

ZASTOSOWANIE ITERACJI SEIDLA W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH NA PRZYKŁADZIE OBLICZEŃ STATYCZNYCH PŁYT

[JERZY GOŁAŚ, ZYGMUNT KASPERSKI, ANNA PEER-KASPERSKA,
JERZY MAKOWSKI (OPOLE)]

1. Wprowadzenie

W metodzie elementów skończonych, jak wiadomo, zasadniczymi czynnikami każdego programu są następujące podprogramy: podprogram do budowania macierzy sztywności poszczególnych elementów, podprogram do budowania układu algebraicznych równań liniowych oraz podprogram do rozwiązywania układu równań. Zbieżność wyników obliczeń numerycznych do rozwiązań dokładnych zależy głównie od wyboru kształtu elementu, postaci funkcji przemieszczeń oraz gęstości podziału ustroju ciągłego na elementy. Zwiększenie liczby punktów węzłowych co prawda lepiej aproksymuje ustrój ciągły, jednak prowadzi do dużego układu równań i zasadniczo limituje możliwość stosowania maszyn cyfrowych do obliczeń. Pojawia się zatem problem opracowywania programów wykorzystujących jak najoptymalniej pojemność pamięci maszyny cyfrowej. Dużą efektywność daje zastosowanie iteracji Seidla do rozwiązywania układu równań. Pozwala ona na wielostopniowe budowanie układu równań, bez pamiętania całej macierzy sztywności układu, oraz na etapowy charakter obliczeń, a ponadto pozwala na pełne wykorzystanie wszystkich własności macierzy sztywności, takich jak: pasmowość, symetria oraz regularny rozkład wyrazów zerowych występujących w paśmie. A zatem, każde równanie zapamiętywane jest w postaci zwartej, z pominięciem wyrazów zerowych.

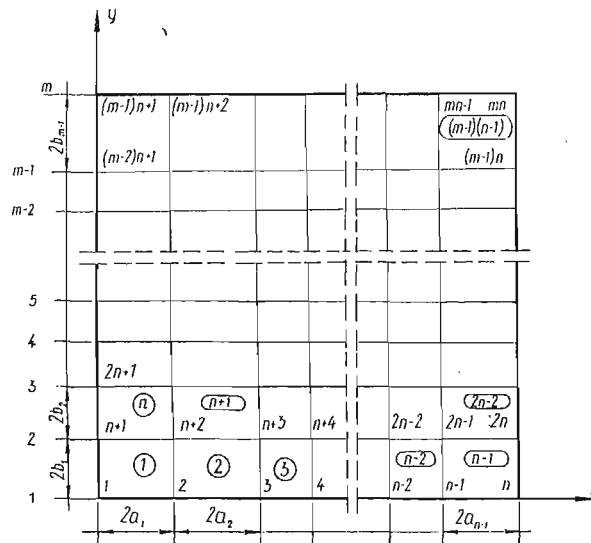
Zasadnicze procedury programu wykorzystującego wyżej wymienione możliwości przedstawione zostaną na przykładzie płyt izotropowych, przyjmując prostokątny element skończony o 12 parametrach węzłowych [1]. W przypadku przyjmowania większej liczby stopni swobody dla elementu prostokątnego, np. 16, czy też jak dla płyty z żebrami jednostronnymi i płyty trójwarstwowej minimum 20, podstawowa istota budowania odpowiednich podprogramów nie ulegnie zmianie. Jedyne wymiary podmacierzy sztywności elementu, zamiast wymiarów (3×3) , przyjmą odpowiednio wielkości (4×4) i (5×5) oraz większa będzie liczba warunków brzegowych, [2], [3].

Przedstawiony algorytm obliczeń numerycznych swą ogólnością obejmuje analizę statyczną płyt dowolnie obciążonych, płyt o kształtach złożonych z prostokątów, płyt o dowolnych warunkach brzegowych i podpartych w swoim obszarze oraz płyt osłabionych otworami prostokątnymi. Sztywność giętna płyt może być zmienna, lecz stała w obrębie elementu.

Niektóre elementy przedstawionego algorytmu mogą być rozszerzone na inne zagadnienia metody elementów skończonych.

2. Algorytm programu

2.1. Dyskretyzacja układu. Rysunek 1 przedstawia prostokątny obszar płyty, który podzielono na $z = (n-1)(m-1)$ elementów skończonych o dowolnych wymiarach oraz ilustruje przyjętą numerację punktów węzłowych i poszczególnych elementów. Przyjęty na rysunku kształt nie ogranicza zastosowań programu do płyt prostokątnych. W przypadku płyt o innych kształtach (ale dających się podzielić na elementy prostokątne) odpowiednim elementom należy nadać bardzo małą grubość w porównaniu do grubości



Rys. 1

płyty rzeczywistej. Dopelnienie obszaru płyty do prostokąta pozwala zachować ciągłość numeracji, a tym samym możliwe jest całkowite zautomatyzowanie obliczeń, przy prostym sposobie przygotowywania danych. Jedyne wielkościami określającymi podział płyty na elementy są: liczby n , m (liczby punktów węzłowych znajdujących się odpowiednio na poziomej i pionowej krawędzi), wymiary a_i , b_j ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$), szerokość i wysokość i -tego pionowego i j -tego poziomego pasa podziału płyty, grubość t_k ($k = 1, 2, \dots, z$) poszczególnych elementów.

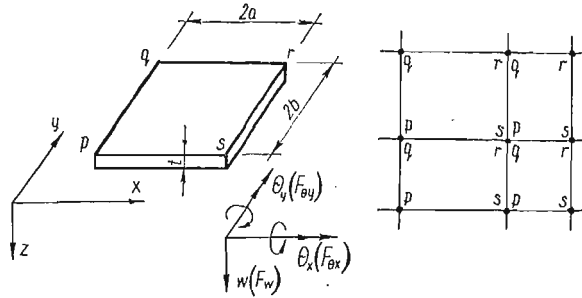
2.2. Sposób tworzenia macierzy sztywności układu. Warunki równowagi dla poszczególnych punktów węzłowych podziału konstrukcji prowadzą do układu równań

$$(2.2.1) \quad [K]\{\delta\} = \{F\},$$

gdzie $[K]$ macierz sztywności układu,
 $\{\delta\}$ wektor uogólnionych przemieszczeń,
 $\{F\}$ wektor obciążeń.

Macierz sztywności układu $[K]$ buduje się z odpowiednio składanych i sumowanych podmacierzy k_{pq} , będących elementami macierzy sztywności poszczególnych elementów. Dla płyty izotropowej macierz sztywności elementu prostokątnego (rys. 2) przyjmuje postać

$$(2.2.2) \quad [k] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} & k_{pr} & k_{ps} \\ k_{qp} & k_{qq} & k_{qr} & k_{qs} \\ k_{rp} & k_{rq} & k_{rr} & k_{rs} \\ k_{sp} & k_{sq} & k_{sr} & k_{ss} \end{bmatrix}$$



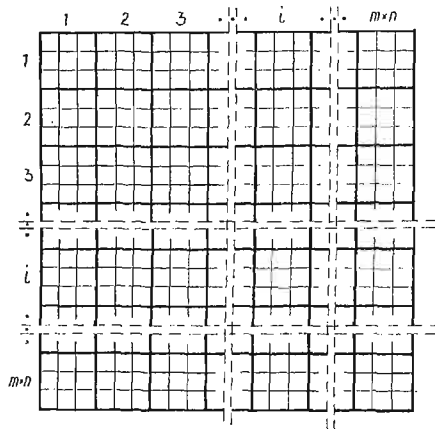
Rys. 2

gdzie elementy k_{qp} są podmacierzami kwadratowymi o wymiarach (3×3) . Podmacierze te wyznaczono w postaci jawnej i przykładowo wynoszą:

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} k_{pp} &= \begin{bmatrix} \frac{7-2\nu}{10ab} + \frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} & -\frac{(1+4\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} \\ -\frac{(1+4\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & \frac{4b(1-\nu)}{15a} + \frac{4a}{3b} & -\nu \\ \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} & -\nu & \frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{4b}{3a} \end{bmatrix}, \\ k_{pq} &= \begin{bmatrix} -\frac{(7-2\nu)}{10ab} + \frac{b}{2a^3} - \frac{a}{b^3} & -\frac{(1-\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & -\frac{(1+4\nu)}{10b} + \frac{b}{2a^2} \\ \frac{(1-\nu)}{10a} + \frac{a}{b^2} & -\frac{b(1-\nu)}{15a} + \frac{2a}{3b} & 0 \\ -\frac{(1+4\nu)}{10b} + \frac{b}{2a^2} & 0 & -\frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{2b}{3a} \end{bmatrix}, \\ k_{qq} &= \begin{bmatrix} \frac{7-2\nu}{10ab} + \frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} & \frac{(1+4\nu)}{10a} + \frac{a}{b^2} & \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} \\ \frac{1+4\nu}{10a} + \frac{a}{b^2} & \frac{4b(1-\nu)}{15a} + \frac{4a}{3b} & \nu \\ \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} & \nu & \frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{4b}{3a} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie $2a$, $2b$, t oznaczają odpowiednio: długość, szerokość i grubość elementu prostokątnego płyty.

W dalszym ciągu, gdziekolwiek będzie mowa o wierszu bądź kolumnie macierzy $[K]$, to będziemy rozumieli pod tym odpowiednią trójkę wierszy lub kolumn, jak to pokazano na rys. 3. Przez i oznaczono numer punktu węzłowego podziału płyty, $i = 1, 2, \dots, n \times m$.



Rys. 3

Objaśnienie zapisu. Zapis

$$(2.2.4) \quad d - k_{pq} \rightarrow (u, v) : (h)$$

będzie oznaczał: należy wziąć wymiary a, b, t elementu skończonego o numerze d , utworzyć macierz k_{pq} , dodać ją do wyrazów macierzy $[K]$ leżących w wierszu u i w kolumnie v . Z uwagi na symetrię macierzy $[K]$, będziemy budowali tylko jej wyrazy leżące na i nad przekątną, dlatego $u \leq v$. Symbol (h) będzie wyjaśniony w dalszej części pracy.

W zależności od położenia punktów węzłowych podziału płyty rozróżnia się następujące przypadki:

Przypadek I

$i = 1$ (węzeł leżący w lewym dolnym narożu)

$$1 - k_{pp} \rightarrow (1, 1) : (1),$$

$$1 - k_{pq} \rightarrow (1, n+1) : (4),$$

$$1 - k_{pr} \rightarrow (1, n+2) : (5),$$

$$1 - k_{ps} \rightarrow (1, 2) : (2).$$

Przypadek II

$i = 2, 3, \dots, n-1$ (węzły leżące na dolnej poziomej krawędzi płyty, nie licząc węzłów narożnych)

$$i-1 - k_{sq} \rightarrow (i, n+i-1) : (3),$$

$$i-1 - k_{sr} \rightarrow (i, n+i) : (4),$$

$$i-1 - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$i - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$i - k_{pq} \rightarrow (i, n+1) : (4),$$

$$i - k_{pr} \rightarrow (i, n+i+1) : (5),$$

$$i - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek III

$i = n$ (węzeł leżący w prawym dolnym narożu)

$$n-1 - k_{sq} \rightarrow (n, 2n-1) : (3),$$

$$n-1 - k_{sr} \rightarrow (n, 2n) : (4),$$

$$n-1 - k_{ss} \rightarrow (n, n) : (1).$$

Przypadek IV

$i = n+1, 2n+1, \dots, (m-2)n+1$ (węzły leżące na lewej krawędzi nie licząc węzłów narożnych).

Ogólnie: $i = jn+1$, gdzie $j = 1, 2, 3, \dots, m-2$

$$(j-1)n-j+2 - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)n-j+2 - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2),$$

$$jn-j+1 - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$jn-j+1 - k_{pq} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$jn-j+1 - k_{pr} \rightarrow (i, i+n+1) : (5),$$

$$jn-j+1 - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek V

$i = jn+k$, gdzie $k = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m-2$ (węzły leżące wewnątrz obszaru płyty)

$$(j-1)(n-1)+k-1 - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)(n-1)+k - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)(n-1)+k - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{sq} \rightarrow (i, i+n-1) : (3),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{sr} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$j(n-1)+k - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$j(n-1)+k - k_{pq} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$j(n-1)+k - k_{pr} \rightarrow (i, i+n+1) : (5),$$

$$j(n-1)+k - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek VI

$i = (j+1)n$, gdzie $j = 1, 2, \dots, m-2$ (węzły leżące na prawej krawędzi nie licząc węzłów narożnych)

$$j(n-1) - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{sq} \rightarrow (i, i+n-1) : (3),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{sr} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1).$$

Przypadek VII

$i = (m-1)n+1$ (węzeł leżący w lewym górnym narożu)

$$(m-2)(n-1)+1 - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(m-2)(n-1)+1 - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek VIII

$i = (m-1)n+k$, gdzie $k = 2, 3, \dots, n-1$ (węzły leżące na górnej krawędzi, nie licząc węzłów narożnych)

$$(m-2)(n-1)+k-1 - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(m-2)(n-1)+k - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

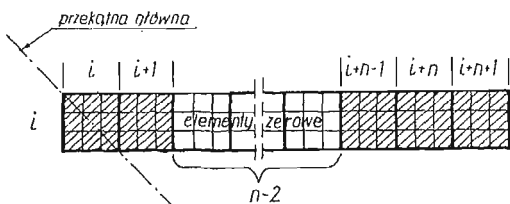
$$(m-2)(n-1)+k - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek IX

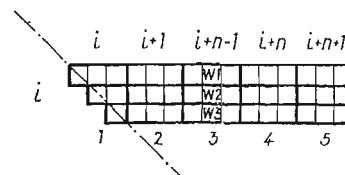
$i = m \times n$ (węzeł leżący w prawym górnym narożu)

$$(m-1)(n-1) - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1).$$

Macierz $[K]$ jest macierzą pasmową o dużej liczbie wyrazów zerowych. Przykładowo: i -ty wiersz macierzy $[K]$ ma postać przedstawioną na rys. 4, gdzie pola zakreskowane oznaczają wyrazy niezerowe. Przy dużych n liczba wyrazów zerowych wzrasta bardzo szybko.



Rys. 4



Rys. 5

ko. Łatwo zauważyć, że maksymalna liczba wyrazów niezerowych w każdym wierszu $[K]$ (po uwzględnieniu symetrii) wynosi 15. Dlatego też, każdy wiersz zapamiętywany jest w tablicach $W1, W2, W3$ o wymiarach $[1:15], [1:14], [1:13]$ (rys. 5), daje to oszczędność pamięci maszyny cyfrowej, a ponadto skraca czas obliczeń, ponieważ na elementach zerowych nie wykonuje się żadnych operacji arytmetycznych.

Zapamiętanie każdego wiersza $[K]$ w postaci zwartej powoduje zmianę indeksów poszczególnych wyrazów. Ujmuje to liczba h (zob. 2.2.4), oznaczająca numer pozycji, do której ściągnięto (przesunięto) odpowiedni wyraz i -tego wiersza. Wyrazem tym może być jedna, bądź suma dwóch i więcej podmacierzy (2.2.2).

2.3. Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych z uwzględnieniem warunków brzegowych. Rozwiązanie układu równań (2.2.1), gdzie

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1t} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{r1} & K_{r2} & \dots & K_{rt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{t1} & K_{t2} & \dots & K_{tt} \end{bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \\ \vdots \\ \delta^r \\ \vdots \\ \delta^t \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_t \end{bmatrix},$$

$t = 3m \times n$ jest liczbą stopni swobody układu, otrzymuje się metodą iteracyjną Seidla z czynnikiem nadrelaksacji ω . Odpowiedni wiersz macierzy $[K]$ umieszczony jest w tablicach $W1, W2, W3$.

Proces iteracyjny w metodzie Seidla odbywa się cyklicznie. Wpierw obiera się dowolne przybliżenie $\delta_0 = [\delta_0^1, \delta_0^2, \dots, \delta_0^t]^T$, a następnie w $(j+1)$ kroku iteracyjnym oblicza się wektor δ_{j+1} według wzoru

$$(2.3.1) \quad \delta_{j+1}^r = \delta_j^r - \frac{\omega}{K_{rr}} \left(\sum_{q=1}^{r-1} K_{rq} \delta_{j+1}^q + \sum_{q=r}^t K_{rq} \delta_j^q - F_r \right),$$

gdzie K_{ij} są wyrazami $[K]$.

Czynnik nadrelaksacji przyśpieszający zbieżność rozwiązania powinien spełniać nierówność $1 \leq \omega \leq 2$, [4].

Ze wzoru (2.3.1) wynika, że w przeciwieństwie do metod dokładnych rozwiązywania układu równań, elementy macierzy sztywności układu $[K]$ nie zmieniają się. Pozwala to, wykorzystać wszystkie własności tej macierzy, jak: symetrię, pasmowość oraz regularny rozkład dużej ilości elementów zerowych występujących w paśmie. Do obliczenia przybliżeń r -tej niewiadomej potrzebny jest tylko r -ty wiersz macierzy $[K]$.

Tok postępowania poszczególnych etapów przedstawionej metody w programie na maszynę cyfrową jest następujący (zob. schemat blokowy, rys. 6):

a) dla dowolnego punktu węzłowego i tworzy się tablice $W1, W2, W3$ według sposobu podanego w punkcie 2.2,

b) wyznacza się odpowiednią trójkę prawych stron równania (2.2.1),

c) sprawdza się, czy dany węzeł jest węzłem brzegowym, jeśli tak, to jakiego rodzaju warunek brzegowy występuje tam. W przypadku np. cienkich płyt izotropowych rozróżnia się następujące warunki brzegowe:

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{lll} \text{I} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} = 0, & \delta^{r+2} = 0), \\ \text{II} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} = 0, & \delta^{r+2} \neq 0), \\ \text{III} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} \neq 0, & \delta^{r+2} = 0), \\ \text{IV} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} \neq 0, & \delta^{r+2} \neq 0), \end{array}$$

gdzie: δ^r oznacza ugięcie, zaś δ^{r+1} i δ^{r+2} oznaczają kąty obrotów kolejno względem osi równoległych do osi x i y .

Warunki brzegowe do pamięci maszyny cyfrowej wprowadza się podając na taśmie kolejno: rodzaj warunku brzegowego, odpowiednią ich liczbę oraz numery węzłów, w którym dany warunek występuje. Wówczas w każdym kroku iteracyjnym za odpowiednią niewiadomą podstawia się wartość zerową;

d) oblicza się δ^r według wzoru (2.3.1) biorąc za k_{rq} odpowiedni wyraz tablic $W1, W2, W3$. Przy czym pamiętać należy równocześnie o tym, że w tablicach W wyrazy nie oznaczają kolejnych wyrazów r -tego wiersza macierzy $[K]$, lecz są to tylko niezerowe elementy tego wiersza. W związku z tym niewiadome δ_{j+1}^q oraz δ_j^q we wzorze (2.3.1) muszą występować w odpowiedniej kolejności.

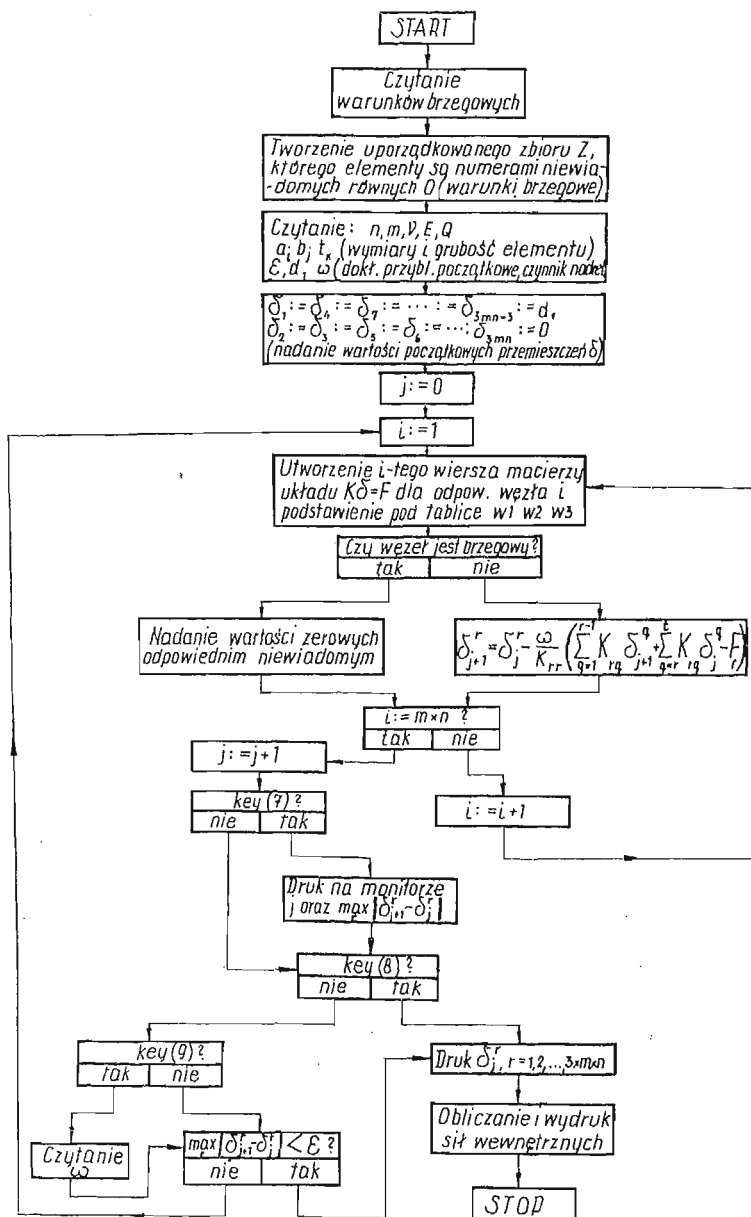
Po wykonaniu iteracji dla wszystkich niewiadomych układu bada się wartość wyrażenia

$$(2.3.3) \quad u = \max_{1 \leq r \leq t} |\delta_{j+1}^r - \delta_j^r|.$$

Wielkość powyższego wyrażenia charakteryzuje szybkość zbieżności do rozwiązania dokładnego oraz określa w pewnym sensie wielkość błędu bezwzględnego. Jeśli $u \leq \varepsilon$, gdzie ε jest zadaną małą wielkością, wówczas obliczanie przemieszczeń kończy się, przy

czym przemieszczenia przyjmują takie wielkości, jakie otrzymano w ostatnim kroku iteracji. Jeśli natomiast $u > \epsilon$, to zaczyna się tok postępowania od punktu a) do d), czyli wykonuje się następny krok iteracji aż do otrzymania $u \leq \epsilon$.

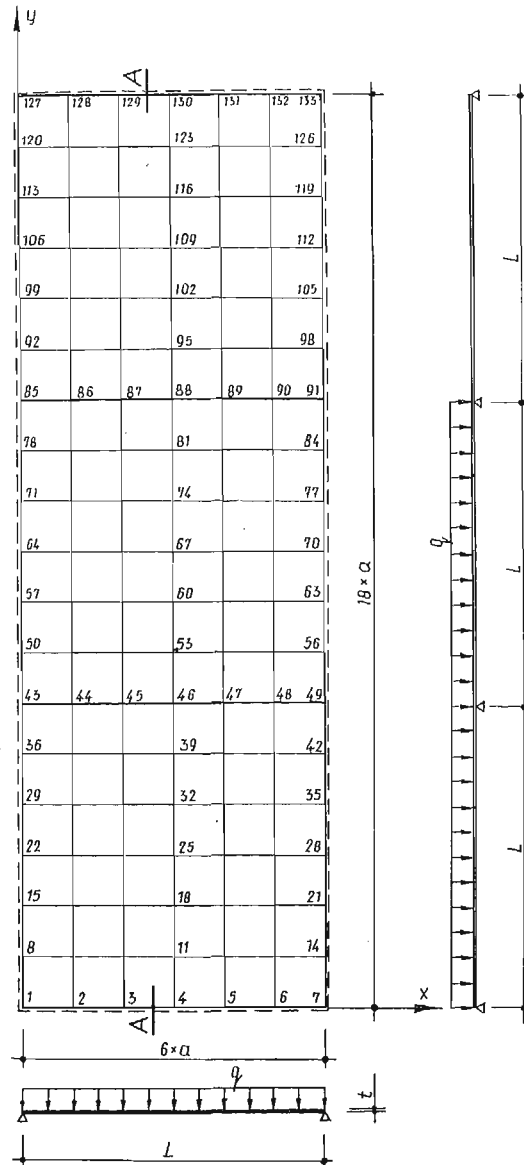
Po rozwiązaniu układu równań (2.2.1), czyli po wyliczeniu przemieszczeń δ , oblicza się wielkości sił wewnętrznych, co nie przedstawia już większych trudności i nie będzie omówione w niniejszej pracy.



Rys. 6. Ogólny schemat blokowy programu zrealizowanego na maszynie cyfrowej «ODRA 1204» Zapis key (i) oznacza pytanie, czy został wciśnięty klawisz o numerze i dla maszyny cyfrowej «ODRA 1204»

3. Uwagi końcowe

Autorzy sądzą, że przedstawiona metoda iteracji może być wykorzystana wszędzie tam, gdzie otrzymuje się dużą liczbę równań, których rozwiązanie metodą dokładną np. metodą eliminacji Gaussa przekracza możliwości pojemności pamięci maszyny cyfrowej.



Rys. 7

Wadą metody jest to, że oblicza się wielokrotnie te same wielkości tzn. powtarza się zawsze tok postępowania od punktu a) aż do d). Jest to jednak konieczne ze względu na ograniczone pojemności maszyn cyfrowych. Czas obliczeń zależy od gęstości podziału

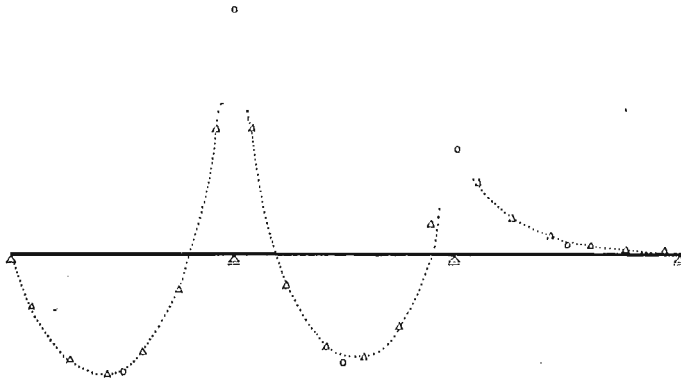
obszaru płyty na elementy i od odpowiedniego doboru czynnika nadrelaksacji ω . Przykładowo dla około 1000 stopni swobody i $\omega = 1,8$ czas obliczeń wynosił 2,5 godziny.

Można ponadto wysunąć następujące wnioski:

1. Metody iteracyjne posiadają ważną własność tzw. autokorekcji.
2. Przedstawiony program można rozszerzyć na zagadnienia statyki płyt trójwarstwowych, płyt z żebrami jednostronnymi itp.
3. Modyfikacja wektora obciążeń w każdym kroku iteracyjnym, przez wprowadzenie czynnika nadrelaksacji znacznie skraca czas obliczeń na maszynie cyfrowej.

4. Przykład liczbowy

Opracowany program sprawdzono na szeregu przykładów liczbowych. Dla płyty trójpolowej, (rys. 7), przy podziale na 108 elementów skończonych otrzymane wyniki momentów zginających w porównaniu z wynikami znanymi z literatury [5] różnią się o około $0,5\% \div 1,5\%$ (rys. 8).



Rys. 8. Wykres momentów zginających M w przekroju $A - A$; \circ — wyniki znane z literatury, $\dots \Delta \dots$ — wyniki otrzymane

Literatura cytowana w tekście

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1972).
2. R. GANOWICZ, J. GOŁAŚ, *Pewne problemy teorii płyt z żebrami jednostronnymi*, Rozpr. Inż., 3, 15, (1967).
3. J. GOŁAŚ, *Pewne rozwiązania dla kołowych płyt trójwarstwowych obciążonych na krawędzi*, Rozpr. Inż. 19, 2, (1971).
4. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa 1971.
5. *Poradnik inżyniera i technika budowlanego*, Praca zbiorowa, Arkady, Warszawa 1968.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИИ ЗЕЙДЛЯ К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ПЛИТ

В работе рассмотрена программа статического расчета, методом конечных элементов, прямоугольных плит со скачкообразно меняющейся жесткостью, при произвольных нагрузках и произвольных краевых условиях. Решение вытекающей из процедуры дискретизации, системы уравне-

ний получено с применением итерационного метода Зейделя со сверхрелаксацией. Применение метода Зейделя дало возможность многоступенчатого построения системы уравнений при одновременном ее решении. Программа проверена на ряде численных примеров. Рассматриваемый метод может использоваться для других задач решаемых методом конечных элементов.

Summary

APPLICATION OF SEIDEL'S ITERATION TO THE FINITE ELEMENT METHOD, ON THE SAMPLE OF STATIC PLATE ANALYSIS

The paper presents a program of the finite element method applied to the static analysis of rectangular plates with jumptype variable rigidity, under arbitrary boundary conditions and loads. The set of equations resulting from the discretization process is solved by the iterational Seidel method with super-relaxation. Application of the Seidel method enables the multi-step construction of the set of equations and its simultaneous solution. The program is verified on several numerical examples. The procedure discussed may be applied to other finite element problems.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, OPOLE

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1974 r.
