartości poszczególnych strumieni przy odbiciu scharakteryzowana jest przez odpowiedni współczynnik adaptacji zawarty między 0 a 1. Współczynniki te określone są następującymi równościami:

$$\beta_e = \frac{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_s}, \quad \beta_p = \frac{\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_s}.$$

W powyższych wzorach \mathcal{E} oznacza średnią energię, \mathcal{P} średni moduł pędu przypadające na jedną cząsteczkę, wskaźnik i dotyczy cząsteczek padających na powierzchnię, wskaźnik r — cząsteczek odbitych, wskaźnik s charakteryzuje strumień będący w równowadze z powierzchnią. Niekiedy czyni się rozróżnienie między współczynnikami akomodacji β_τ składowej stycznej pędu i β_n składowej normalnej pędu

$$\beta_\tau = \frac{\mathcal{P}_{\tau i} - \mathcal{P}_{\tau r}}{\mathcal{P}_{\tau i}}, \quad \beta_n = \frac{\mathcal{P}_{n i} - \mathcal{P}_{n r}}{\mathcal{P}_{n i} - \mathcal{P}_{n s}},$$

a także między współczynnikami akomodacji β_w wewnętrznych stopni swobody i β_{tr} energii ruchu postępowego

$$\beta_w = \frac{\mathcal{E}_{w i} - \mathcal{E}_{w r}}{\mathcal{E}_{w i} - \mathcal{E}_{w s}}, \quad \beta_{tr} = \frac{\mathcal{E}_{tr i} - \mathcal{E}_{tr r}}{\mathcal{E}_{tr i} - \mathcal{E}_{tr s}}.$$

Wśród cząsteczek poruszających się od powierzchni kropli, oprócz cząsteczek odbitych, wyróżnia się także cząsteczki emitowane przez ciecz. Własności cząsteczek emitowanych zależą wyłącznie od parametrów powierzchni cieczy, nie zależą natomiast od parametrów cząsteczek padających na powierzchnię cieczy (w szczególności emisja z powierzchni zachodzi także i wtedy, gdy na powierzchnię nie padają żadne cząsteczki). Strumienie masy, energii i składowych pędu przenoszone przez cząsteczki emitowane są równe co do modułu odpowiednim strumieniom przenoszonym przez cząsteczki padające w warunkach równowagi.

Tablica 1

	Brock [1], [2]	Konorski [12]	Szaniawski [24]
Strumień masy i	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$
Strumień energii e	—	$-\alpha \Delta p - \left[\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\beta_e \right] \Delta T$	$-\alpha \Delta p - \left[\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha) \left(\frac{4}{4+f_w} \beta_{tr} + \frac{f_w}{4+f_w} \beta_w \right) \right] \Delta T$
Strumień pędu Π	$\left(1 + \frac{\pi}{8} (1-\alpha)\beta_e \right) \Delta U$	$\left\{ 1 + \frac{\pi}{8} [\alpha + (1-\alpha)\beta_{pl}] \right\} \Delta U$	$\left[1 + \frac{(1-\alpha)(\beta_n - \beta_v)}{2} + \frac{\pi}{8} \beta_e (1-\alpha) \right] \Delta U$

W tabelicy 1 podano w ujednoczonym zapisie wyrażenia dla strumieni otrzymane w [1, 2, 12, 24] dla małych różnic ciśnień i temperatur i dla małych prędkości (wyniki BROCKA zlinearyzowano na użytek tej pracy). Przyrosty Δp i ΔT są bezwymiarowymi różnicami ciśnień i temperatur

$$\Delta p = \frac{p_v - p_s(T_l)}{p_v}, \quad \Delta T = \frac{T_v - T_l}{T_v}$$

Wskaźniki v i l odnoszą się odpowiednio do pary i powierzchni cieczy, $p_s(T_l)$ oznacza prężność pary nasyconej odpowiadającą temperaturze T_l , zaś prędkość bezwymiarowa $\Delta U = \frac{3}{4} \frac{\Delta u}{v}$, gdzie Δu oznacza prędkość kropli względem pary, jest dużo mniejsza od 1.

Porównując wyniki różnych autorów zawarte w tabl. 1 należy stwierdzić co następuje:

1. Wyrażenie dla strumieni masy są we wszystkich przypadkach identyczne i stanowią zlinearyzowaną postać znanego wzoru Herza-Knudsen.

2. Dla $\beta_w = \beta_{tr}$, wyrażenia dla strumienia energii także są identyczne.

3. Dla $\beta_n = \beta_v$, wyrażenie dla strumienia pędu z [12] różni się od odpowiednich wyrażeń z [2] i [24]. Ponieważ między omawianymi pracami brak różnic modelowych usprawiedliwiających podobną rozbieżność, za źródło rozbieżności uznać należy — zdaniem autora — błędy rachunkowe w [12].

4. Krople duże ($Kn \ll 1$)

Ze względu na istotną rolę mechanizmów kinetycznych w procesach wymiany, zachodzących na powierzchni kropli, nawet dla $Kn \ll 1$ nie zawsze możliwy jest opis procesów towarzyszących przemianie fazowej, oparty wyłącznie na równaniach ośrodka ciągłego. Można wtedy 1° opisywać zjawiska transportu w całym obszarze otaczającym kroplę za pomocą równań kinetycznych, bądź też 2° przyjąć istnienie przy powierzchni kropli cienkiej — o grubości rzędu kilku dróg swobodnych — warstwy, rządzonej przez mechanizmy kinetyczne (warstwa Knudsena), a w obszarze poza warstwą stosować równania ośrodka ciągłego.

Sytuacja jest odmienna w ośrodku jednoskładnikowym i wieloskładnikowym. W ośrodku wieloskładnikowym czynnikiem ograniczającym strumień masy jest dyfuzja, procesy kinetyczne przy powierzchni dużej kropli nie mają wpływu na strumień masy. Wpływ tych procesów pojawia się dopiero wtedy, gdy rozmiary kropli są porównywalne ze średnią drogą cząsteczek w gazie. Inaczej jest w ośrodku jednoskładnikowym, warstwa kinetyczna może mieć tam istotne znaczenie nawet w przypadku powierzchni płaskiej.

Rozpatrzmy najpierw ośrodek jednoskładnikowy. Pomijając wpływ niewielkiej krzywizny można traktować warstwę Knudsena przy powierzchni dużej kropli analogicznie do warstwy przy powierzchni płaskiej. Mechanizmy rządzące warstwą płaską badali SCHRAGE [18], KUCZEROW i RIKIENGLAZ [13], MURATOWA i ŁABUNCOW [16]. Metody stosowane przez poszczególnych autorów są z konieczności uproszczone, oparte na mniej lub więcej arbitralnych założeniach; nie też dziwnego, że i wyniki nie są identyczne.

SCHRAGE przyjmuje, że funkcja rozkładu prędkości cząsteczek bezpośrednio przy powierzchni ma postać maxwellowską o prędkości makroskopowej prostopadłej do powierzchni. Zwrot wektora prędkości zależy od rodzaju procesu fizycznego — parowania lub kondensacji. Na podstawie przyjętej funkcji rozkładu w [18] znaleziono strumień masy cząsteczek padających na powierzchnię od strony pary. Znając strumień masy cząsteczek emitowanych przez powierzchnię (zależny tylko od własności powierzchni) wyznaczono wypadkowy strumień masy. W tablicy 2 podano zależność strumienia masy od małych różnic ciśnienia i temperatury na warstwie:

$$\Delta_{1P} = \frac{p_{v1} - p_s(T_1)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta_{1T} = \frac{T_{v1} - T_1}{T_{v\infty}}.$$

Wielkości p_{v1} i T_{v1} oznaczają ciśnienie i temperaturę na brzegu warstwy Knudsena. Różnica między przemianą fazową na powierzchni kropli w warunkach swobodnie molekularnych a przemianą fazową na powierzchni płaskiej polega m.in. na tym, że w przypadku pierwszym funkcja rozkładu prędkości cząsteczek odpowiada spoczynkowi (cząsteczki padają na powierzchnię z nieskończoności), w drugim natomiast cząsteczki padające na powierzchnię uczestniczą w ruchu makroskopowym o prędkości prostopadłej do powierzchni. Wskutek tego odpowiednie współczynniki w wyrażeniu dla strumienia masy są w przypadku drugim większe niż w przypadku pierwszym (dla $\alpha = 1$ — dwukrotnie większe).

Podobną metodę zastosowano w pracy [13]. Autorzy przyjęli tu funkcję rozkładu prędkości cząsteczek w przybliżeniu 13 momentów i wyznaczyli strumień masy i energii. Jednakże w przybliżeniu liniowym rozkład taki sprowadza się do maxwellowskiego i wyniki (we wspólnym zakresie) są identyczne jak w [18].

Inny, nie tak uproszczony, sposób postępowania przyjęli autorzy [16]. Zamiast zakładać gotową funkcję rozkładu prędkości cząsteczek przy powierzchni kropli, zastosowali oni metodę momentów do rozwiązywania równania Boltzmanna (a także równania modelowego Krooka) w przybliżeniu liniowym. Zadanie to rozwiązano w wielu wersjach w przybliżeniu 6 i 8 momentów, dobierając różne kombinacje momentów. Jako funkcję rozkładu przyjęto w przybliżeniu 6 momentów «dwustronny maxwellian» (o różnych parametrach w 2 różnych półprzestrzeniach prędkości, odpowiadających ruchowi czą-

Tablica 2

	Schrage [18]	Kuczerow, Rikienglaz [13]	Muratowa, Łabuncow [16]
Strumień masy i	$-\frac{2\alpha}{2-\alpha}\Delta_1 p +$ $+\frac{\alpha}{2-\alpha}\Delta_1 T$	dla $\alpha = 1$ $-2\Delta_1 p + \Delta_1 T$	$-\frac{2,21\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p + \frac{0,91\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $-1,83\Delta_1 p + 0,75\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$
Strumień energii e dla $\kappa = \frac{5}{3}, \beta_e = 1$	—	dla $\alpha = 1$ $-2\Delta_1 p - \Delta_1 T$	$-\frac{2,30\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p - \frac{3,65-2,59\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $-1,90\Delta_1 p - 0,88\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$
Strumień ciepła q dla $\kappa = \frac{5}{3}, \beta_e = 1$	—	dla $\alpha = 1$ $\frac{1}{2}\Delta_1 p - \frac{9}{4}\Delta_1 T$	$\frac{0,47\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p - \frac{3,65-1,45\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $0,39\Delta_1 p - 1,81\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$

steczek ku powierzchni i od powierzchni), w przybliżeniu 8 momentów także maxwellian mnożony przez pewien wielomian składowych i/lub modułu prędkości. Przyjęto także maxwellowski potencjał oddziaływania wzajemnego cząsteczek.

Najlepsze z otrzymanych w [16] wartości współczynników (rekomendowane przez autorów) podano we wzorach w tabl. 2. Ogólnie stwierdzić należy, że rozbieżności między poszczególnymi wersjami (odpowiadającymi różnym zestawom momentów i różnym równaniom — Boltzmanna i Krooka) są niezbyt duże — mniejsze niż rozbieżności między wynikami [16] i [13].

Otrzymane w wymienionych pracach zależności liniowe między strumieniami masy i ciepła (lub energii) a różnicami ciśnienia i temperatury na warstwie Knudsenowa można przedstawić w postaci ogólnej

$$(2) \quad \Delta_1 p = Ai + Bq, \quad \Delta_1 T = Ci + Dq.$$

Stosując zależności tego typu dla warstwy przy powierzchni dużej kropli spróbujemy wyznaczyć w sposób uproszczony liniowe zależności strumieni masy i ciepła od różnic ciśnienia i temperatury między nieskończonością a powierzchnią kropli

$$\Delta p = \frac{p_{v\infty} - p_s(T_l)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta T = \frac{T_{v\infty} - T_l}{T_{v\infty}}.$$

Na zewnątrz warstwy przyjmiemy równania ośrodka ciągłego w postaci

$$(3) \quad \begin{cases} \rho u r^2 = \text{const}, & \frac{dp}{dr} + \rho u \frac{du}{dr} = 0, \\ \rho u \frac{d}{dr} \left(c_p T - \frac{u^2}{2} \right) + \text{div } Q = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując układ tych 3 równań wraz z równaniami Clapeyrona i Fouriera znajdujemy dla małych różnic ciśnienia i temperatury

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta_2 p = \frac{1}{4\pi} i^2, \\ \Delta_2 T = -\frac{1}{\varepsilon} \left(q + \frac{1}{10\pi} i^3 \right), \end{cases}$$

gdzie

$$\Delta_2 p = \frac{p_{v\infty} - p_{v1}}{p_{v\infty}}, \quad \Delta_2 T = \frac{T_\infty - T_1}{T_\infty},$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi K \eta}{\text{Pr}} \ll 1.$$

Liczbę Prandtla można wyrazić w sposób przybliżony przez wykładnik adiabaty

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k} \simeq \frac{4\kappa}{9\kappa - 5},$$

gdzie k oznacza współczynnik przewodzenia temperatury.

Różnice (bezwymiarowe) ciśnienia Δp i temperatury ΔT między nieskończonością a powierzchnią kropli otrzymujemy dodając odpowiednie przyrosty wyznaczone przez (2) i (4). Jeśli pominąć w otrzymanych wyrażeniach wielkości małe wyższego rzędu, to otrzymujemy układ równań liniowych względem i oraz q , którego rozwiązanie ma postać

$$(5) \quad i = \frac{\Delta p}{A} + \frac{B\varepsilon}{A} \Delta T, \quad q = -\varepsilon \left(\Delta T - \frac{C}{A} \Delta p \right).$$

Należy zauważyć, że pominięcie wyrazów małych wyższego rzędu doprowadziło do wyniku (5), który można otrzymać także prostszą drogą, zastępując układ (3) przez samo tylko równanie przewodzenia ciepła.

Ponieważ współczynniki A , B , C są rzędu 1, zaś $\varepsilon \ll 1$, przeto z (5) wynikają 2 przypadki szczególne:

1. $\varepsilon \Delta T$ jest małą rzędu wyższego niż Δp , wtedy

$$(6) \quad i = \frac{\Delta p}{A}, \quad q = -\varepsilon \left(\Delta T - \frac{C}{A} \Delta p \right).$$

Strumień masy i zależy tylko od różnicy ciśnień i jest dużo większy od strumienia ciepła q .

2. Δp i $\varepsilon \Delta T$ są tego samego rzędu ($\Delta T \gg \Delta p$), wtedy

$$(7) \quad i = \frac{\Delta p}{A} + \frac{B\varepsilon}{A} \Delta T, \quad q = -\varepsilon \Delta T.$$

Strumień ciepła jest wyznaczony wyłącznie przez przewodnictwo w obszarze zewnętrznym. Przyrosty ciśnienia i temperatury w warstwie powierzchniowej są małymi rzędu wyższego niż przyrost temperatury poza warstwą.

Dotychczas była mowa o transporcie masy i ciepła w ośrodku jednoskładnikowym. Prostszy i mniej kontrowersyjny jest opis zjawisk transportu w ośrodku dwuskładnikowym. Strumień ciepła jest wtedy dany przez równanie przewodnictwa i ma postać identyczną jak w (7), strumień masy natomiast jest określony przez wzór Stefana (p. [9]):

$$J = -4\pi r_0 N D m_v \left[\ln \left(1 - \frac{N_{v0}}{N} \right) - \ln \left(1 - \frac{N_{v\infty}}{N} \right) \right],$$

gdzie m oznacza masę molową, D — współczynnik dyfuzji, N — zaś stężenie molowe, przy czym $N_v + N_g = N = \text{const}$, wskaźnik 0 przy N_v i ρ_v odpowiada wartościom tych wielkości przy powierzchni kropli. Wzór Stefana dla $\frac{N_v}{N_g} \rightarrow 0$ przechodzi w znany wzór Maxwella

$$J = -4\pi r_0 D (\rho_\infty - \rho_{v0}).$$

Należy jednak zauważyć, że wzór Stefana nie zapewnia poprawnego przejścia granicznego dla $\frac{N_g}{N_v} \rightarrow 0$.

Strumień pędu niezależnie od liczby składników w ośrodku jest dla $\text{Kn} \ll 1$ określony przez wzór Stokesa

$$P = 6\pi r_0 \rho v \Delta u.$$

Jeżeli zamiast J i P wprowadzić strumienie bezwymiarowe i oraz Π , to wzory Stefana i Stokesa przyjmują postać:

$$i = -2\text{Kn} \frac{D}{\nu} \frac{m_v}{m} \left[\ln \left(1 - \frac{N_{v0}}{N} \right) - \ln \left(1 - \frac{N_{v\infty}}{N} \right) \right],$$

$$\Pi = \frac{9}{4} \text{Kn} \Delta U.$$

5. Zakres pośredni

Zadanie opisu zjawisk transportu wokół parującej kropli jest najbardziej złożone w zakresie pośrednich liczb Knudsen, gdzie zawodzi zarówno model swobodnie molekularny, jak i model ośrodka ciągłego. Wachlarz metod analitycznych stosowanych w tym zakresie jest bardzo rozległy. Jednym z bardzo prostych, a zarazem dość uniwersalnym sposobem jest zastosowanie tzw. uniwersalnego wzoru SHERMANA [21], który w wielu przypadkach daje zadowalające wyniki. Zgodnie z tym wzorem pewną wielkość Φ opisującą zjawiska transportu w gazie można przedstawić w postaci

$$(8) \quad \Phi = \frac{\Phi_c \cdot \Phi_k}{\Phi_c + \Phi_k},$$

gdzie wskaźniki c i k odnoszą się odpowiednio do modelu ciągłego i swobodnie molekularnego. Wzór ten zawiera pośrednio liczbę Knudsen i zapewnia przejście ciągłe od warunków swobodnie molekularnych do ośrodka ciągłego.

Niżej rozpatrzmy kolejno różne metody i otrzymane za ich pomocą wyniki dla strumienia masy, ciepła i pędu.

Strumień masy. SHANKAR [19] wyznaczył strumień masy przy parowaniu (kondensacji) kropli w ośrodku jedno- lub dwuskładnikowym w szerokim zakresie liczb Knudsen. Przyjęta przez niego metoda polega na zastosowaniu ujęcia kinetycznego w całym obszarze otaczającym kroplę, a nie tylko w cienkiej warstwie przy powierzchni cieczy. SHANKAR rozwiązuje równanie Boltzmanna metodą momentów Leesa. Funkcja rozkładu dla każdego ze składników ma postać rozważanego już poprzednio «dwustronnego maxwellianu», którego jeden człon obowiązuje wewnątrz pewnego obszaru przestrzeni prędkości zwanego «stożkiem widzenia», drugi zaś na zewnątrz tego obszaru. Dla każdego ze składników występują 4 niewiadome (wielkości typu gęstości i temperatury w każdej z 2 części przestrzeni prędkości). Odpowiedni układ 4 (dla każdego ze składników równań) zawiera oprócz trzech momentów podstawowych także strumień ciepła jako moment rzędu wyższego. Równania rozwiązywane są w przybliżeniu liniowym. Przyjmuje się, że przy oddziaływaniu z powierzchnią kropli cząsteczki gazu nie biorącego udziału w przemianie fazowej ulegają odbiciu dyfuzyjnemu, natomiast dla cząsteczek pary istnieje pewien nieokreślony współczynnik kondensacji i współczynnik akomodacji energii. Zakłada się maxwellowski model oddziaływania wzajemnego cząsteczek. Ponadto przyjmuje się, że temperatury obu składników są jednakowe, co pozwala na pominięcie jednego z 8 równań.

Dla strumienia masy SHANKAR otrzymuje zależność

$$(9) \quad i = \frac{\frac{1}{2} \Delta T - (1 + c_5 W_v + c_6 W_{vg}) \Delta p}{1 + c_1 W_v + c_2 W_{vg} + c_3 W_v W_{vg} + c_4 W_{vg}^2} \alpha,$$

gdzie

$$\Delta p = \frac{p_{v\infty} - p_s(T_1)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta T = \frac{T_\infty - T_1}{T_\infty},$$

$$W_v = \frac{r}{l}, \quad W_{vg} = \frac{r_0 \sqrt{2R_v T}}{\pi D} \frac{n_g}{n_v + n_g},$$

$$b_1 = -\frac{2}{5} \left[\frac{5m_v}{m_v + m_g} - 10 \frac{m_v}{m_g} \frac{mg^2}{m_v + m_g} + 10 \frac{m_v m_g}{(m_v + m_g)^2} \right],$$

$$b_2 = -\frac{2}{5} \left[-6 + \frac{12m_g}{m_v + m_g} - 8 \frac{A_2}{A_1} \frac{m_g}{m_g + m_v} - 8 \frac{m_g^2}{(m_g + m_v)^2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \right],$$

$$b_3 = -\frac{16}{5} \frac{m_v \sqrt{m_g m_v}}{(m_v + m_g)^2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right),$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \alpha + \frac{2}{15} \beta \epsilon,$$

$$c_2 = b_3 - \frac{1}{4} \alpha (b_1 + b_3 - 3) + \frac{1}{4} \beta (b_2 - b_3),$$

$$c_3 = \frac{2}{15} \alpha \beta \epsilon,$$

$$c_4 = \frac{\alpha}{2} \left[b_3 + \frac{1}{2} \beta_e (b_2 - b_3) \right],$$

$$c_4 = \frac{4}{15} \beta_e,$$

$$c_6 = b_3 + \frac{1}{2} \beta_e (b_2 - b_3).$$

W powyższych wzorach l oznacza średnią drogę cząsteczek pary w nieobecności drugiego składnika gazowego, n — gęstość liczbowa, D — współczynnik dyfuzji, m — masę cząsteczkową. Stałe A_1 i A_2 są wyznaczone z całek zderzeń, wartości tych stałych nie zostały podane w pracy [19]. Autor odsyła czytelnika do swej wcześniejszej, trudno dostępnej pracy [20].

Zbadajmy w co przechodzi wzór (9) w przypadkach asymptotycznych. W warunkach swobodnie molekularnych ($W_v \rightarrow 0$, $W_{vg} \rightarrow 0$) otrzymujemy zależność identyczną z odpowiednim wzorem w tabl. 1. Obecność dodatkowego składnika gazowego nie ma zatem wpływu na strumień masy.

Dla kropeł dużych w ośrodku dwuskładnikowym ($W_v \rightarrow \infty$, $W_{vg} \rightarrow \infty$) wzór (9) przechodzi we wzór Maxwella z poprawką hydrodynamiczną. W przeciwieństwie do wzoru Słefana, wzór (9) zapewnia sensowne przejście od ośrodka dwuskładnikowego do jednoskładnikowego.

Dla kropeł dużych w ośrodku jednoskładnikowym ($W_v \rightarrow \infty$, $W_{vg} \rightarrow 0$) wzór (9) upraszcza się do postaci

$$i = -\frac{8\alpha\beta_e}{5\alpha + 4\beta_e} \Delta p.$$

Strumień masy nie zależy w tym przypadku od różnicy temperatur. Podobną zależność

$$i = \frac{\Delta p}{A}$$

otrzymaliśmy już poprzednio (p. (6)). Jeżeli ze związków (2) i tabl. 2 wyznaczyć wartość A , to okazuje się, że dla $\alpha = \beta_e = 1$ otrzymujemy $1/A = -2,9$ na podstawie [16] oraz $1/A = -4$ na podstawie [13]. Wartość analogicznego współczynnika wyznaczona za pomocą wzoru (9) wynosi $-8/9$.

Należy zauważyć, że w przyjętej przez SHANKARA funkcji rozkładu każdy człon «dwustronnego maxwellianu» odpowiada warunkom gazu spoczywającego (co jednak nie znaczy, że gaz jako całość pozostaje w spoczynku), tzn. zależy tylko od 2 parametrów typu gęstości i temperatury. W odpowiednich członach przyjmowanych w [16] występował co najmniej jeszcze 1 parametr typu prędkości makroskopowej. Dzięki temu uproszczeniu SHANKAR otrzymuje układ równań, który potrafi rozwiązać analitycznie. Dla ośrodka jednoskładnikowego układ taki zawiera 4 równania. Dodanie dodatkowej zmiennej w istotny sposób komplikuje równania; w [16] dla prostszego geometrycznie przypadku wyniki otrzymano na drodze numerycznej.

Skutki przyjęcia uproszczonej funkcji rozkładu uwidaczniają się przy analizie przypadku asymptotycznego, odpowiadającego parowaniu dużych kropeł w ośrodku jednoskładniko-

wym. W modelu Shankara (o 4 parametrach swobodnych) nie tworzy się bowiem przy powierzchni kropli warstwa Knudsena, co jest prawdopodobną przyczyną otrzymania za niżonych wartości strumienia masy, o czym była mowa poprzednio.

Strumień ciepła. W pracach, w których obliczano strumień ciepła w zakresie pośrednich liczb Knudsena z reguły nie uwzględniano przemiany fazowej ($\alpha = 0$). W przypadkach asymptotycznych mamy wtedy dla $\text{Kn} \rightarrow \infty$

$$q_k = \beta_e \Delta T,$$

i dla $\text{Kn} \rightarrow 0$

$$q_c = \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \Delta T.$$

Na podstawie uniwersalnego wzoru SHERMANA (8), otrzymujemy dla dowolnego Kn

$$\frac{q_c}{q} = 1 + \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\beta_e \text{Pr}}.$$

Nieco inną zależność podają SPRINGER i TSAI [23], mianowicie

$$\frac{q_c}{q} = \frac{1}{1+\text{Kn}} + \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\beta_e \text{Pr}}.$$

Wyniki doświadczalne zawiera praca TAKAO [26]. Najlepszą zgodność z doświadczeniem zapewnia metoda wariacyjna Cercignaniego i współpracowników [3]. Metoda ta dostarcza wyników numerycznych, które zostały obliczone przez autorów dla $\beta_e = 1$.

Ze względu na sprzężenie występujące między strumieniami masy i ciepła (energii) wymienione tu wyniki mogą mieć jedynie ograniczone zastosowanie do przypadku parujących kropelek.

Strumień pędu. Wymianę pędu między kroplą a gazem dla małych Re badał MILLIKAN [15]. Na podstawie doświadczeń z kropelkami oleju w powietrzu, MILLIKAN podał wzór empiryczny na siłę oporu kropli w szerokim zakresie Kn . W naszych oznaczeniach wzór ten przyjmuje postać

$$\Pi = \frac{\Pi_c}{1 + a \cdot \text{Kn} + b \cdot \text{Kn} \exp\left(-\frac{c}{\text{Kn}}\right)},$$

gdzie $a = 1,234$, $b = 0,414$, $c = 0,876$.

Dla $\text{Kn} \rightarrow \infty$ otrzymujemy zależność asymptotyczną

$$(10) \quad \Pi_k = \frac{\Pi_c}{(a+b)\text{Kn}}.$$

Uniwersalny wzór Shermana, po uwzględnieniu (10), przyjmuje postać

$$\Pi = \frac{\Pi_c}{1 + (a+b)\text{Kn}}.$$

CERCIGNANI i PAGANI [3] stosując opracowaną przez siebie metodę wariacyjną obliczyli numerycznie siłę oporu sfery przyjmując, że współczynniki adaptacji składowych pędu są równe 1. Otrzymane przez nich wyniki nie różnią się więcej niż o 2% od wzoru doświadczalnego Millikana. Nieco większe (sięgające 10%) odchylenia daje wzór Shermana.

6. Współczynniki kondensacji i adaptacji

W wielu z przedstawionych wyżej wzorów dla strumieni termodynamicznych występują współczynniki kondensacji i adaptacji energii i pędu, które charakteryzują oddziaływanie cząsteczek z powierzchnią cieczy. Wyznaczenie doświadczalne tych współczynników nie zawsze jest łatwe. Porównanie wyników doświadczalnych (np. MILLIKAN, TAKAO) z teorią sugeruje, że współczynniki adaptacji energii i pędu są bliskie 1. Większe trudności powstają przy wyznaczaniu współczynnika kondensacji (por. np. [17]). Pomiar dokonywane przez różnych autorów prowadzą częstokroć do bardzo różnych wyników. Szczególnie wielkie rozbieżności wykazują pomiary współczynnika kondensacji wody, który według różnych autorów wynosi od 0,002 do 1. Wydaje się, że istotny wpływ na wartość współczynnika kondensacji mogą wywierać różne trudno poddające się kontroli czynniki uboczne, zwłaszcza czystość powierzchni cieczy. W tych warunkach dla uzyskania większej jasności w tej sprawie potrzebne jest prowadzenie dalszych badań zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. R. BROCK, *Evaporation and condensation of spherical bodies in non-continuum regimes*, J. Phys. Chemistry, **68**, 10 (1964).
2. J. R. BROCK, *Molecule drag on evaporating or condensating spheres*, J. Phys. Chemistry, **68**, 10 (1964).
3. C. CERCIGNANI, *Mathematical methods in kinetic theory*, London 1969.
4. Г. В. ЦИКЛАУРИ, В. С. ДАНИЛИН, Л. И. СЕЛЕЗНЕВ, *Адиабатные двухфазные течения*, Москва 1973.
5. S. CHAPMAN, T. G. COWLING, *The mathematical theory of nonuniform gases*, Cambridge 1952.
6. М. Ю. ДЕЙЧ, Г. А. ФИЛИППОВ, *Газодинамика двухфазных сред*, Москва 1968.
7. P. S. ERSTEIN, *On the resistance experienced by spheres in their motion through gases*, Phys. Rev., **23**, 6 (1924).
8. A. FORTIER, *Mécanique des suspensions*, Paris 1967.
9. Н. А. ФУКС, *Испарение и рост капель в газообразной среде*, Москва 1958.
10. Н. А. ФУКС, А. Г. СУТУГИН, *Высокодисперсные аэрозоли*, Москва 1969.
11. М. Н. КОГАН, *Динамика разреженного газа*, Москва 1967.
12. A. KONORSKI, *Zjawiska wymiany masy i energii w przepływie czynnika 2-fazowego*, Prace IMP, z. 29—31, 1966.
13. Р. Ю. КУЧЕРОВ, Л. Е. РИЦЕНГЛАЗ, *О гидродинамических условиях при испарении и конденсации*, Ж. exper. и теор. физ., **37**, 1 (1959).
14. В. А. МАМАЕВ, Г. Э. ОДИЩАРИЯ, Н. И. СЕМЕНОВ, А. А. ТОЧИГИН, *Газодинамика газожидкостных смесей в трубах*, Москва 1969.
15. R. A. MILLIKAN, *The general law of fall of a small spherical body through a gas...*, Phys. Rev., **22**, 1 (1923).
16. Т. М. МУРАТОВА, Д. А. ЛАБУНЦОВ, *Кинетический анализ процессов испарения и конденсации*, Теплофиз. выс. темп., **4**, 5 (1969).
17. Г. А. САЛТАНОВ, *Сверхзвуковые двухфазные течения*, Минск 1972.
18. R. W. SCHRAGE, *A theoretical study of interphase mass transfer*, New York 1953.
19. P. N. SHANKAR, *A kinetic theory of steady condensation*, J. Fluid Mech., **40**, 2 (1970).
20. P. N. SHANKAR, G. E. Co. R. and D. Center Report, n. 69-C-174, 1969.
21. F. S. SHERMAN, *A survey of experimental results and methods for the transition regime of rarefied gas dynamics*; artykuł w zbiorze Rarefied Gas Dynamics (red. J. A. Laurman), v. 2, New York 1963.

22. S. L. SOO, *Fluid dynamics of multiphase systems*, Urbana 1967.
23. G. SPRINGER, S. TSAI, *Phys. Fluids*, **8**, (1965) 1361.
24. A. SZANIAWSKI, *Rozchodzenie się fal akustycznych w kropelkowym modelu pary wilgotnej*, *Biuletyn IMP* 40/668(72).
25. A. SZANIAWSKI, *Flow of multiphase mixture with one coherent liquid or gaseous phase*, *AMS*, **24**, 4 (1972).
26. K. TAKAO, *Heat transfer from a sphere in a rarefied gas*; artykuł w zbiorze *Rarefied Gas Dynamics* (red. A. Laurman), v. 2, New York 1963.
27. G. B. WALLIS, *One-dimensional two-phase flow*, New York.

Р е з ю м е

ОБМЕН МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ МЕЖДУ ШАРОВИДНОЙ ЧАСТИЦЕЙ И ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ

В уравнениях течения многофазных смесей (см. напр. [25]) имеются зависимости между термодинамическими силами генерирующими фазовые переходы и потоками массы, энергии и количества движения. Для небольших отклонений от равновесия эти зависимости имеют линейный характер. Применяя уравнения для конкретного вида многофазной среды, необходимо знать коэффициенты при соответствующих линейных зависимостях. Эти коэффициенты зависят в частности от геометрической структуры многофазной среды и от пределов изменения числа Кнудсена.

В данной статье собраны и систематически приведены литературные данные, относящиеся к линейным зависимостям между термодинамическими силами и термодинамическими потоками для шаровой частицы движущейся с малой скоростью в условиях близких к термодинамическому равновесию. Представленные результаты были получены для различных моделей среды и относятся к полному диапазону чисел Кнудсена.

S u m m a r y

MASS, MOMENTUM AND ENERGY EXCHANGE BETWEEN A SPHERICAL PARTICLE AND GASEOUS MEDIUM

To the equations of flow of multiphase mixture (see f.e. [25]) enter the relations between thermodynamic forces generating the phase change, and the mass, energy and momentum fluxes. For the mixture near the equilibrium state these relations are linear. Before applying the flow equations to any specific medium, one should know the coefficients in these relations. The coefficients depend on the geometrical structure of the multiphase medium and on the range of Knudsen number.

In the paper such coefficients, obtained by different authors for the spherical particle moving with small velocity in the gas medium near the thermodynamic equilibrium, are reviewed in a systematical manner. The results were obtained on the basis of different models and cover the full range of the Knudsen number.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1973 r.