MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 12 (1974)

NIEKTÓRE ZAGADNIENIA TERMOSPRĘŻYSTOŚCI W TARCZACH MIKROPOLARNYCH

KRYSTYNA MAJORKOWSKA-KNAP (PŁOCK)

1. Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozważać będziemy liniowy termosprężysty ośrodek mikropolarny poddany działaniu temperatury.

Na podstawowe równania niesymetrycznej termosprężystości dla zagadnień statycznych składają się: równania równowagi, równania konstytutywne oraz równanie przewodnictwa cieplnego [1].

Równania równowagi, przy pominięciu sił i momentów masowych mają postać

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j} = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

gdzie symbol ε_{ijk} oznacza alternator Levi-Civitá.

Równania konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+(\lambda\gamma_{kk}-\bar{\nu}\theta)\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}+\beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie

$$\gamma_{ji} = u_{i,j}-\varepsilon_{kji}\varphi_k, \quad \varkappa_{ji} = \varphi_{i,j} \tag{1.3}$$

zawierają sześć stałych materiałowych mechanicznych μ, λ, α, β, γ, ε oraz stałą $\bar{\nu} = \alpha_t(3\lambda+2\mu)$ zależną od własności mechanicznych i termicznych (α_t — współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej).

W równaniach (1.2) $\theta = T-T_0$ oznacza wzrost temperatury (w stosunku do temperatury stanu naturalnego T_0). Symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Postać zlinearyzowana równania przewodnictwa cieplnego w przypadku stacjonarnego przepływu ciepła jest następująca

$$\nabla^2\theta = \frac{-W}{k}, \tag{1.4}$$

gdzie W — ilość ciepła wydzielana przez umieszczone w ciele źródła ciepła, odniesiona do jednostki objętości, zaś k — współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Eliminując z równań (1.1) naprężenia δ_{ji} i μ_{ji} przy wykorzystaniu związków (1.2) i (1.3) otrzymamy sprzężony ze sobą układ równań różniczkowych [1]

$$\begin{aligned} &(\mu+\alpha)\nabla^2\underline{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{u}+2\alpha\operatorname{rot}\underline{\varphi} = \bar{\nu}\operatorname{grad}\theta, \\ &(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\underline{\varphi}-4\alpha\underline{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\varphi}+2\alpha\operatorname{rot}\underline{u} = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mamy układ siedmiu równań (1.5), (1.4) z siedmioma niewiadomymi: trzema składowymi przemieszczenia $\underline{u}$, trzema składowymi obrotu $\underline{\varphi}$ i temperaturą θ.

Warunki brzegowe związane z równaniami (1.5) i (1.4) przyjmujemy w postaci

$$p_i = \sigma_{ji}n_j = 0, \quad m_i = \mu_{ji}n_j = 0, \quad \theta = \gamma(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A. \tag{1.6}$$

2. Uogólniony płaski stan naprężenia

W tarczy o grubości $2h$ uogólniony płaski stan naprężenia jest wywołany temperaturą $\theta(x_1, x_2, x_3)$ o rozkładzie symetrycznym względem płaszczyzny środkowej.

Stan przemieszczenia i obrotów jest scharakteryzowany przez średnie wartości wektorów

$$\underline{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, 0), \quad \underline{\varphi}^* \equiv (0, 0, \varphi_3^*). \tag{2.1}$$

Stan odkształcenia reprezentują tensory $\underline{\sigma}^*$ i $\underline{\varkappa}^*$ o składowych

$$\gamma_{ji}^* \equiv (\gamma_{\alpha\beta}^*, \gamma_{33}^*), \quad \varkappa_{ji}^* \equiv \varkappa_{\alpha 3}^*, \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{2.2}$$

Stan naprężenia opisują tensory $\underline{\sigma}^*$ i $\underline{\mu}^*$ o składowych

$$\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{\alpha\beta}^*, \quad \mu_{ji}^* \equiv (\mu_{\alpha 3}^*, \mu_{3\alpha}^*), \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.3}$$

które spełniają równania równowagi

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^* = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + \mu_{\alpha 3,\alpha}^* = 0, \; (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{2.4}$$

symbol $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oznacza symbol Ricciego.

Związki konstytutywne przyjmują postać

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^* &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji}^* + (\mu-\alpha)\gamma_{ij}^* + (\lambda\gamma_{kk}^* - \bar{\nu}\theta^*)\delta_{ji}, \\ \mu_{ji}^* &\equiv (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}^* + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}^* + \beta\varkappa_{kk}^*\delta_{ji}, \quad (i,j = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $\theta^*(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \theta(x_1, x_2, x_3)dx_3$ jest średnią wartościową temperatury wzdłuż grubości tarczy.

Związki geometrycznej zgodności mają postać

$$\begin{aligned} \gamma_{21,1}^* - \gamma_{11,2}^* - \varkappa_{13}^* &= 0, \\ \gamma_{22,1}^* - \gamma_{12,2}^* - \varkappa_{23}^* &= 0, \\ \varkappa_{23,1}^* - \varkappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Równania (2.6) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \gamma_{22,11}^* + \gamma_{11,22}^* &= (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*)_{,12}, \\ \gamma_{12,22}^* - \gamma_{21,11}^* &= (\gamma_{22}^* - \gamma_{11}^*)_{,12} - (\varkappa_{13,1}^* + \varkappa_{23,2}^*), \\ \varkappa_{23,1}^* - \varkappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wyrażając związki (2.7) poprzez tensory σ_{ji}^*, μ_{ji}^* przy pomocy równań (2.5) otrzymujemy warunki geometrycznej zgodności wyrażone w naprężeniach. Te ostatnie w połączeniu z równaniami równowagi (2.4) oraz z równaniem przewodnictwa cieplnego (2.8)

$$\nabla_1^2\theta^* = -\frac{W^*}{k} \tag{2.8}$$

i z warunkami brzegowymi (1.6) stanowią naprężeniowe sformułowanie problemu mikropolarnej termosprężystości.

Wprowadzając reprezentację naprężeń za pomocą funkcji F, Ψ [1] w postaci

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{*} = \partial_2^2 F - \partial_1 \partial_2 \Psi, && \sigma_{22}^{*} = \partial_1^2 F + \partial_1 \partial_2 \Psi,\\
&\sigma_{12}^{*} = -\partial_1 \partial_2 F - \partial_2^2 \Psi, && \sigma_{21}^{*} = -\partial_1 \partial_2 F + \partial_1^2 \Psi, \qquad (2.9)\\
&\mu_{13}^{*} = \partial_1 \Psi, && \mu_{23}^{*} = \partial_2 \Psi,
\end{aligned}
$$

rozwiązanie problemu w naprężeniach sprowadza się do rozwiązania równań (2.10) i (2.8) z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

$$
\begin{aligned}
&\nabla_1^2 \nabla_1^2 F + 2\mu \overline{m} \nabla_1^2 \theta^{*} = 0,\\
&\nabla_1^2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi = 0,
\end{aligned} \qquad (2.10)
$$

gdzie

$$
\overline{m} = \frac{\bar{\nu}}{2(\lambda+\mu)}, \quad l^2 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\mu\alpha}, \quad \nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2.
$$

Funkcje F i Ψ oraz θ^{*} związane są zależnościami

$$
\begin{aligned}
-\partial_1 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi &= A \partial_2 \nabla_1^2 F + B \partial_2 \theta^{*},\\
\partial_2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi &= A \partial_1 \nabla_1^2 F + B \partial_1 \theta^{*},
\end{aligned} \qquad (2.11)
$$

gdzie

$$
A = \frac{(\lambda+\mu)(\gamma+\varepsilon)}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad B = \frac{\bar{\nu}(\gamma+\varepsilon)}{3\lambda+2\mu}.
$$

Inny sposób rozwiązania zagadnienia płaskiego to rozwiązanie w przemieszczeniach-obrotach. Podstawiając do równań równowagi (2.4) związki (2.5) i wykorzystując definicję (1.3) otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha) \nabla_1^2 u_1^{*} + \beta_0 \partial_1 e^{*} + 2\alpha \partial_2 \varphi_3^{*} = 2\mu m \partial_1 \theta^{*},\\
&(\mu+\alpha) \nabla_1^2 u_2^{*} + \beta_0 \partial_2 e^{*} - 2\alpha \partial_1 \varphi_3^{*} = 2\mu m \partial_2 \theta^{*}, \qquad (2.12)\\
&[(\gamma+\varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \varphi_3^{*} + 2\alpha (\partial_1 u_2^{*} - \partial_2 u_1^{*}) = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\beta_0 = \frac{\mu(3\lambda+2\mu) - \alpha(\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}, \quad m = \frac{\bar{\nu}}{\lambda+2\mu}.
$$

Rozwiązanie problemu w przemieszczeniach-obrotach sprowadza się do rozwiązania równań (2.12) i (2.8) z warunkami brzegowymi.

3. Zagadnienie tarczy półnieskończonej

Rozpatrzymy zagadnienie tarczy półnieskończonej $x_1 \geqslant 0$ ograniczonej prostą $x_1 = 0$. Przyjmujemy, że na brzegu $x_1 = 0$ działa pole temperatur $\theta^{*}_{(x_2)}$, które można traktować jako superpozycję dwóch stanów obciążeń zgodnie z rys. 1.

Działanie stałej temperatury $\frac{a \quad c}{a}$ zgodnie z rys. 1a nie wywołuje w ciele naprężeń, rozpatrzymy zatem tylko drugi składowy stan obciążenia zgodnie z rys. 1b.

Rozwinięcie temperatury $\theta^*_{(x_2)}$ w szereg Fouriera ma postać

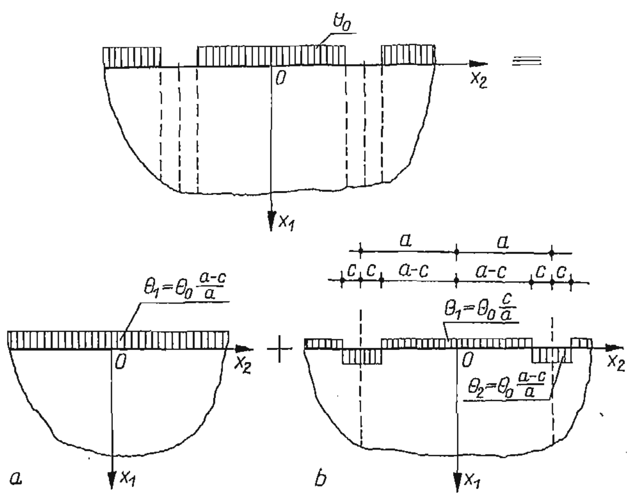
$$\theta^*_{(x_2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos\alpha_n x_2, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots, \tag{3.1}$$

gdzie

$$\theta_n = -\frac{2\theta_0}{n\pi}\cos n\pi \sin\frac{\pi n c}{a}.$$

Na brzegu $x_1 = 0$ mamy warunki brzegowe

$$\sigma^*_{11}(0, x_2) = 0, \qquad \sigma^*_{12}(0, x_2) = 0, \qquad \mu^*_{13}(0, x_2) = 0. \tag{3.2}$$



Rys. 1.

W pierwszej kolejności rozwiązujemy równanie Laplace'a, którym staje się równanie przewodnictwa cieplnego dla omawianego zagadnienia

$$\nabla_1^2 \theta^* = 0 \tag{3.3}$$

z warunkiem brzegowym

$$\theta^*(0, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos\alpha_n x_2 \tag{3.4}$$

i warunkiem regularności dla $|x_1^2 + x_2^2| \to \infty$.
Z (3.3) wyznaczymy temperaturę $\theta^*(x_1, x_2)$ w postaci

$$\theta^*(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n e^{-\alpha_n x_1} \cos\alpha_n x_2. \tag{3.5}$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia wprowadzamy funkcje F i Ψ, które winny spełniać równania (2.10). Rozwiązanie tych równań przyjmujemy w postaci

$$F = F' + F'', \qquad \Psi = \Psi' + \Psi''. \tag{3.6}$$

Zakładamy, że $\Psi' = 0$, a funkcja F' jest całką szczególną równania

$$\nabla_1^2 F' + 2\mu \overline{m}\,\theta^* = 0 \tag{3.7}$$

z warunkiem brzegowym $F' = 0$ dla $x_1 = 0$ i warunkiem regularności dla $(x_1^2+x_2^2) \to \infty$.

Temperatura $\theta^*(x_1, x_2)$ występująca w równaniu (3.7) dana jest wzorem (3.5). Wobec tego (3.7) przyjmuje postać

$$\nabla_1^2 F' = -2\mu m \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2. \tag{3.8}$$

Z rozwiązania powyższego równania różniczkowego cząstkowego niejednorodnego otrzymujemy

$$F'_{(x_1, x_2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu \overline{m}\,\theta_n}{\alpha_n} x_1 e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2. \tag{3.9}$$

Funkcje F', Ψ' związane z symetrycznym tensorem naprężeń prowadzą do następujących wzorów na naprężenia:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= -\mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \theta_n x_1 e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2,\\
\sigma'_{22} &= -\mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (2-\alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2,\\
\sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= \mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (1-\alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \sin \alpha_n x_2,\\
\mu'_{13} = \mu'_{23} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Funkcje F'', Ψ'' powinny spełniać równania

$$\begin{aligned}
&\nabla_1^2 \nabla_1^2 F'' = 0,\\
&\nabla_1^2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' = 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma'_{11} + \sigma''_{11} = 0, \quad \sigma'_{12} + \sigma''_{12} = 0, \quad \mu''_{13} = 0, \quad \text{dla } x_1 = 0 \tag{3.12}$$

oraz z warunkami regularności dla $(x_1^2 + x_2^2) \to \infty$.

Jednocześnie powinny być spełnione zależności

$$\begin{aligned}
-\partial_1 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' &= A \partial_2 \nabla_1^2 F'',\\
\partial_2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' &= A \partial_1 \nabla_1^2 F''.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Przy przyjęciu $\Psi' = 0$ i spełnieniu zależności (3.13) spełnimy związki zachodzące między funkcjami F i Ψ (2.11), gdyż

$$\begin{aligned}
\partial_2 (A \nabla_1^2 F + B\theta) &= 0,\\
\partial_1 (A \nabla_1^2 F + B\theta) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Zastosowanie pojedynczych szeregów Fouriera prowadzi do następujących wzorów na funkcje

$$
(3.15)\qquad
\begin{aligned}
F''_{(x_1,x_2)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n\alpha_n x_1)e^{-\alpha_n x_1}\cos\alpha_n x_2,\\
\Psi''_{(x_1,x_2)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{-\alpha_n x_1}+D_n e^{-\varrho_n x_1})\sin\alpha_n x_2, \qquad \varrho_n = \left(\alpha_n^2+\frac{1}{l^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Powyższe wzory zawierają nieskończenie wiele stałych A_n, B_n, C_n, D_n, które wyznaczymy z warunków brzegowych (3.12) oraz ze związków (3.13).

Z warunku brzegowego $\mu''_{13}|_{x_1=0} = 0$ mamy

$$
(3.16)\qquad \alpha_n C_n+\varrho_n D_n = 0.
$$

Z warunku brzegowego $\sigma'_{11}+\sigma''_{11}|_{x_1=0} = 0$, po uwzględnieniu (3.16) mamy

$$
(3.17)\qquad A_n = 0,
$$

a z warunku brzegowego $\sigma'_{12}+\sigma''_{12}|_{x_1=0} = 0$ otrzymamy

$$
(3.18)\qquad \mu\overline{m}\theta_n+\alpha_n^2(B_n-A_n+C_n+D_n) = 0.
$$

Związki (3.13) po uwzględnieniu (3.15) prowadzą do

$$
(3.19)\qquad C_n-2A\alpha_n^2 B_n = 0.
$$

Z czterech równań (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) wyznaczymy cztery stałe całkowania

$$
(3.20)\qquad A_n = 0,\quad B_n = -\frac{\mu\overline{m}\theta_n}{\alpha_n^2\Delta_0},\quad C_n = -\frac{2A}{\Delta_0}\mu\overline{m}\theta_n,\quad D_n = -\frac{\alpha_n}{\varrho_n}C_n,
$$

gdzie

$$
\Delta_0 = 1+2A\alpha_n^2\left(1-\frac{\alpha_n}{\varrho_n}\right).
$$

Po uwzględnieniu (3.20) funkcje F'' i Ψ'' przyjmują postać

$$
(3.21)\qquad
\begin{aligned}
F''_{(x_1,x_2)} &= -\mu\overline{m}x_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{\alpha_n\Delta_0}e^{-\alpha_n x_1}\cos\alpha_n x_2,\\
\Psi''_{(x_1,x_2)} &= -2A\mu\overline{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{\Delta_0}\left(e^{-\alpha_n x_1}-\frac{\alpha_n}{\varrho_n}e^{-\varrho_n x_1}\right)\sin\alpha_n x_2.
\end{aligned}
$$

Wzory na naprężenia będą następujące:

$$
(3.22)\qquad \sigma^{*}_{11} = -\mu\overline{m}\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\left[\alpha_n x_1\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right)e^{-\alpha_n x_1}+\frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0}(e^{-\alpha_n x_1}-e^{-\varrho_n x_1})\right]\cos\alpha_n x_2,
$$

$$\sigma_{22}^{*} = -\mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(2-\alpha_n x_1)\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0}(e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1})\right] \cos \alpha_n x_2,$$

$$\sigma_{12}^{*} = \mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(1-\alpha_n x_1)\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0}\left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} e^{-\rho_n x_1}\right)\right] \sin \alpha_n x_2,$$

$$(3.22)\quad \sigma_{21}^{*} = \mu \overline{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(1-\alpha_n x_1)\left(1-\frac{1}{\Delta_0}\right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n}{\Delta_0}(\alpha_n e^{-\alpha_n x_1} - \varrho_n e^{-\rho_n x_1})\right] \sin \alpha_n x_2,$$

$$\mu_{13}^{*} = 2\mu \overline{m} A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\Delta_0} \alpha_n (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \sin \alpha_n x_2,$$

$$\mu_{23}^{*} = -2\mu \overline{m} A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\Delta_0} \alpha_n \left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} e^{-\rho_n x_1}\right) \cos \alpha_n x_2.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku szczególnym ciała Hooke'a, gdy $\alpha = 0(\varrho_n = \alpha_n, \Delta_0 = 1)$, naprężenia dążą do zera.

Analiza naprężeń σ_{22}^{*} dla teorii mikropolarnej. Zbadano zmienność naprężeń σ_{22}^{*} dla punktów tarczy o współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a$, $x_2 = 0$ i o współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a$, $x_2 = 3a$. Obliczenia szczegółowe przeprowadzono na elektronowej maszynie cyfrowej «ODRA-1204».

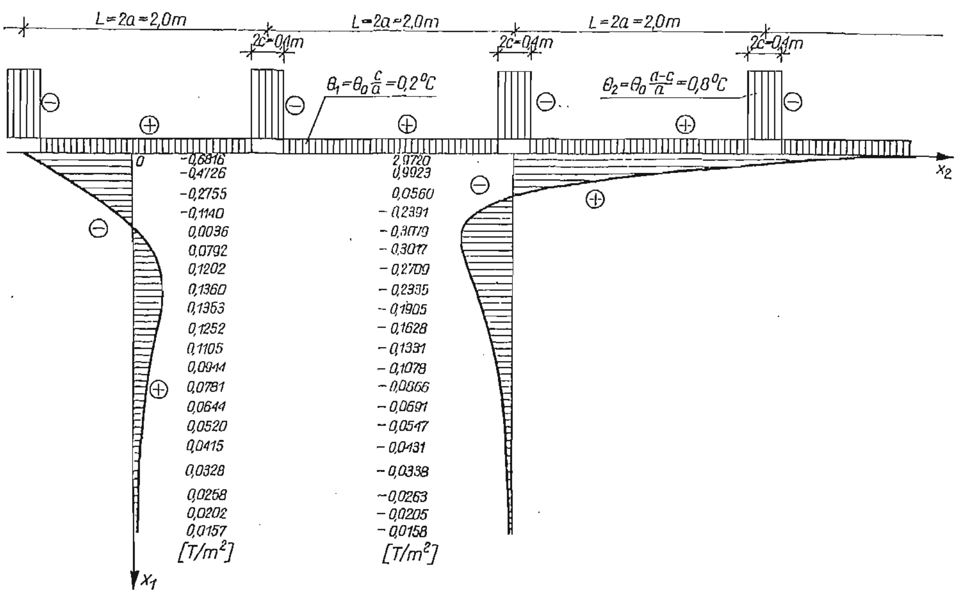
Z uwagi na brak dokładnych wartości stałych materiałowych przyjęto do obliczeń:
a) dane z klasycznej teorii sprężystości (dla betonu)

$$\left.\begin{array}{l} \nu = 0{,}16 \\[2ex] E = 0{,}18 \cdot 10^6 \,[\mathrm{kG/cm^2}] \\[2ex] \alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} \,[1/^\circ\mathrm{C}] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mu = \dfrac{E}{2(1+\mu)} = 0{,}077 \cdot 10^7 \;[T/\mathrm{m}^2], \\[2ex] \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0{,}036 \cdot 10^7 \;[\mathrm{T/m^2}], \\[2ex] \mu\overline{m} = \mu \dfrac{\alpha_t(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} = 8{,}924 \;[\mathrm{T/^\circ C \cdot m^2}]; \end{array}$$

b) liczbowe stosunki stałych sprężystości wzorując się na pracy [5]

$$\begin{array}{l|l} \alpha = \dfrac{1}{5}\mu = 0{,}0154 \cdot 10^7 [\mathrm{T/m^2}] & A = \dfrac{(\lambda+\mu)(\gamma+\varepsilon)}{\mu(3\lambda+2\mu)} = 0{,}172 \;[\mathrm{m^2}], \\[2ex] \gamma = \varepsilon = 0{,}0154 \cdot 10^7 [\mathrm{T}] & l^2 = \dfrac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\mu\alpha} = 0{,}600 \;[\mathrm{m^2}]. \end{array}$$

Zmienność naprężeń przedstawiono graficznie na rys. 2. Dla uproszczenia przyjęto grubość tarczy równą jedności. W innym przypadku należałoby podzielić otrzymane wyniki przez grubość tarczy.



Rys. 2

Analizując zmienność naprężeń σ^*_{22} dochodzimy do następujących wniosków:

a) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 0$: naprężenie przyjmuje największą wartość ujemną w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0$, następnie zmienia znak w punkcie o współrzędnej $x_1 = \sim 0{,}4$ m, osiągając największą wartość dodatnią w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0{,}7$ m. Wraz z oddalaniem się od obciążonego brzegu wartość naprężeń zmniejsza się, dochodząc do wartości bliskiej zeru w punkcie o współrzędnej $x_1 = 2a$.

b) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 3a$: naprężenie przyjmuje największą wartość dodatnią w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0$, zmienia znak w punkcie o współrzędnej $x_1 = \sim 0{,}2$ m i osiąga największą wartość ujemną w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0{,}4$ m. Następnie wartość naprężeń zmniejsza się stopniowo, dochodząc do wartości bliskiej zeru w punkcie o współrzędnej $x_1 = 2a$.

Reasumując można stwierdzić, że uwzględnienie niesymetrycznych tensorów naprężeń i odkształceń w ośrodku mikropolarnym prowadzi do zmian w stanie naprężenia tarczy. Naprężenia σ^*_{11}, σ^*_{22}, σ^*_{12}, σ^*_{21}, μ^*_{13}, μ^*_{23}, μ^*_{31}, μ^*_{32}, nie występujące w ciele Hooke'a dla danego zagadnienia występują w ośrodku Cosseratów. Przedstawione wyniki rozwiązania numerycznego pozwalają na wyciągnięcie wniosków natury jakościowej (jedynie) z uwagi na dobór stałych materiałowych nie potwierdzony badaniami doświadczalnymi.

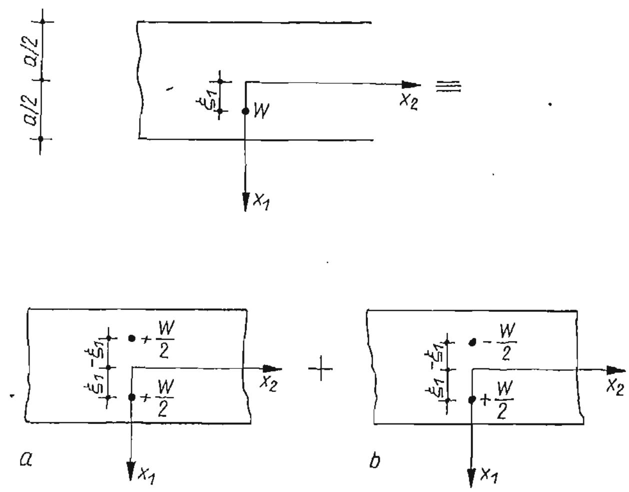
4. Działanie ustalonego źródła ciepła na pasmo tarczowe

W punkcie $(\xi_1, 0)$ pasma tarczowego działa ustalone źródło ciepła o intensywności $W^*(x_1, x_2, x_3) = W^*\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2)$. Zakładamy, że w płaszczyznach ograniczających tarczę panuje temperatura zerowa oraz naprężenia są równe zeru. Mamy

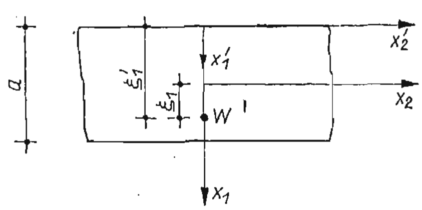
$$\sigma_{11}^* = 0, \quad \sigma_{12}^* = 0, \quad \mu_{13}^* = 0, \quad \theta^* = 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm\frac{a}{2}. \tag{4.1}$$

Stan obciążenia termicznego rozpatrujemy superponując dwa składowe stany obciążeń zgodnie z rys. 3.

W pierwszej kolejności rozwiążemy zagadnienie przedstawione na rys. 4 w układzie współrzędnych x_1', x_2'.



Rys. 3.



Rys. 4.

Z równania przewodnictwa cieplnego

$$\nabla_1^2\theta^* = -\frac{W^*}{k}. \tag{4.2}$$

Z warunkiem brzegowym $\theta^* = 0$ dla $x_1' = 0$, $x_1' = a$ wyznaczymy funkcję θ^*.

Stosując kombinację transformacji skończonej sinusowej i cosinusowej całkowej Fouriera do równania (4.2) mamy

$$(4.3)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{a}(\partial_1^2+\partial_2^2)\theta^*(x_1',x_2')\sin\alpha_n x_1'\cos\beta x_2'\,dx_1'\,dx_2' =$$

$$= -\frac{W}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\delta(x_2')\cos\beta x_2'\,dx_2'\int\limits_0^{a}\delta(x'-\xi_1)\sin\alpha_n x_1'\,dx_1'.$$

Biorąc pod uwagę, że $\int\limits_0^{a}\delta(x_1'-\xi_1)\sin\alpha_n x_1'\,dx_1' = \sin\alpha_n\xi_1$, $\int\limits_0^{\infty}\delta(x_2')\cos\beta x_2'\,dx_2' = \frac{1}{2}$, otrzymujemy równanie (4.2) w członach transformacji

$$(4.4)\qquad -(\alpha_n^2+\beta^2)\tilde{\theta}^*_{(\alpha_n,\beta)} = -\frac{W}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha_n\xi_1'}{2},$$

skąd wyznaczymy

$$(4.5)\qquad \tilde{\theta}^* = \frac{W\sin\alpha_n\xi_1'}{k\sqrt{2\pi}\,(\alpha_n^2+\beta^2)}.$$

Po wykonaniu retransformacji otrzymujemy funkcję $\theta^*(x_1', x_2')$ w postaci

$$(4.6)\qquad \theta^*_{(x_1',x_2')} = \frac{2W}{k\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\alpha_n\xi_1'\sin\alpha_n x_1'\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\beta x_2'}{\alpha_n^2+\beta^2}\,d\beta,\qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Zagadnienie rozwiązywać będziemy w przemieszczeniach i obrotach. Układ równań różniczkowych (2.12) można rozwiązać za pomocą potencjałów sprężystych [3], korzystając z możliwości przedstawienia wektora $\underline{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, 0)$ w postaci gradientu pewnego skalara i rotacji pewnego wektora. Przyjęcie

$$(4.7)\qquad u_1^* = \partial_1\Phi+\partial_2\Psi,\qquad u_2^* = \partial_2\Phi-\partial_1\Psi$$

prowadzi do układu równań dla funkcji Φ, φ_3^*

$$(4.8)\qquad \begin{aligned}\nabla_1^2\nabla_1^2\Phi-n\nabla_1^2\theta^* &= 0,\\ \nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^* &= 0,\end{aligned}$$

gdzie

$$n = \frac{2\mu m}{\mu+\alpha+\beta_0}.$$

Funkcja Ψ wyrażona jest przez φ_3^* zgodnie z równaniem

$$(4.9)\qquad \nabla_1^2\Psi = \frac{1}{2\alpha}[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_3^*.$$

Funkcje Φ i φ_3^* winny spełniać również związki Cauchy-Riemanna

$$\begin{aligned} &\partial_1(\nabla_1^2\Phi - n\theta^*) + \frac{n}{m}\partial_2(l^2\nabla_1^2 - 1)\varphi_3^* = 0, \\ &\partial_2(\nabla\Phi_1^2 - n\theta^*) - \frac{n}{m}\partial_1(l^2\nabla_1^2 - 1)\varphi_3^* = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Rozwiązanie układu równań (4.8) złożymy z dwu części

$$\Phi = \Phi' + \Phi'', \qquad \varphi_3^* = \varphi_3^{*\prime} + \varphi_3^{*\prime\prime}. \tag{4.11}$$

Zakładamy, że $\varphi_3^{*\prime} = 0$, a funkcja Φ' spełnia równanie

$$\nabla_1^2\Phi' - n\theta^* = 0 \tag{4.12}$$

z warunkiem brzegowym $\Phi' = 0$ dla $x_1' = 0$, $x_1' = a$. Z równania (4.12) otrzymujemy po uwzględnieniu (4.5)

$$\tilde{\Phi}' = -\frac{nW\sin\alpha_n\xi_1'}{k\sqrt{2\pi}\,(\alpha_n^2+\beta^2)^2}. \tag{4.13}$$

Po wykonaniu retransformacji na powyższym równaniu otrzymamy

$$\Phi'(x_1', x_2') = -\frac{2nW}{k\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\alpha_n\xi_1'\sin\alpha_n x_1'\int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x_2'}{(\alpha_n^2+\beta^2)^2}d\beta. \tag{4.14}$$

Związane z funkcją Φ' naprężenia będą

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{*\prime} &= -\frac{K}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n x_2'}}{\alpha_n}(1-\alpha_n x_2')\sin\alpha_n\xi_1'\sin\alpha_n x_1', \\ \sigma_{22}^{*\prime} &= -\frac{K}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n x_2'}}{\alpha_n}(1+\alpha_n x_2')\sin\alpha_n\xi_1'\sin\alpha_n x_1', \\ \sigma_{12}^{*\prime} &= \sigma_{21}^{*\prime} = \frac{K}{a}x_2'\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha_n x_2'}\sin\alpha_n\xi_1'\cos\alpha_n x_1', \\ \mu_{13}^{*\prime} &= \mu_{23}^{*\prime} = 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdzie $K = \mu nW/k$. Na brzegach $x_1' = 0$, $x_1' = a$ otrzymaliśmy $\sigma_{11}^{*\prime} = 0$, $\sigma_{22}^{*\prime} \neq 0$, natomiast $\sigma_{12}^{*\prime} = \sigma_{21}^{*\prime} \neq 0$.

Dla dwu źródeł ciepła umieszczonych symetrycznie względem osi x_2 zgodnie z rys. 3a otrzymamy w układzie współrzędnych x_1, x_2 następujące wzory dla naprężeń $\bar{\sigma}_{12}^{*\prime}$ na brzegach

$$\bar{\sigma}_{12}^{*\prime} = \frac{Ka^2}{8\pi}\int_0^{\infty}\beta\bar{\varrho}(\omega, \xi_1)\sin\beta x_2\,d\xi,$$

gdzie

$$\bar{\varrho}(\omega, \xi_1) = \frac{\beta\xi_1\operatorname{ch}\omega\operatorname{sh}\beta\xi_1 - \omega\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\beta\xi_1}{\omega^2\operatorname{ch}^2\omega}, \qquad \omega = \frac{\beta a}{2}.$$

Dla dwu źródeł ciepła umieszczonych zgodnie z rys. 3b otrzymamy analogicznie

$$\bar{\bar{\sigma}}_{12}^{*\prime} = \frac{Ka^2}{8\pi}\int_0^\infty \beta\bar{\bar{\varrho}}(\omega,\xi_1)\sin\beta x_2 d\xi,$$

gdzie

$$\bar{\bar{\varrho}}(\omega,\xi_1) = \frac{\beta\xi_1\operatorname{ch}\omega\operatorname{ch}\beta\xi_1 - \omega\operatorname{ch}\omega\operatorname{sh}\beta\xi_1}{\omega^2\operatorname{sh}^2\omega}.$$

Dla usunięcia naprężeń $\sigma_{12}^{*\prime} \neq 0$ na brzegach $x_1 = \pm a/2$ należy do stanu naprężeń $\sigma_{ji}^{*\prime}$, $\mu_{ji}^{*\prime}$ dodać stan naprężeń $\sigma_{ji}^{*\prime\prime}$, $\mu_{ji}^{*\prime\prime}$ określony funkcjami Φ'', $\varphi_3^{*\prime\prime}$.

Funkcje Φ'' i $\varphi_3^{*\prime\prime}$ winny spełniać równania

$$\begin{aligned}&\nabla_1^2\nabla_1^2\Phi'' = 0,\\ &\nabla_1^2(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^{*\prime\prime} = 0,\end{aligned} \tag{4.16}$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma_{11}^{*\prime\prime} = 0, \quad \sigma_{12}^{*\prime}+\sigma_{12}^{*\prime\prime} = 0, \quad \mu_{13}^{*\prime\prime} = 0 \text{ dla } x_1 = \pm\frac{a}{2}. \tag{4.17}$$

Jednocześnie powinny być spełnione równania

$$\begin{aligned}&\partial_1\nabla_1^2\Phi'' + \frac{n}{m}\partial_2(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^{*\prime\prime} = 0,\\ &\partial_2\nabla_1^2\Phi'' - \frac{n}{m}\partial_1(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^{*\prime\prime} = 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dla obciążenia zgodnie z rys. 3a przyjmujemy

$$\begin{aligned}&\bar{\Phi}'' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (\bar{M}\operatorname{ch}\beta x_1 + \beta x_1\bar{N}\operatorname{sh}\beta x_1)\cos\beta x_2 d\beta,\\ &\bar{\varphi}_3^{*\prime\prime} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (\bar{C}\operatorname{sh}\beta x_1 + \bar{D}\operatorname{sh}\eta x_1)\sin\beta x_2 d\beta, \qquad \eta = \left(\beta^2+\frac{1}{l^2}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Warunki brzegowe wyrażamy przez potencjały sprężyste Φ, Ψ i obrót φ_3^* [3]

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}^* = 2\mu(\partial_1\partial_2\Psi - \partial_2^2\Phi) + (\lambda_0+2\mu)\nabla_1^2\Phi,\\ &\sigma_{12}^* = 2\mu(\partial_1\partial_2\Phi + \partial_2^2\Psi) - 2\mu(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^*,\\ &\sigma_{21}^* = 2\mu(\partial_1\partial_2\Phi - \partial_1^2\Psi) + 2\mu(l^2\nabla_1^2-1)\varphi_3^*,\\ &\dots\dots \text{ itp.,}\end{aligned} \tag{4.20}$$

gdzie $\lambda_0 = 2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$.

Z warunków brzegowych (4.17) przy wykorzystaniu (4.20) i ze związków (4.18) można wyznaczyć cztery stałe całkowania $\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, a następnie obliczyć naprężenia $\bar{\sigma}_{ji}^{*\prime\prime}$ $\bar{\mu}_{ji}^{*\prime\prime}$ związane z funkcjami $\bar{\Phi}''$, $\bar{\varphi}_3^{*\prime\prime}$.

Dla obciążenia zgodnie z rys. 3b przyjmujemy

$$
\begin{aligned}
&\bar{\bar{\Phi}}'' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\bar{\bar{M}} \operatorname{sh} \beta x_1 + \beta x_1 \bar{\bar{N}} \operatorname{ch} \beta x_1) \cos \beta x_2 \, d\beta, \\
&\bar{\bar{\varphi}}_3^{*\prime\prime} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\bar{\bar{C}} \operatorname{ch} \beta x_1 + \bar{\bar{D}} \operatorname{ch} \eta x_1) \sin \beta x_2 \, d\beta, \qquad \eta = \left(\beta^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Po obliczeniu stałych całkowania $\bar{\bar{M}}$, $\bar{\bar{N}}$, $\bar{\bar{C}}$, $\bar{\bar{D}}$ z warunków brzegowych (4.17) i ze związków (4.18) wyznaczymy związane z funkcjami $\bar{\bar{\Phi}}''$, $\bar{\bar{\varphi}}_3^{*\prime\prime}$ naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ji}^{*\prime\prime}$, $\bar{\bar{\mu}}_{ji}^{*\prime\prime}$.

Rozwiązaniem zagadnienia według rys. 3 będą naprężenia wyrażone za pomocą wzorów (4.22)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ji}^* &= \sigma_{ji}^{*\prime} + \bar{\sigma}_{ji}^{*\prime} + \bar{\bar{\sigma}}_{ji}^{*\prime\prime}, \\
\mu_{ji}^* &= \bar{\mu}_{ji}^{*\prime} + \bar{\bar{\mu}}_{ji}^{*\prime\prime}.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Theory of non-symetric elasticity* (in Polish), PWN, Warszawa 1971.
2. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
3. W. Nowacki, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch, of Mech., **23**, 5 (1971).
4. K. Majorkowska-Knap, *Płaskie zagadnienia mikropolarnej sprężystości*, Praca doktorska złożona w Bibliotece Głównej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.
5. S. Kaliski, J. Kapelewski, S. Rymarz, *Surface waves on an optical branch in continuum with rotational degrees of freedom*. Proc. Vibr. Probl., 2, **9** (1968).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ДИСКОВ

В работе рассматриваются вопросы термических напряжений в полубесконечном диске и в дисковой полосе. При решении задач вводятся функции напряжений Эри-Миндлина и упругие потенциалы. Решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих рассматриваемые задачи, получаются благодаря применению рядов Фурье и конечных синусовых и косинусовых преобразований Фурье.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN MICROPOLAR PLATES

Problems of thermal stresses in a semi-infinite plate and in a plate strip are considered in the paper. The solution is found by means of the Airy-Mindlin stress functions and elastic potentials. The partial differential equations are solved owing to the application of Fourier series and finite sine and cosine transforms.

FILIA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ W PŁOCKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 stycznia 1974 r.
