

## RÓWNOWAGA I STATECZNOŚĆ PODŁUŻNA SKOCZKA NARCIARSKIEGO W LOCIE\*

JERZY MARYNIAK I BOGDAN KRASNOWSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie równowagi i stateczności podłużnej skoczka narciarskiego na części toru stanowiącej swobodny lot. Skoczek narciarski stanowi swobodny obiekt latający, złożony z człowieka i nart, na który działają siły grawitacyjne oraz siły i momenty aerodynamiczne.

Porównując pierwsze skoki narciarskie wykonane w 1860 r. przez Norwega Nordheima o długości 19 m na skoczni Brukenberg z lotem Manfreda Wolfa (NRD) 165 m wykonanym w roku 1969 na skoczni mamuciej w Planicy, należy zdawać sobie sprawę z tego, że na współczesne osiągnięcia wpływ mają badania naukowe.

Pierwsze badania modeli skoczków w tunelu aerodynamicznym wykonał w 1924 r. Szwajcar Reinhardt STRAUMANN. Norwegowie wykorzystali praktycznie badania STRAUMANNA i na Olimpiadzie w Chamonix w 1924 r. wprowadzili styl «aerodynamiczny», nazwany później norweskim, z dużym wychyleniem do przodu (Bonna), a nawet z załamaniem w biodrach (Thains). Pozwoliło to Thamsowi, poza konkursem, ustanowić rekord świata 58,5 m [4]. Wyniki otrzymane w badaniach modelowych STRAUMANN potwierdził w roku 1955 badaniami aerodynamicznymi przeprowadzonymi na skoczkach narciarskich umieszczonych w tunelu aerodynamicznym [13].

Następnie badania aerodynamiczne narciarzy były i są prowadzone w szeregu krajów. W Polsce badania aerodynamiczne modeli skoczków narciarskich były wykonywane w Katedrze Aerodynamiki Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej oraz narciarzy w pozycji zjazdowej w Instytucie Lotnictwa [12]. Wyniki tych badań nie zawierały wszystkich charakterystyk potrzebnych do obliczeń dynamicznych skoczka, co było powodem przeprowadzenia przez autorów własnych badań aerodynamicznych przedstawionych w niniejszej pracy.

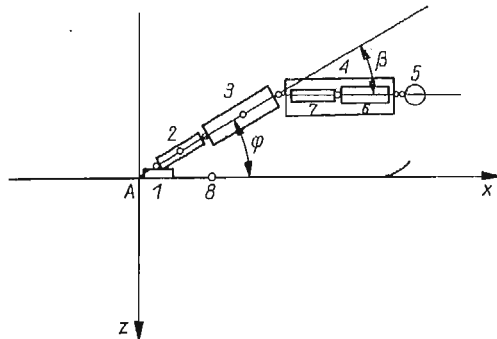
Dotychczas zwracano dużą uwagę na zagadnienia aerodynamiczne dążąc do opracowania idealnej sylwetki skoczka narciarskiego, wykazującej maksymalną doskonałość aerodynamiczną, tj. maksymalny stosunek siły nośnej do oporu aerodynamicznego. Skok narciarski i lot narciarski jest zjawiskiem dynamicznym i należy rozważać równowagę sił i momentów zarówno aerodynamicznych, jak i pochodzących od sił ciężkości. Oba powyższe czynniki decydują o sylwetce skoczka zapewniającej równowagę i stateczność względem położenia równowagi.

Przedstawiona praca stanowi potraktowanie skoczka narciarskiego jako obiektu latającego, szybującego w powietrzu jak klasyczny aparat latający — szybowiec, do którego badań mogą być zastosowane metody mechaniki lotu samolotów.

\* Fragmenty pracy były przedstawione na I Krajowym Seminarium Biomechaniki, Warszawa AWF 1973 r. i I Ogólnopolskim Sympozjum «Systemy — Modelowanie — Sterowanie», Zakopane 1973 r.

W pracy przyjęto następujące założenia:

- człowiek traktowany jest jako sztywny układ dyskretny złożony z 12 mas (rys. 1),
- narty sztywne o stałym rozstawie,
- konfiguracja człowieka określona względem płaszczyzny nart kątami  $\varphi$  i  $\beta$  (rys. 1),
- powietrze stanowi ośrodek spokojny (bezwietrzny),
- wysokość skoczni nad poziomem morza stała, tzn. stała gęstość powietrza w czasie całego skoku  $\rho = \text{const}$ .



Rys. 1. Dyskretny model narciarza jako układ 12 mas oraz kąty określające konfigurację

W pracy rozpatrzono zagadnienia równowagi i stateczności podłużnej skoczka narciarskiego, tzn. rozważono ruchy zachodzące w płaszczyźnie symetrii zgodnej z kierunkiem sił grawitacyjnych. Skoczka narciarskiego traktowano jako układ mechaniczny o trzech stopniach swobody: zmiana prędkości podłużnej  $u$ , zmiana prędkości pionowej  $w$ , zmiana kąta pochylecia  $\vartheta$ . Założono, że skoczek stanowi w danej chwili, dla określonej konfiguracji ciała, układ sztywny poruszający się w spokojnym powietrzu w pobliżu ziemi (rys. 1).

## 2. Siły i momenty aerodynamiczne

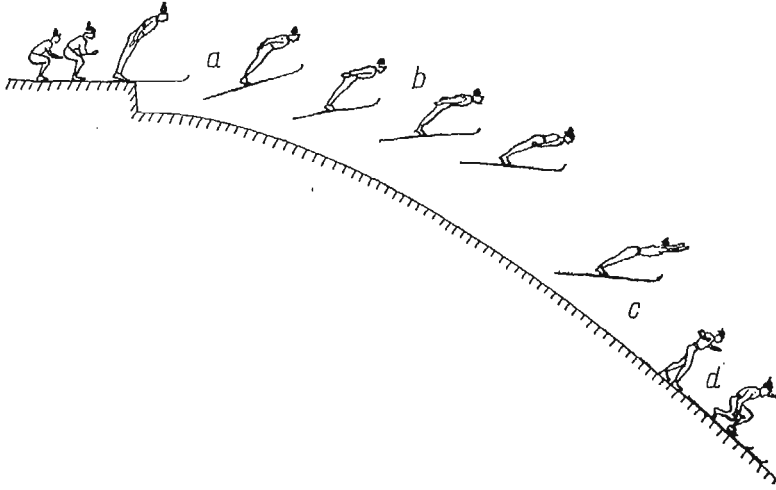
Na skoczka narciarskiego poruszającego się w powietrzu działają siły i momenty aerodynamiczne proporcjonalne do kwadratu prędkości i malejące wraz z wysokością proporcjonalnie do zmian gęstości powietrza. Dlatego w przypadku skoków i lotów narciarskich, przy których prędkości skoczków dochodzą do  $30 \div 35$  m/s, celowe jest szczególowsze rozeznanie zachodzących przy tym zjawisk aerodynamicznych oraz ilościowe ujęcie ich skutków.

Skoczek narciarski jest szczególnym obiektem latającym, bowiem jest to człowiek nie osłonięty pojazdem. Konfiguracja ciała skoczka i jego usytuowanie względem nart ma szczególnie duże znaczenie nie tylko ze względu na poprawienie wyczynu sportowego, ale również zwiększenie bezpieczeństwa w tej dziedzinie sportu.

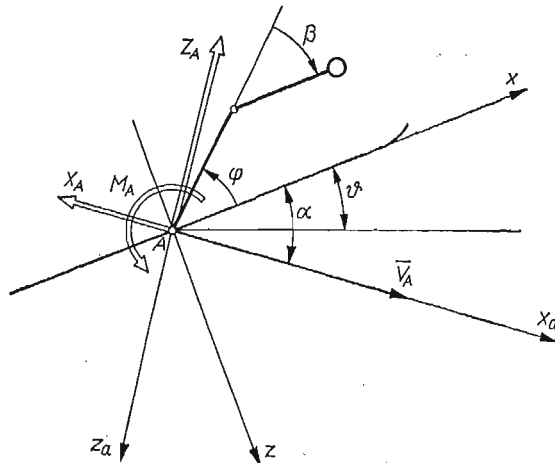
Konfiguracja ciała zmienia się w czasie jednego skoku, (rys. 2), jak również w zależności od prędkości i «stylu» skoczka. Z powyższych względów celowe jest przebadanie różnych sylwetek i przy różnych kątach natarcia.

W celu określenia sił i momentów aerodynamicznych wykonano model skoczka narciarskiego wraz z nartami. Sztywny model skoczka posiadał możliwości zmiany konfiguracji dzięki ruchomym stawom biodrowym i skokowym. Dzięki temu można było zbadać w tunelu aerodynamicznym kilka sylwetek skoczka.

Dla określenia położenia modelu skoczka względem nart obrano współrzędne kątowe  $\varphi$  i  $\beta$  (rys. 3).

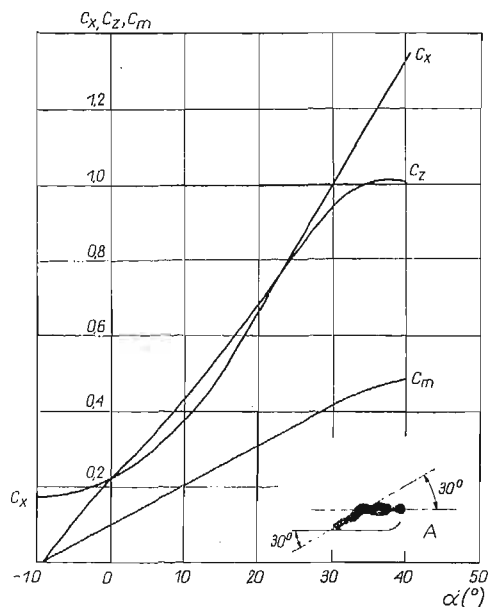


Rys. 2. Zmiana sylwetki skoczka w czasie lotu: *a* — faza odbicia i formowania odpowiedniej sylwetki, *b* — właściwy lot, *c* — przygotowanie do lądowania, *d* — lądowanie

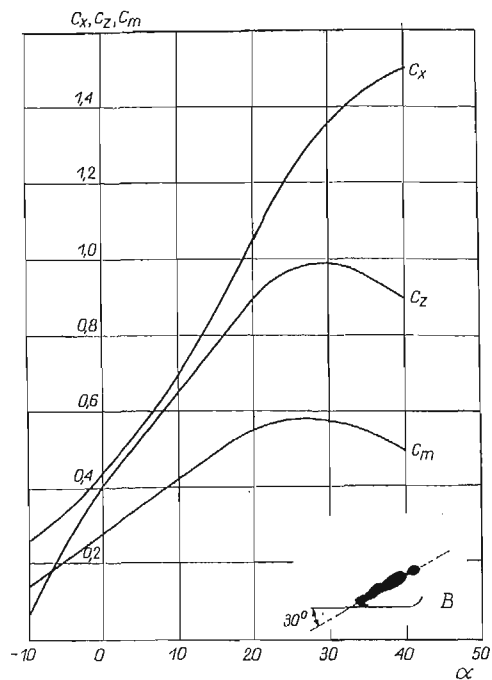


Rys. 3. Konfiguracja skoczka narciarskiego oraz siły i momenty aerodynamiczne, działające na skoczka w locie

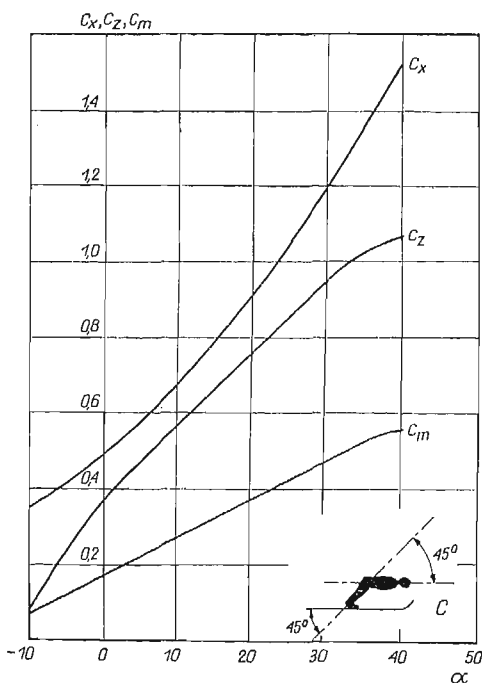
Bezwymiarowe współczynniki sił i momentów aerodynamicznych wyznaczono dla czterech konfiguracji ciała ( $\varphi$ ,  $\beta$ ) w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  (rys. 3) przy czym kąt  $\theta$  określa położenie narciarza względem poziomu.



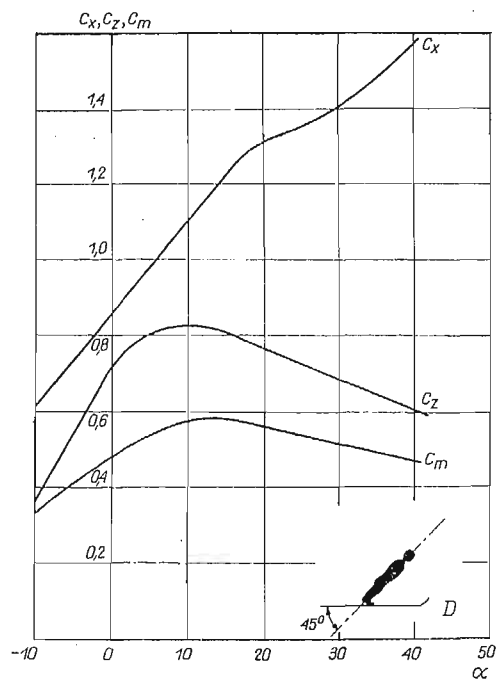
Rys. 4. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu  $C_x$ , siły nośnej  $C_z$  i momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji narciarza A,  $\varphi = 30^\circ$  i  $\beta = 30^\circ$



Rys. 5. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu  $C_x$ , siły nośnej  $C_z$  i momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji narciarza B,  $\varphi = 30^\circ$  i  $\beta = 0^\circ$



Rys. 6. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu  $C_x$ , siły nośnej  $C_z$  i momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji narciarza C,  $\varphi = 45^\circ$  i  $\beta = 45^\circ$



Rys. 7. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu  $C_x$ , siły nośnej  $C_z$  i momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji narciarza D,  $\varphi = 45^\circ$  i  $\beta = 0^\circ$

Siły i momenty aerodynamiczne opisane są następującymi zależnościami:  
siła nośna

$$(1) \quad Z_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z,$$

opór aerodynamiczny

$$(2) \quad X_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x,$$

moment pochylający

$$(3) \quad M_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_m,$$

gdzie

$C_x, C_z, C_m$  bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu, siły nośnej i momentu pochylającego,

$V$  prędkość lotu, styczna do toru,

$S$  powierzchnia odniesienia — powierzchnia nart,

$l$  długość odniesienia — długość nart,

$\rho$  gęstość powietrza na danej wysokości.

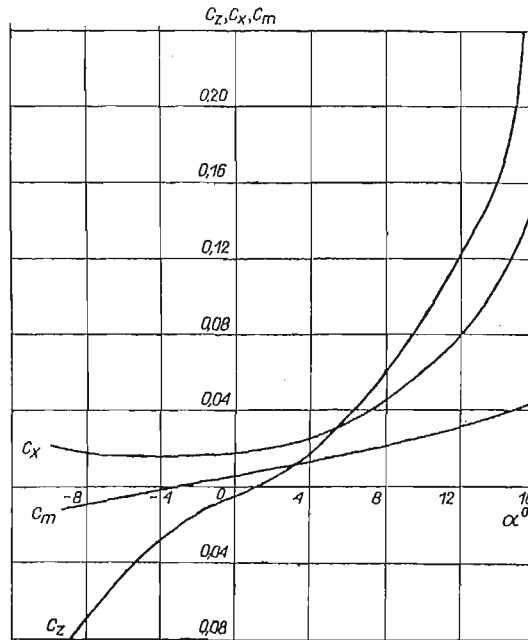
Doświadczalnie wyznaczono siły aerodynamiczne  $Z_a$  i  $X_a$  oraz moment aerodynamiczny  $M_a$ . Po przekształceniu wzorów (1), (2), (3) wyznaczono współczynniki aerodynamiczne  $C_x, C_z, C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla czterech różnych konfiguracji ciała i nart (rys. 4 ÷ 7).

Dla porównania podano bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne (rys. 8) dla nart skokowych «Tatry», otrzymane z badań w Instytucie Lotnictwa w Warszawie [13].

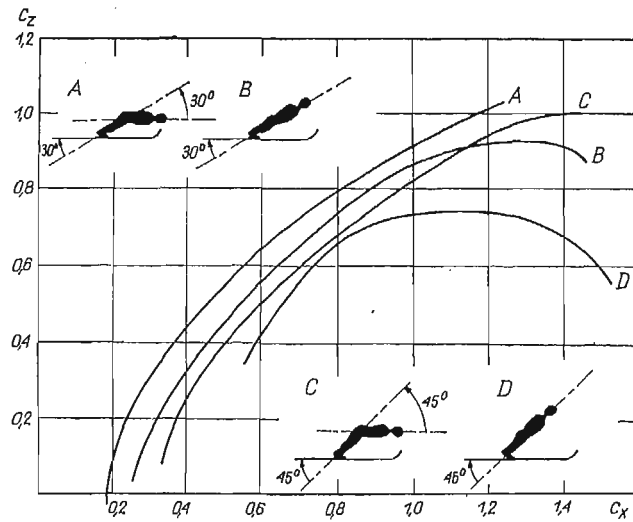
W celu porównania własności aerodynamicznych poszczególnych sylwetek, na rys. 9 przedstawiono biegunowe skoczków narciarskich  $C_z = f(C_x)$  oraz zmiany doskonałości skoczka  $K$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  (rys. 10). Doskonałość skoczka  $K$  określono jako stosunek współczynnika siły nośnej  $C_z$  do współczynnika oporu  $C_x$ , tzn. tak jak dla obiektów latających

$$(4) \quad K = \frac{C_z}{C_x}.$$

Utrzymanie maksymalnej doskonałości w czasie lotu umożliwia osiągnięcie najdłuższego skoku. Z rys. 10 wynika, że najdogodniejszymi sylwetkami są konfiguracje  $A$  i  $B$ , co potwierdza wskazówki w [14]. Najmniej korzystna z punktu widzenia aerodynamiki jest sylwetka  $D$ , ze wzrostem kąta natarcia  $\alpha$  powoduje znaczny wzrost współczynnika oporu  $C_x$  z równoczesnym spadkiem  $C_z$  (rys. 7), pociąga to za sobą gwałtowny spadek doskonałości  $K$  (rys. 10). Konfiguracja  $A$  umożliwia uzyskanie maksymalnych doskonałości  $K > 1$  dla kątów natarcia  $5^\circ < \alpha < 25^\circ$  (rys. 10), natomiast, praktycznie biorąc,

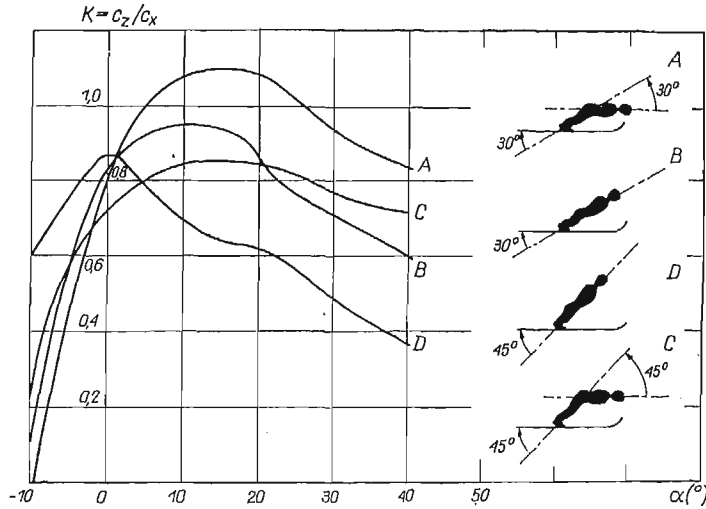


Rys. 8. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu  $C_x$ , siły nośnej  $C_z$  i momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla nart skokowych «Tatry»



Rys. 9. Biegunowe skoczka narciarskiego  $C_z = f(C_x)$  dla różnych konfiguracji nart i ciała A, B, C i D

stałą doskonałość  $K \approx 0,8$  na pełnym zakresie kątów natarcia  $0 < \alpha < 40^\circ$  zapewnia sylwetka C. Jednak wybór sylwetki jest uzależniony od warunków równowagi i stateczności dynamicznej skoczka.



Rys. 10. Doskonałość skoczka narciarskiego  $K$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla różnych konfiguracji nart i ciała A, B, C i D

### 3. Geometria mas

Skoczka narciarskiego zastąpiono modelem dyskretnym o 12 masach skupionych, wyznaczonych na podstawie danych statystycznych [8].

Znając masy poszczególnych części ciała ludzkiego i środki mas określone dla każdej konfiguracji, położenie środka ciężkości narciarza, jak również moment bezwładności i momenty statyczne względem układu odniesienia związanego ze stawem skokowym (rys. 1)

$$(5) \quad J_{Ay} = \sum_{i=1}^{12} [m_i(x_{ci}^2 + z_{ci}^2) + J_{ci}] + J_{yn},$$

gdzie

- $m_i$  masa  $i$ -tej części ciała ludzkiego,
- $x_{ci}, z_{ci}$  współrzędne środka masy  $i$ -tej części,
- $J_{ci}$  moment bezwładności  $i$ -tej części ciała względem środka masy,
- $J_{yn}$  moment bezwładności nart.

### 4. Równowaga podłużna skoczka

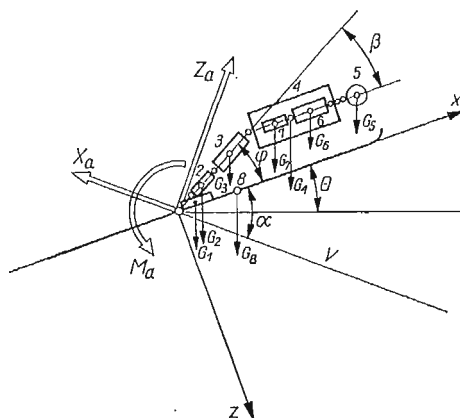
Warunki równowagi podłużnej skoczka ustalono rozpatrując równowagę momentów pochylających  $M_A$  pochodzących od sił aerodynamicznych  $M_a(\alpha)$  zależnych od kąta natarcia  $\alpha$  i sił masowych  $M_m(\theta)$  zależnych od kąta położenia względem toru  $\theta$  (rys. 11)

$$(6) \quad M_A = M_a(\alpha) + M_m(\theta).$$

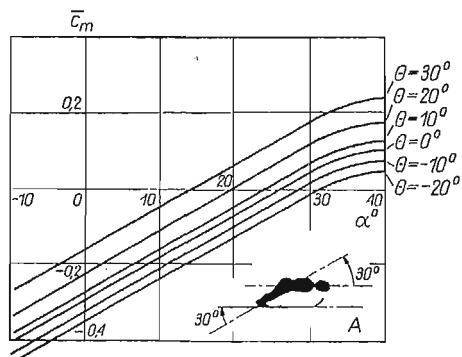
Bezwymiarowy współczynnik momentu pochylającego otrzymano w postaci

$$(7) \quad C_m = \frac{M_A}{\frac{1}{2} \rho V^2 S l} = C_m(\alpha) + C_m(\theta).$$

Dla tak obliczonych współczynników momentów pochylających wykonano wykresy  $C_m = f(\alpha)$  przy różnych kątach położenia  $\theta$  i dla różnych konfiguracji ciała (rys. 12÷15).



Rys. 11. Przyjęte układy odniesienia oraz układy sił i momentów działających na skoczka w locie

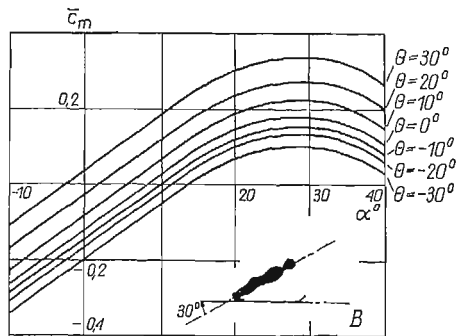


Rys. 12. Zmiana współczynnika momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  przy różnych kątach położenia  $\theta$  dla konfiguracji A,  $\varphi = 30^\circ$  i  $\beta = 30^\circ$

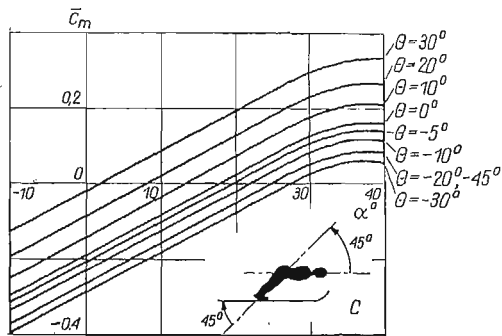
Skoczek znajduje się tylko wówczas w stanie równowagi, gdy suma momentów pochylających jest równa zero  $M_A = 0$ , to znaczy, gdy  $C_m = 0$ .

Korzystając z wykresów momentów (rys. 12÷15) wyznaczono położenie równowagi  $C_m = 0$  określając ściśle dla danej konfiguracji ciała i nart kąty natarcia  $\alpha$  i kąty położenia  $\theta$ , co przedstawiono na rys. 16.

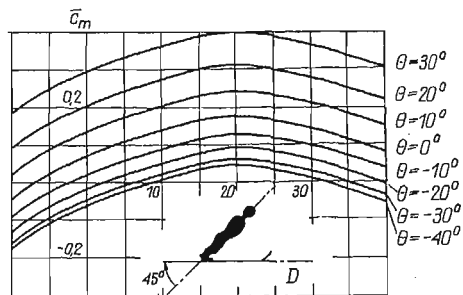




Rys. 13. Zmiana współczynnika momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  przy różnych kątach położenia  $\theta$  dla konfiguracji B,  $\varphi = 30^\circ$  i  $\beta = 0^\circ$

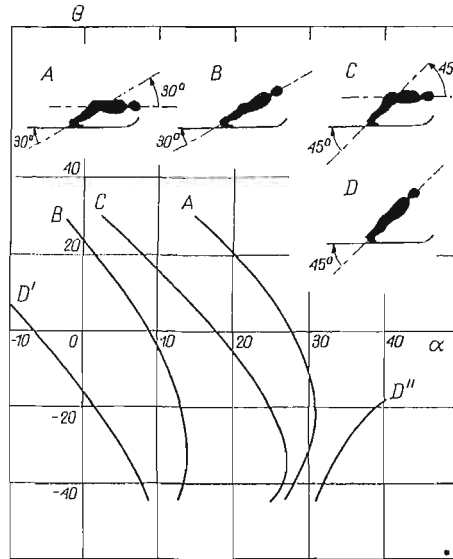


Rys. 14. Zmiana współczynnika momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  przy różnych kątach położenia  $\theta$  dla konfiguracji C,  $\varphi = 45^\circ$  i  $\beta = 45^\circ$



Rys. 15. Zmiana współczynnika momentu pochylającego  $C_m$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  przy różnych kątach położenia  $\theta$  dla konfiguracji D,  $\varphi = 45^\circ$  i  $\beta = 0^\circ$

Równowaga skoczka przy danej konfiguracji ciała i nart jest możliwa jedynie dla ściśle określonych kątów natarcia  $\alpha$  i położenia  $\theta$ . Dla tak ustalonych warunków równowagi przystąpiono do badania stateczności podłużnej skoczka, tzn. do zbadania, czy skoczek po wytrąceniu z położenia równowagi samoczynnie wraca do stanu ustalonego, czy też wymagana jest interwencja skoczka poprzez zmiany konfiguracji ciała lub nart.



Rys. 16. Krzywe równowagi podłużnej skoczka  $\theta = f(\alpha)$  przy  $C_m = 0$  dla różnych konfiguracji ciała i nart A, B, C i D

### 5. Równania ruchu skoczka narciarskiego

Stosując metodę małych zakłóceń względem położenia równowagi wyprowadzono dynamiczne równania ruchu skoczka w ruchomym układzie współrzędnych związanych ze skoczkiem (rys. 11)

$$\begin{aligned}
 (8) \quad m\dot{u} + S_{Ax}\dot{q} + mW_1q &= X_u u + X_w w + X_q q - mg\vartheta \cos\theta_1, \\
 m\dot{v} - S_{Az}\dot{q} - mU_1q &= Z_u u + Z_w w + Z_q q - mg\vartheta \sin\theta_1, \\
 S_{Ax}\dot{u} - S_{Az}\dot{v} + J_{Ay}\dot{q} + (S_{Ax}W_1 + S_{Az}U_1)q &= \\
 &= M_u u + M_w w + M_q q + g(S_{Az}\sin\theta_1 - S_{Ax}\cos\theta_1)\vartheta, \\
 \dot{\vartheta} &= q,
 \end{aligned}$$

gdzie

- $u, w$  zmiany prędkości liniowych podłużnej i pionowej,
- $q$  zmiana prędkości kątowej pochylenia,
- $J_{Ay}, S_{Ax}, A_{Az}$  moment bezwładności i odpowiednie momenty statyczne,
- $m$  masa skoczka z nartami,
- $U_1, W_1$  składowe prędkości skoczka, podłużna i pionowa.

Dla ruchów nieustalonych skoczka przyjęto zgodnie z określeniami lotniczymi pochodne aerodynamiczne  $X_u, X_w, X_q \dots M_w, M_q$ , co wynika z przyjęcia założenia, że zmiany sił aerodynamicznych: oporu  $X$  siły nośnej  $Z$  i momentu pochyłającego  $M$  są liniowo zależne od zmian prędkości

$$(9) \quad X = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial w} dw + \frac{\partial X}{\partial q} dq,$$

analogicznie dla  $Z$  i  $M$  wprowadzając zapis zależności (9) przyjęty w dynamice lotu, otrzymano:

$$(10) \quad \begin{aligned} X &= X_u u + X_w w + X_q q, \\ Z &= U_u u + Z_w w + Z_q q, \\ M &= M_u u + M_w w + M_q q. \end{aligned}$$

Równania ruchu (8) sprowadzono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez  $\rho V^2 S$  i równanie momentów  $\rho V^2 S l$  oraz wprowadzając zależności:

$$u = \frac{m}{\rho S l} \quad \text{względna gęstość skoczka,}$$

$$\hat{t} = \frac{m}{\rho U_1 S} \quad \text{czas aerodynamiczny,}$$

$$j_A = \frac{J_{Ay}}{m l^2} \quad \text{bezwymiarowy moment bezwładności,}$$

$$\bar{S}_{Ax} = \frac{S_{Ax}}{m l} \quad \text{bezwymiarowy moment statyczny,}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_1} \quad \text{bezwymiarowa zmiana prędkości liniowej,}$$

$$\bar{q} = q \hat{t} \quad \text{bezwymiarowa zmiana prędkości kątowej.}$$

Otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego w postaci

$$(11) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie

— macierz współczynników bezwładności

$$(12) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \bar{S}_{Ax}/\mu \\ 0, & 1, & -\bar{S}_{Az}/\mu \\ \bar{S}_{Ax}, & -\bar{S}_{Az}, & j_A/\mu \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników tłumienia

$$(13) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x_u, & -x_w, & -x_q/\mu \\ -z_u, & -z_w, & -(1 + Z_q/\mu) \\ -m_u, & -m_w, & S_{Az} - m_q/\mu \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników sztywności

$$(14) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & x_\theta \\ 0, & 0, & x_\theta \operatorname{tg} \theta_1 \\ 0, & 0, & -x_\theta (\bar{S}_{Az} \operatorname{tg} \theta_1 - \bar{S}_{Ax}) \end{bmatrix},$$

Zakładając, że zmiany prędkości podłużnej  $u$ , pionowej  $w$  i prędkości pochylania  $q$  są małe i pomijając małe rzędu drugiego i wyższe, wyprowadzono teoretycznie zależności na pochodne aerodynamiczne występujące w (10) i postaci bezwymiarowej (12)÷(14). Pochodną aerodynamiczną zmiany oporu względem zmian prędkości podłużnej  $u$  obliczono korzystając z zależności na opór aerodynamiczny (15)

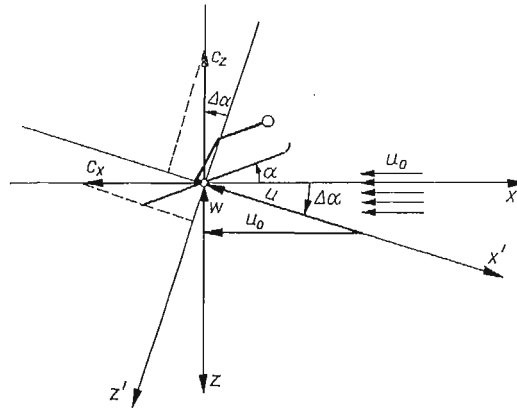
$$(15) \quad X = -\frac{1}{2} \rho U^2 S C_x,$$

gdzie

$$(16) \quad U = U_1 + u,$$

po podstawieniu do (15) i zróżniczkowaniu otrzymano

$$(17) \quad x_u = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial X}{\partial u} = -C_x.$$



Rys. 17. Zmiana kąta natarcia  $\Delta\alpha$  wywołana zmianą prędkości pionowej  $w$

Korzystając z zależności (1) i (3) po podstawieniu (16) i postępując analogicznie jak przy wyprowadzeniu  $x_u$  otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmiany siły nośnej względem zmian prędkości podłużnej  $u$

$$(18) \quad z_u = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial Z}{\partial u} = -C_z,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochylającego względem zmian prędkości podłużnej  $u$

$$(19) \quad m_u = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial M}{\partial u} = C_m.$$

Pochodne aerodynamiczne zmian: siły nośnej, oporu i momentu pochylającego względem zmiany prędkości pionowej  $w$  wyprowadzamy korzystając z zależności (1)÷(3) i wprowadzenia zależności (20) na zmiany kąta natarcia (rys. 17)

$$(20) \quad \Delta\alpha = \frac{w}{U_1}.$$

Zmiana oporu wywołana zmianą prędkości pionowej  $w$  wyraża się zależnością

$$(21) \quad (X)_w = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \rho U_1^2 S C_z \Delta \alpha,$$

to

$$(22) \quad x_w = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial (X)_w}{\partial w} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} C_z.$$

Analogicznie otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmian siły nośnej względem zmian prędkości pionowej  $w$

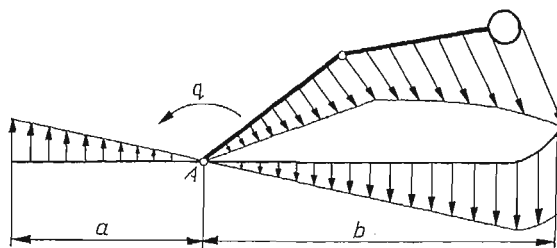
$$(23) \quad z_w = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial (Z)_w}{\partial w} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} C_x,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochylającego względem zmian prędkości pionowej  $w$

$$(24) \quad m_w = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial (M)_w}{\partial w} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}.$$

Zmiana prędkości kątowej pochylania  $q$  powoduje zmianę kąta natarcia  $\Delta \alpha$  zmienną wzdłuż długości ciała skoczka i narty. Zmiana kąta natarcia zależy od odległości  $x$  od osi obrotu, którą przyjęto w początku układu współrzędnych (rys. 18)

$$(25) \quad \Delta \alpha = -\frac{qx}{U_1}.$$



Rys. 18. Zmiana kąta natarcia  $\Delta \alpha$  wywołana zmianą prędkości kątowej pochylania  $q$

Do obliczeń pochodnych aerodynamicznych wyznaczono średnią zmianę kąta natarcia, otrzymaną przez całkowanie zmiany zachodzącej na długości narty

$$(26) \quad \Delta \alpha_{sr} = -\frac{1}{l} \int_{-a}^b \frac{qx}{U_1} dx.$$

Zmianę oporu  $(X)_q$  wywołaną zmianą prędkości kątowej pochylania  $q$  otrzymano w postaci

$$(27) \quad (X)_q = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha_{sr},$$

po wprowadzeniu zależności (26) i zróżniczkowaniu względem  $q$  otrzymano pochodną aerodynamiczną zmiany oporu względem zmian kątowej prędkości pochylenia w postaci bezwymiarowej

$$(28) \quad x_q = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial(X)_q}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx.$$

Analogicznie otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmiany siły nośnej względem zmian kątowej prędkości pochylenia

$$(29) \quad z_q = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial(Z)_q}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochyłającego względem zmian kątowej prędkości pochylenia

$$m_q = \frac{1}{\rho U_1 S l^2} \frac{\partial(M)_q}{\partial q} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx. \quad (30)$$

W celu wyznaczenia pochodnych  $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}$  korzystając z biegunowych skoczka narciarskiego (rys. 9) zastąpiono je odpowiednimi parabolami w postaci:

— dla konfiguracji *A*

$$C_x = 0,205 + 0,945 C_z^2,$$

— dla konfiguracji *B*

$$C_x = 0,285 + 0,950 C_z^2,$$

— dla konfiguracji *C*

$$C_x = 0,330 + C_z^2,$$

— dla konfiguracji *D*

$$C_x = 0,450 + 0,820 C_z^2.$$

Odpowiednie wartości  $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$  określono z kąta pochylenia krzywych  $C_z = f(\alpha)$  przedstawionych na rys. 4 ÷ 7.

## 6. Rozwiązania równań ruchu i wyniki

Układ równań (11) po przekształceniach sprowadzono do postaci

$$(31) \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Rz},$$

gdzie  $\mathbf{R}$  — macierz stanu,

$$(32) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q},$$

przy czym

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{z}$  jest wektorem o składowych

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{u} \\ \bar{w} \\ \dot{\bar{\vartheta}} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadzono do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu  $\mathbf{R}$  (32).

Wartości własne macierzy  $\mathbf{R}$  otrzymano numerycznie w postaci:

$$(33) \quad \lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1},$$

co pozwoliło na określenie okresów wahań

$$(34) \quad T = \frac{2\pi}{\eta} \hat{t},$$

i czasu stłumienia amplitudy do połowy (ewentualnie podwojenia amplitudy)

$$(35) \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi} \hat{t} = \frac{0,693}{\xi} \hat{t},$$

gdzie  $\eta_{j,j+1}$  częstości oscylacji,  $\xi_{j,j+1}$  współczynniki tłumienia.

Rozwiązanie ogólne układu równań jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych

$$(36) \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{y}_j e^{\lambda_j t},$$

przy czym

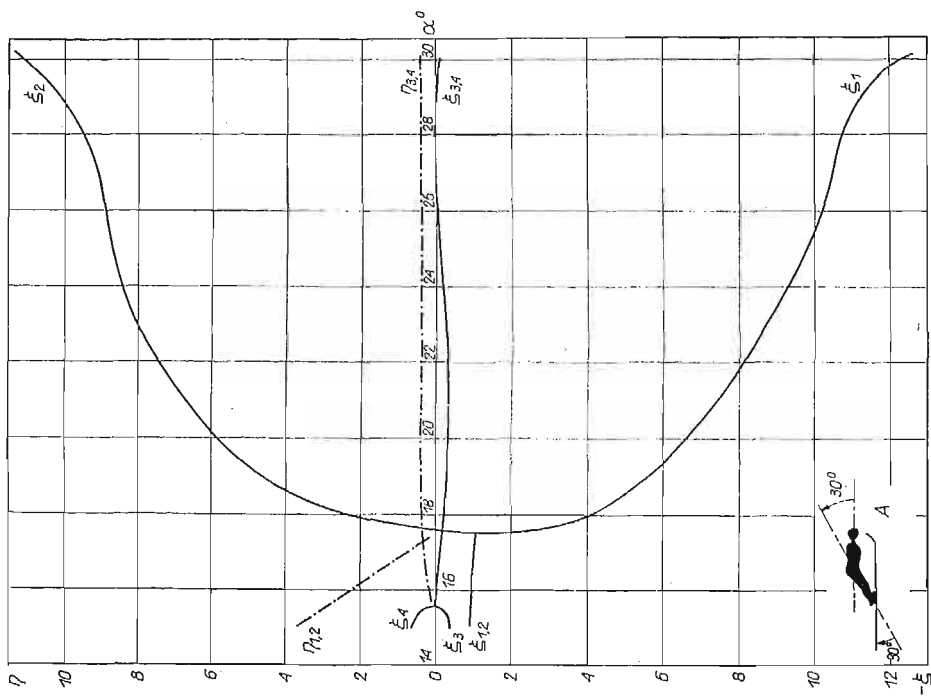
$\mathbf{y}_j$  jest wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej,

$C_j$  stałe wyznaczone z warunków początkowych, będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili  $t = 0$ .

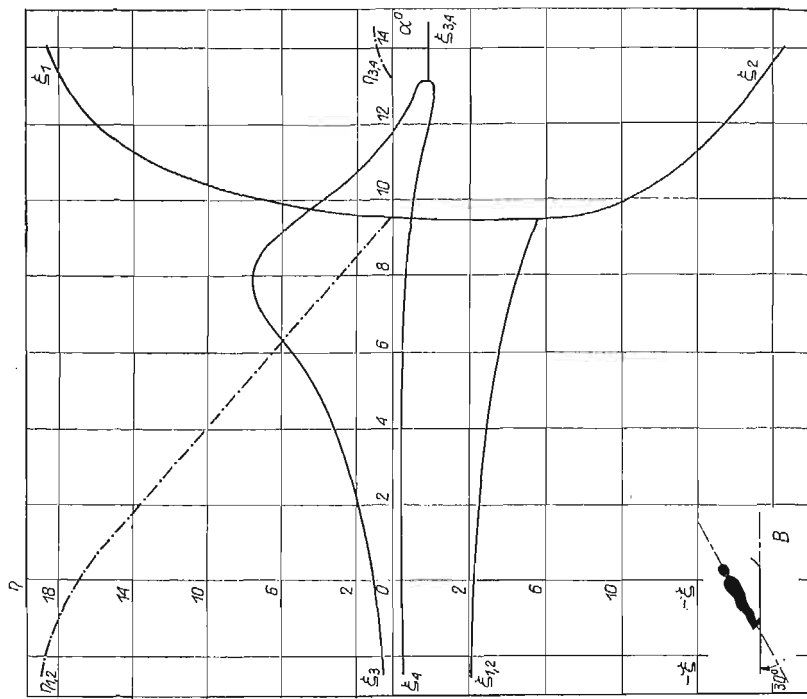
Zmiany współczynników tłumienia  $\xi$  i częstości oscylacji  $\eta$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla różnych konfiguracji ciała i nart  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  przedstawiono na wykresach rys. 19÷22.

Do obliczeń numerycznych przyjęto narciarza o ciężarze 70 kG i wzroście 1,80 m, narty skokowe «Tatry» o ciężarze 4,17 kG każda, długości  $l = 2,6$  m i powierzchni nart  $S = 0,65$  m<sup>2</sup>.

Położenie środka masy i momenty bezwładności nart określono doświadczalnie, natomiast dla narciarza rozkłady mas i położenie środków mas (rys. 1 i 11) według wzorca statystycznego [8].

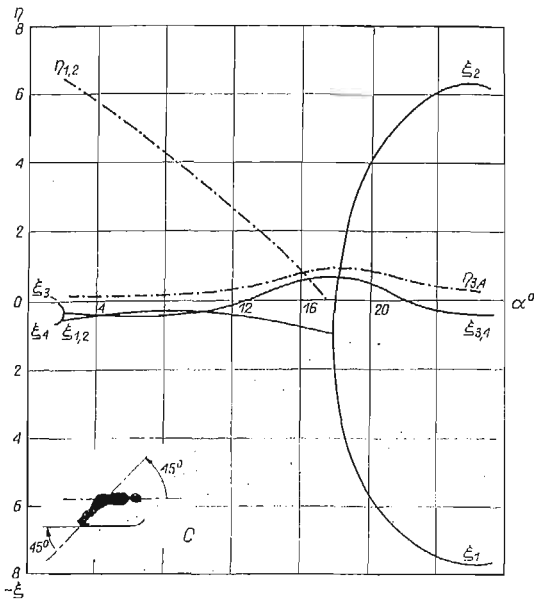


Rys. 19. Zmiany współczynników tłumienia  $\xi$  i częstości oscylacji  $\eta$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji ciała i nart *A*

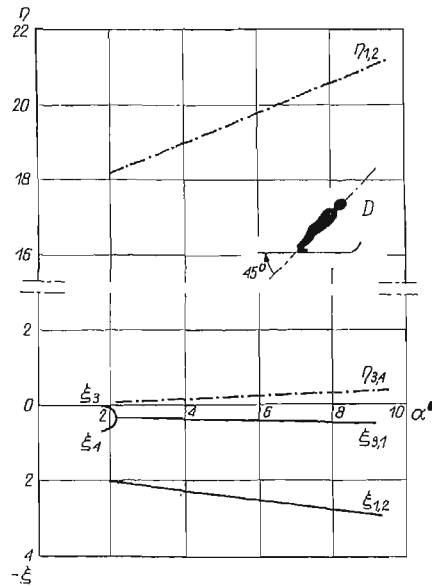


Rys. 20. Zmiana współczynników tłumienia  $\xi$  i częstości oscylacji  $\eta$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji ciała i nart *B*





Rys. 21. Zmiana współczynników tłumienia  $\xi$  i częstości oscylacji  $\eta$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji ciała i nart  $C$



Rys. 22. Zmiana współczynników tłumienia  $\xi$  i częstości oscylacji  $\eta$  w funkcji kąta natarcia  $\alpha$  dla konfiguracji ciała i nart  $D$

Obliczenia numeryczne wykonano według programów własnych w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego przy wykorzystaniu procedur standardowych ZON UW.

Poszczególne wartości własne charakteryzują następujące ruchy:

$\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$  szybkie oscylacje pochyłające skoczka narciarskiego,

$\lambda_{3,4} = \xi_{3,4} \pm i\eta_{3,4}$  wahania fugoidalne charakteryzujące się długookresowymi ruchami pionowymi i poziomymi.

Na wykresach rys. 19÷22 liniami ciągłymi przedstawiono zmiany współczynników tłumienia  $\xi$ , natomiast linie przerywane pokazują zmiany częstości oscylacji  $\eta$ .

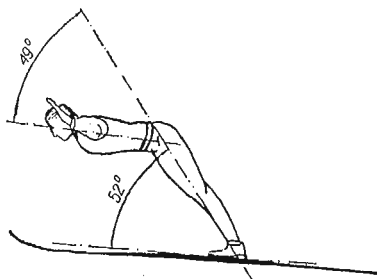
## 7. Analiza wyników i wnioski ogólne

Przeprowadzone badania aerodynamiczne w połączeniu z obliczeniami dynamicznych własności skoczka narciarskiego umożliwiają szerszą analizę wyników.

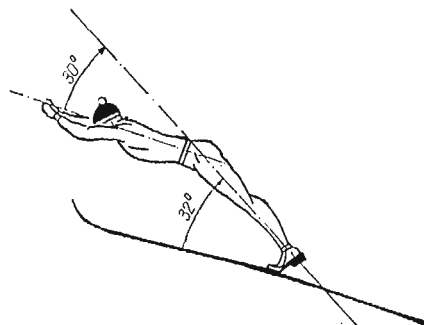
Badania aerodynamiczne modeli pomimo pewnych wad w stosunku do badań aerodynamicznych, przeprowadzanych na żywym człowieku, wykazują szereg zalet, jak: powtarzalność pomiarów, możliwość utrzymania określonej konfiguracji w czasie badań. W czasie badań aerodynamicznych narciarzy w pozycji zjazdowej [12] przeprowadzonych w Instytucie Lotnictwa w Warszawie stwierdzono: ... «Ujawnione w trakcie pomiarów trudności wiążą się z faktem dokonywania po raz pierwszy tunelowych badań aerodynamicznych na żywym człowieku jako modelu. Poza względami natury psychicznej i pewnym napięciem nerwowym towarzyszącym pomiarowi, szczególnie znaczenia nabiera fizyczne

zmęczenie modela. Jego mimowolne ruchy w znacznym stopniu utrudniają określenie stanu równowagi na poszczególnych składowych, w efekcie czego uzyskujemy znaczny rozrzut punktów pomiarowych...» ([12] str. 18).

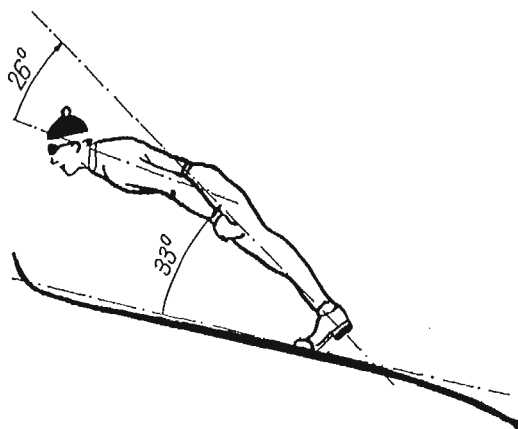
Z powyższego wynika, że badania tunelowe żywych skoczków narciarskich przy różnych konfiguracjach ciała i nart stanowiłyby tym bardziej zwiększone trudności, ze względu na stałe utrzymanie określonej sylwetki.



Rys. 23. Sylwetka mistrza świata — Stanisława Marusarza (Polska) Zakopane, 1939 r. (Polska) skocznia Krokiew, punkt krytyczny skoczni  $L_p = 90$  m, długość skoku  $L = 78,5$  m [4]



Rys. 24. Sylwetka mistrza świata i mistrza VIII Olimpiady — H. Recknagla (NRD), Squaw Valley 1960 r. (USA) [14]  $L = 93,5$  m

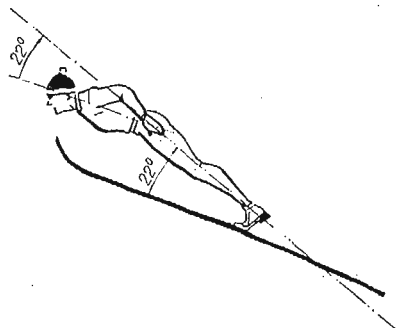


Rys. 25. Sylwetka mistrza X Olimpiady — W. Bielousowa (ZSRR), Grenoble 1968 r. (Francja) [14]  $L_p = 90$  m,  $L = 101,5$  m

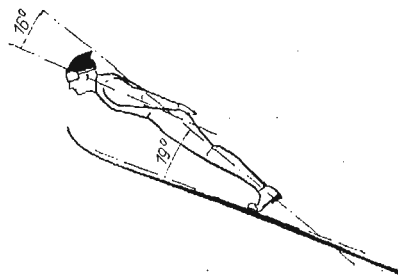
W Instytucie Lotnictwa w Warszawie przeprowadzono również badania aerodynamiczne nart skokowych [13] w celu wyjaśnienia zjawiska przepadania nart. «Zgodnie z uzyskanymi informacjami, skoczkowie wyczuwają „przepadanie” nart... w pierwszej fazie lotu zwanej fazą odbicia (tuż po odbiciu się z progu skoczni) oraz w czasie fazy lądowania (przyziemienia). Podczas, gdy w fazie odbicia wyczuwane przepadanie jest silne i występuje permanentnie przy każdym skoku, to w fazie lądowania jest znacznie słabsze i pojawia się sporadycznie» ([13] str. 9).

Powyższe zjawisko można wyjaśnić wyłącznie na drodze badania zjawisk dynamicznych, zachodzących w tej fazie lotu, biorąc pod uwagę badania aerodynamiczne, rozkłady mas nart, położenie środka masy, miejsce zamocowania okuć i sprężystość okuć.

W przedstawionej pracy rozważono cztery sylwetki skoczków narciarskich, wpływ ich na własności aerodynamiczne i dynamiczne skoczka przy różnych kątach natarcia  $\alpha$  i położenia  $\theta$ . Dla lepszego zilustrowania wyników podano przykładowo różne sylwetki skoczków klasy światowej (rys. 23 ÷ 27). Analizując poszczególne sylwetki można wyciągnąć szereg wniosków.



Rys. 26. Sylwetka mistrza świata — J. Kärkinena (Finlandia), Lahti 1958 r. (Finlandia) [14]  $L = 74$  m



Rys. 27. Sylwetka mistrza XI Olimpiady — Wojciecha Fortuny (Polska), Sapporo 1972 r. (Japonia), punkt krytyczny skoczni  $L_p = 90$  m, długość skoku  $L = 111$  m

Sylwetka *A*, taka konfiguracja ciała i nart odpowiada właściwie sylwetce W. Bielousowa (rys. 25) i pod względem uzyskanych kątów załamania w stawie skokowym i biodrowym sylwetce H. Recknagla (rys. 24). Zbliżone do tej konfiguracji, lecz bardziej płaskie są sylwetki J. Kärkinena i W. Fortuny. Sylwetka ta odznacza się maksymalną doskonałością aerodynamiczną  $K = 1,12$  w stosunku do pozostałych badanych konfiguracji (rys. 10), co umożliwia uzyskanie długich skoków (lotów), umożliwia utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia  $12^\circ < \alpha < 32^\circ$  (rys. 12 i 16), lecz posiada bardzo mały zakres kątów natarcia, zabezpieczających stateczność względem położenia równowagi  $13^\circ < \alpha < 18^\circ$  (rys. 19). Wynika z powyższego, że w celu utrzymania położenia równowagi wymagana jest interwencja skoczka poprzez zmianę konfiguracji ciała lub nart.

Sylwetka *B* pod względem aerodynamicznym wykazuje gorsze własności, doskonałość  $K = 0,95$  (rys. 10), lecz pozwala na utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia  $-4^\circ < \alpha < 15^\circ$  (rys. 13 i 16) zapewniając słabą niestateczność ruchów aperiodycznych dla  $\alpha < 9^\circ$  (rys. 20) może być dobrym uzupełnieniem sylwetki *A* w pewnych fazach skoku.

Sylwetka *C*, taka konfiguracja ciała i nart w dużym stopniu odpowiada sylwetce S. Marusarza (rys. 23) (z wyjątkiem układu rąk). Jest to sylwetka dająca najbardziej płaską charakterystykę doskonałości  $K \approx 0,8$  na pełnym zakresie kątów natarcia  $0^\circ < \alpha < 40^\circ$  (rys. 10) przy równoczesnym zapewnieniu równowagi skoczka w zakresie  $2^\circ < \alpha < 30^\circ$  (rys. 14 i 16) oraz wykazująca słabą niestateczność dla  $\alpha < 18^\circ$  i ruch stateczny w zakresie  $1^\circ < \alpha < 14^\circ$  (rys. 21). Jest to sylwetka o najlepszej charakterystyce równowagi, może być przydatna w okresie szkolenia dla skoczków o mniejszym doświadczeniu.

Sylwetka  $D$  jest sylwetką o najgorszej charakterystyce aerodynamicznej (rys. 10), dającej spadek doskonałości ze wzrostem kąta natarcia  $\alpha$ , jednak sylwetka taka lub zbliżona występuje przejściowo w fazie odbicia dając silny wzrost oporu aerodynamicznego przy małej sile nośnej (rys. 7). Taka konfiguracja pozwala na utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia  $-10^\circ < \alpha < 10^\circ$  i  $30^\circ < \alpha < 40^\circ$  (rys. 15 i 16), jak również zapewnia stateczność w zakresie  $\alpha < 10^\circ$ , co jest korzystne w pierwszej fazie lotu, tzn. w momencie formowania właściwej sylwetki.

Obecnie w dalszych badaniach i obliczeniach należałoby zwrócić uwagę na zbadanie bardziej «wychylonych» sylwetek, np. W. Fortuny (rys. 27) i innych skoczków z równoczesnym uwzględnieniem położenia rąk. Należałoby również zbadać wpływ miejsca i sztywności zawieszenia nart oraz wpływ wyważenia nart na ich przepadanie.

Przedstawiona praca jest pierwszą próbą badania dynamiki skoczka narciarskiego jako obiektu latającego. Dalsze badania modelowe, uzupełnione dodatkową dokumentacją skoków, poparte obliczeniami, mogą być wskazówką nie tylko do uzyskania sukcesu sportowego, lecz również zwiększyć bezpieczeństwo lotów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I, PWN, Warszawa—Łódź 1961.
3. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
4. J. KAPENIAK, *Tairzańskie diabły*, Sport i Turystyka, Warszawa 1973.
5. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret i Stos., 5, 1 (1967).
6. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret i Stos., 5, 3 (1967).
7. J. M. MORAWSKI, *Control systems approach to a ski-turn analysis*, J. Biomechanics, 6, 3-D (1973). Pergamon Press, Oxford—New York.
8. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Bionika ruchu*, PWN, Warszawa 1971.
9. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
10. J. THOMAS, *Mathematische Theorie der Aerodynamik des Ski-fluges*, Akademie Verlag, Berlin 1971.
11. B. KRASNOWSKI, *Stateczność podłużna skoczka narciarskiego*, Praca magisterska, Zakład Mechanik IMS PW, 1973, (nie publikowana).
12. *Sprawozdanie z badań aerodynamicznych narciarza w pozycji zjazdowej*, Instytut Lotnictwa, Zakład Aerodynamiki, Warszawa 1965 (nie publikowane).
13. *Sprawozdanie z badań aerodynamicznych nart skokowych*, Instytut Lotnictwa, Warszawa. Zakład Aerodynamiki, Sprawozdanie Nr 9/TA/72—1972 (nie publikowane).
14. Е. А. Грозин, *Прыжки на лыжах с трамплина*, Изд. Физкультура и спорт, Москва 1971.
15. *Прыжки на лыжах с трамплина*, под ред. Г. Р. Ниренберга. Изд. Физкультура и спорт, Москва 1964.

#### Резюме

#### РАВНОВЕСИЕ И ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЫЖНИКА-ПРЫГУНА В ПОЛЕТЕ

В работе рассмотрены вопросы равновесия и продольной устойчивости прыгающего с трамплина лыжника, на участке траектории соответствующем свободному полету. Лыжник в полете является свободно летящим телом состоящим из человека и лыж. На него действуют силы тяжести, аэродинамические силы и аэродинамические моменты.

Аэродинамические силы и моменты системы „лыжник-лыжи” определены из опытов проведенных в аэродинамической трубе для четырех конфигураций системы.

Выведены уравнения равновесия и уравнения движения системы при симметрических движениях прыгуна. Определены условия равновесия и зависимости между углом наклона траектории и углом атаки (для рассматриваемых конфигураций тела прыгуна).

При исследовании устойчивости выведена основная матрица дифференциальных уравнений движения и вычислены собственные значения и собственные векторы. Вычислены коэффициенты затухания и частоты осцилляций, а также определено движение прыгуна. Результаты теоретических вычислений сопоставлены с силуэтами олимпийских и мировых чемпионов по прыжкам.

### S u m m a r y

#### BALANCE AND LONGITUDINAL STABILITY OF A SKI-JUMPER IN FLIGHT

The problem is analyzed by considering the gravity and aerodynamic forces acting on the jumper and ski. The aerodynamic forces were measured by the authors on a model in a wind tunnel for the four configurations of the jumper and ski.

Equations of equilibrium and differential equations of motion are derived and the necessary conditions of equilibrium, as well as relations between angles of path and angles of attack for the few configurations are presented. The problem of stability is solved by the method of eigen-vectors. Theoretical results are compared with the silhouettes of world-known ski-jumpers.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1974 r.*

---