MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 12 (1974)

WIELKIE SYSTEMY PROCESÓW NIEODWRACALNYCH TERMODYNAMIKI

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Autor w swoich pracach [1 i 2] sformułował algebrę wielociągów czyli ciągów wielowskaźnikowych jako wielkich systemów ciągów i rozważał elementy analizy wielociągowej. Prace [3–6] dotyczą systemowego sformułowania praw Hooke'a, Ohma, Newtona, natomiast w pracach [7–12] są sformułowane wielociągowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju w zastosowaniu do konkretnych wielkich systemów mechanicznych, stereomechanicznych, elektrycznych. Okazuje się, że algebraiczny formalizm przestrzeni liniowej o elementach wielociągowych, jako pojęciach ogólniejszych od wektora i macierzy, można zastosować do sformułowania systemu wielkiego procesów nieodwracalnych termodynamiki.

W pracy niniejszej omówiono następujące zagadnienia:

1) ujęcie systemowe procesów nieodwracalnych termodynamiki;

2) zastosowanie ciągów wielowskaźnikowych — w szczególności przekształceń wieloliniowych — do przedstawienia tak pojmowanych procesów jako systemów wielkich;

3) wykorzystanie sformalizowanego pojęcia układu — systemu przepływowego wielowskaźnikowego do rozważania tych procesów;

4) podanie wielowskaźnikowych schematów blokowych jako ilustracji przekształceń wieloliniowych;

5) interpretację zmiennych stanu procesów termodynamicznych za pomocą grafów wielowskaźnikowych wielopoziomowych;

6) sformułowanie problemu optymalizacji wielkich systemów termodynamicznych procesów nieodwracalnych;

7) omówienie i uzasadnienie analogii termodynamiczno-mechaniczno-stereomechaniczno-elektryczno-ekonomicznej w klasie przekształceń wieloliniowych.

Praca niniejsza jest jednocześnie wstępem do rozważań ogólniejszych na temat systemowego traktowania zagadnień termosprężystości. Autor sformułował tę problematykę w kolejnej pracy pod tytułem «O termosprężystych systemach wielkich», która jest przygotowana do druku. Wykorzystano w niej wprowadzone tu systemy wielkie równań fenomenologicznych — równania fenomenologiczne wielociągowe.

Rozważmy układ[1] termodynamiczny[2] spełniający drugą zasadę termodynamiki

$$Tds-Q \geqslant 0,$$

[1] W dalszych rozważaniach okaże się, że jest to układ przepływowy [14], którego pierwszym przybliżeniem jest przekształcenie liniowe (wieloliniowe).

[2] Ściślej mówiąc termostatyczny.

gdzie S oznacza entropię układu, T — temperaturę absolutną, Q — ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany nieskończenie małej, natomiast d jest symbolem różniczki. Przypadek znaku równości dotyczy procesów (zjawisk) quasi-stacjonarnych, znak nierówności stosuje się w przypadku procesów nieodwracalnych.

Zgodnie z terminologią termodynamiczną [13] rozróżniamy dwa rodzaje wielkości charakteryzujących procesy nieodwracalne, mianowicie:

1) wielkości intensywne, takie jak temperatura absolutna T, p — ciśnienie, μ_i — gramowy potencjał chemiczny i-tego składnika niezależnego, F_a — siły wykonujące pracę przy zmianie parametrów f_a;

2) wielkości ekstensywne, takie jak np. masa, energia.

Z analizy wyrażeń określających szybkość reakcji tworzenia entropii lub źródła entropii wynika, że wielkości te są podane za pomocą sum iloczynów różnic lub gradientów pewnych wielkości intensywnych i szybkości zmian pewnych wielkości ekstensywnych.

Wiadomo z pracy [13], że przyczynami przemian nieodwracalnych są różnice bądź gradienty wielkości intensywnych.

DEFINICJA 1.0. ***Bodźcami termodynamicznymi** X (**siłami termodynamicznymi**) nazywamy różnice i gradienty wielkości intensywnych, występujących w wyrażeniach określających źródła entropii* [13].

Procesy nieodwracalne charakteryzują się zmianami lub przepływami określonych wielkości intensywnych bądź też powstawaniem jednych lub znikaniem innych substancji w reakcjach chemicznych. Spowodowane to jest bodźcami termodynamicznymi.

DEFINICJA 2.0. ***Przepływami termodynamicznymi** nazywa się szybkość zjawisk spowodowanych bodźcami termodynamicznymi.*

Pojęcia te umożliwiają scharakteryzowanie źródła entropii.

DEFINICJA 3.0. *Źródło entropii $\mathfrak{S}$ jest sumą iloczynów bodźców termodynamicznych i przepływów termodynamicznych,*

$$\mathfrak{S} = \underbrace{{}^{2}_{1}\bar{X}\,{}^{2}\bar{J}}_{1} = \bar{X}_1\bar{J}_1 + \ldots + \bar{X}_n\bar{J}_n,$$

gdzie

$$\bar{X} = [X_j],$$

$$\bar{J} = [J_j], \quad j = 1, \ldots, n$$

są ciągami jednowskaźnikowymi, przy czym n jest liczbą bodźców lub przepływów.

W sformułowaniu tym mogą też wystąpić ciągi zerowskaźnikowe, mianowicie wtedy, gdy

$$\mathfrak{S} = {}^{0}\bar{X}\cdot{}^{0}\bar{J} = XJ,$$

czyli w przypadku jednego bodźca i jednego przepływu.

Istota uogólnienia rozważanych pojęć i procesu termodynamicznego nieodwracalnego na wielkie systemy takich zjawisk polega na wprowadzeniu ciągów wielowskaźnikowych zmiennych stanu, to jest na stosowaniu bodźców i przepływów termodynamicznych wielowskaźnikowych. W konsekwencji źródło entropii $\mathfrak{S}$ wyrazi się odpowiednią sumą «skalarową» iloczynów takich ciągów.

Inaczej mówiąc, ciągi wielowskaźnikowe [1 i 2] umożliwiają rozpatrzenie procesów termodynamicznych nieodwracalnych jako systemów wielkich. W związku z tym okaże się przydatna następująca

DEFINICJA 4. *Układ konkretny* [14] *nazywa się* ***systemem wielkim,*** *gdy jego funkcja stanu*

$$^{w}\overline{F}(^{w}_{1}\overline{x},\ ^{w}_{2}\overline{x}) = {}^{w}\overline{0}$$

jest określona na przestrzeniach ciągów wielowskaźnikowych

$$^{w}\overline{x} = [x_{\overline{j}}] = [x_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w,$$

przy czym rozróżniamy dwa przypadki: (a), *gdy* $w = 1$ *wtedy liczba* n *elementów* (*pewnego ciała*) *ciągu jednowskaźnikowego zmiennych jest odpowiednio duża*; *oraz* (b), *gdy* $w > 1$, *czyli zmienne stanu przedstawione są ciągami więcej niż jednowskaźnikowymi.*

Określenie to nie precyzuje bliżej wielkiego systemu, ale wyjaśnia wystarczająco, iż wtedy mówimy o takim układzie, gdy mamy do czynienia z dużą liczbą zmiennych jednowskaźnikowych lub gdy zmienne są co najmniej dwuwskaźnikowe.

Strukturę takich zmiennych oraz zdefiniowane na nich przekształcenia wieloliniowe wyjaśniają wprowadzone dalej grafy wielowskaźnikowe i schematy blokowe wielowskaźnikowe.

2. Równania fenomenologiczne wielowskaźnikowe jako pierwsze przybliżenie zależności przepływów wielowskaźnikowych od bodźców wielowskaźnikowych

DEFINICJA 1. w. ***Bodźcem wielowskaźnikowym*** *nazywamy ciąg w-wskaźnikowy*

$$^{w}\overline{X} = [X_{\overline{j}}] = [X_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w.$$

DEFINICJA 2. w. ***Przepływem wielowskaźnikowym*** *nazywamy ciąg w-wskaźnikowy*

$$^{w}\overline{J} = [J_{\overline{j}}] = [J_{j_1 \dots j_w}].$$

DEFINICJA 5. ***Funkcją stanu procesu termodynamicznego nieodwracalnego*** *nazywamy przekształcenie*

$$^{w}\overline{F}(^{w}\overline{X},\ ^{w}\overline{J}) = {}^{w}\overline{0},$$

przy czym $^{w}\overline{X}$ *i* $^{w}\overline{J}$ nazywamy ***zmiennymi stanu,*** *a parę* $^{w}\overline{X}$, $^{w}\overline{J}$ — ***stanem*** *zjawiska, natomiast zbiór stanów tworzących w przypadku ogólnym pewne rodziny hiperpowierzchni nazywamy* ***obrazem*** *zjawiska.*

Przekształcenia te nazywa się też równaniami fenomenologicznymi procesów termodynamicznych nieodwracalnych wielowskaźnikowych.

Definicje bodźców i przepływów w postaci w-wskaźnikowej dają możność określenia źródła entropii w postaci formy liniowej wielowskaźnikowej, zwanej formą k-krotną liniową.

DEFINICJA 3. w. *Źródło entropii* $\mathfrak{S}$ *jest* (*w*-1)-***krotną formą liniową bodźców termodynamicznych i przepływów termodynamicznych***

$$\mathfrak{S} = \underbrace{^{w}\overline{X}\ ^{w}\overline{J}}_{w-1} = \underbrace{^{w-1}\overline{X}\ ^{w-1}\overline{J}_1}_{w-2} + \dots + \underbrace{^{w-1}\overline{X}_n\ ^{w-1}\overline{J}_n}_{w-2} =$$

$$= \dots = \overline{X}_{\underbrace{1 \dots 1}_{w-1\,\mathrm{razy}}} \overline{J}_{1 \dots 1} + \dots + \overline{X}_{n \dots n} \overline{J}_{\underbrace{n \dots n}_{w-1\,\mathrm{razy}}}.$$

U w a g a. W rzeczywistości mamy tu do czynienia z w-krotną formą liniową wspomnianych ciągów, gdyż należy jeszcze rozwinąć iloczyny skalarowe ciągów jednowskaźnikowych $\overline{X}\overline{J}$.

Tym samym przekształcenie

$$\pi(\mathfrak{S}, {}^{w}\overline{X}, {}^{w}\overline{J}) = 0$$

jest niejako warunkiem optymalizacji («funkcją celu») wielowskaźnikowej funkcji stanu. Okazuje się bowiem, że procesy nieodwracalne dążą do stanu minimum źródła entropii

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}({}^{w}\overline{X}, {}^{w}\overline{J})$$

przy danym przekształceniu ( ).

Wyniki doświadczeń (prawo Fouriera przewodzenia energii, zjawisko prądu elektrycznego, transportu energii, masy, zjawiska mechaniczne, prawo dyfuzji Ficka, przepływ substancji w termodyfuzji i inne) umożliwiają, przy bardzo małych bodźcach, przyjęcie liniowej zależności przepływów od bodźców.

Założenie liniowości w odniesieniu do reakcji chemicznych oddalonych od stanu równowagi jest przybliżeniem niewystarczającym.

2.1. Równania fenomenologiczne liniowe zero- i jednowskaźnikowe.

DEFINICJA 6.1. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest* ***liniowy****, gdy opisuje go przekształcenie liniowe* [15 i 16] (*jednoliniowe* [1 i 2])

$$\overline{J} = {}^{2}\overline{L}\overline{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} J_1 &= L_{11}\ X_1 + \ldots + L_{1n}X_n, \\ &\vdots \\ J_n &= L_{n1}\ X_1 + \ldots + L_{nn}X_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$\overline{J_1} = [J_{j_1}], \quad j_1 = 1, \ldots, n_1$$

jest ciągiem jednowskaźnikowym przepływów, natomiast

$$\overline{X} = [X_{j_2}], \quad j_2 = 1, \ldots, n_2; \quad n_1 = n_2 = n$$

stanowi ciąg jednowskaźnikowych bodźców termodynamicznych, przy czym

$$^{2}\overline{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix} = [L_{j_1 j_2}]$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym stałych współczynników («proporcjonalności», «sprężystości») niezależnych od bodźców i przepływów.

Przekształcenie to nosi nazwę równań fenomenologicznych, przy czym $L_{j_1 j_2}$ są współczynnikami fenomenologicznymi.

Zauważmy, że każda współrzędna J_{k_1}, $k_1 = 1, \ldots, n_1 = n$ jako ciąg zerowskaźnikowy — element ciągu jednowskaźnikowego $\overline{J}$ — jest kombinacją liniową współrzędnych jednowskaźnikowych $\overline{X}$, czyli

$$J_{k_1} = \underbrace{\overline{L}_{k_1}\overline{X}}_{1} = L_{k_1 1}X_1 + \ldots + L_{k_1 n}X_n.$$

W związku z tym przekształcenie $L_{k_1 k_2} X_{k_2}$ nazywamy *przekształceniem zeroliniowym* ciągów zerowskaźnikowych.

2.2. Równania fenomenologiczne dwuliniowe. Przekształcenie liniowe ciągów dwuwskaźnikowych nazywamy przekształceniem dwuliniowym [1, 2].

DEFINICJA 6.2. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest* ***dwuliniowy****, gdy opisuje go przekształcenie dwuliniowe*

$$^2\overline{J} = {}^4\overline{L}\,{}^2\overline{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} \overline{J_1} &= {}^2\overline{L}_{11}\overline{X}_1 + \ldots + {}^2\overline{L}_{1n}\overline{X}_n,\\ &\vdots\\ \overline{J_n} &= {}^2\overline{L}_{n1}\overline{X}_1 + \ldots + {}^2\overline{L}_{nn}\overline{X}_n \end{aligned}$$

lub przy uwzględnieniu ciągów zerowskaźnikowych

$$\begin{aligned} J_{1_1} &= L_{11_{11}}X_{1_1} + \ldots + L_{1n_{11}}X_{n_1} + \ldots + L_{11_{1n}}X_{1_n} + \ldots + L_{1n_1}X_{n_1},\\ &\vdots\\ J_{n_n} &= L_{n1_{n1}}X_{1_1} + \ldots + L_{nn_{n1}}X_{n_1} + \ldots + L_{n1_{nn}}X_{1_n} + \ldots + L_{nn_{nn}}X_{n_n}, \end{aligned}$$

gdzie

$$^2\overline{J} = [J_{j_1 j_3}] = \begin{bmatrix} \overline{J}_1 \\ \vdots \\ \overline{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = j_3 = 1, \ldots, n$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym przepływów, a

$$^2\overline{X} = [X_{j_2 j_4}] = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = j_4 = 1, \ldots, n$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym bodźców termodynamicznych, natomiast

$$^4\overline{L} = [L_{j_1 j_2 j_3 j_4}] = \begin{bmatrix} {}^2\overline{L}_{11} & \ldots & {}^2\overline{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^2\overline{L}_{nn} \end{bmatrix}$$

stanowi ciąg czterowskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych, przy czym każdy składnik sum stron prawych ${}^2\overline{L}_{k_3 k_4}\overline{X}_{k_4}$, $k_3 = k_4 = 1, \ldots, n$, *dany jest iloczynem «macierzowym»* [1, 2] *ciągu dwuwskaźnikowego przez ciąg jednowskaźnikowy.*

2.3. Równania fenomenologiczne trójliniowe. Przekształcenie liniowe ciągów trójwskaźnikowych nazywamy przekształceniem trójliniowym [1, 2].

DEFINICJA 6.3. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest* ***trójliniowy****, gdy opisuje go przekształcenie trójliniowe*

$$^3\overline{J} = {}^6\overline{L}\,{}^3\overline{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}^2\overline{J}_1 &= {}^4\overline{L}_{11}{}^2\overline{X}_1 + \ldots + {}^4\overline{L}_{1n}{}^2\overline{X}_n,\\ &\vdots\\ {}^2\overline{J}_n &= {}^4\overline{L}_{n1}{}^2\overline{X}_1 + \ldots + {}^4\overline{L}_{nn}{}^2\overline{X}_n, \end{aligned}$$

gdzie poszczególne składniki sum stron prawych można przedstawić według definicji 6.2, *jeśli*

$$
{}^{3}\overline{J} = [J_{j_1 j_3 j_5}] = \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{J}_1 \\ \vdots \\ {}^{2}\overline{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = j_3 = j_5 = 1, \ldots, n
$$

jest ciągiem trójwskaźnikowym przepływów, a

$$
{}^{3}\overline{X} = [X_{j_2 j_4 j_6}] = \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{X}_1 \\ \vdots \\ {}^{2}\overline{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = j_4 = j_6 = 1, \ldots, n
$$

jest ciągiem trójwskaźnikowych bodźców termodynamicznych, natomiast

$$
{}^{6}\overline{L} = [L_{j_1 \ldots j_6}] = \begin{bmatrix} {}^{4}\overline{L}_{11} & \ldots & {}^{4}\overline{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{4}\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^{4}\overline{L}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{L}_{11} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2}\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{nn} \end{bmatrix}_{11}, \ldots, \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{L}_{11} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2}\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{nn} \end{bmatrix}_{1n} \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{L}_{11} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2}\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{nn} \end{bmatrix}_{n1}, \ldots, \begin{bmatrix} {}^{2}\overline{L}_{11} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2}\overline{L}_{n1} & \ldots & {}^{2}\overline{L}_{nn} \end{bmatrix}_{nn} \end{bmatrix}
$$

stanowi ciąg sześciowskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych.

2.4. Równania fenomenologiczne *w*-liniowe. Przekształcenie liniowe ciągów w-wskaźnikowych nazywamy przekształceniem w-liniowym [1, 2].

DEFINICJA 6. w. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest* ***w-liniowy***, *gdy opisuje go przekształcenie w-liniowe*

$$
{}^{w}\overline{J} = {}^{2w}\overline{L}\,{}^{w}\overline{X},
$$

czyli

$$
\begin{aligned}
{}^{w-1}\overline{J}_1 &= {}^{2w-2}\overline{L}_{11}\,{}^{w-1}\overline{X}_1 + \ldots + {}^{2w-2}\overline{L}_{1n}\,{}^{w-1}\overline{X}_n, \\
&\vdots \\
{}^{w-1}\overline{J}_n &= {}^{2w-2}\overline{L}_{n1}\,{}^{w-1}\overline{X}_1 + \ldots + {}^{2w-2}\overline{L}_{nn}\,{}^{w-1}\overline{X}_n,
\end{aligned}
$$

gdzie poszczególne składniki sum stron prawych można rozwinąć według definicji 6 $w-1, \ldots,$ 6.3, 6.1, 6.0, *jeśli*

$$
{}^{w}\overline{J} = [J_{j_1 \ldots j_{2k+1}}] = \begin{bmatrix} {}^{w-1}\overline{J}_1 \\ \vdots \\ {}^{w-1}\overline{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = \ldots = j_{2k+1} = 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots, w-1
$$

jest ciągiem w-wskaźnikowym przepływów,

$$
{}^{w}\overline{X} = [X_{j_2 \ldots j_{2k}}] = \begin{bmatrix} {}^{w-1}\overline{X}_1 \\ \vdots \\ {}^{w-1}\overline{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = \ldots j_{2k} = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, w
$$

jest ciągiem w-wskaźnikowym bodźców termodynamicznych, natomiast

$$
{}^{2w}\bar{L} = [L_{j_1 \dots j_{2w}}] = \begin{bmatrix} {}^{2w-2}\bar{L}_{11} & \dots & {}^{2w-2}\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2w-2}\bar{L}_{n1} & \dots & {}^{2w-2}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{2w-4}\bar{L}_{11} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{11} & \dots & \begin{bmatrix} {}^{2w-4}\bar{L}_{11} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{bmatrix} {}^{2w-4}\bar{L}_{11} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{n1} & \dots & \begin{bmatrix} {}^{2w-4}\bar{L}_{11} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & {}^{2w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{nn} \end{bmatrix}
$$

stanowi ciąg 2*w-wskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych, przy czym poszczególne składniki sum stron prawych są odpowiednio zdefiniowanymi iloczynami «macierzowymi» ciągów (*2*w* − 2*)-wskaźnikowych i (w* − 1*)-wskaźnikowych.*

W ten sposób przez wprowadzenie ciągów wielowskaźnikowych zmiennych stanu uogólniliśmy równania fenomenologiczne liniowe termodynamicznych procesów nieodwracalnych na przypadek równań *w*-liniowych (wieloliniowych), gdzie *w* jest dowolną liczbą naturalną. Tym samym mamy możność rozważania wielkiego systemu[3)] procesów termodynamicznych nieodwracalnych. Wprowadzony tu fenomenologiczny system wielki jest wykorzystany do wyprowadzenia systemu wielkiego równań — równania wielociągowego termosprężystości [17].

Ze względu na wielokrotną złożoność (w sensie ciągów wielowskaźnikowych) takich systemów-procesów dążymy do podania poglądowych interpretacji rozważanych pojęć. Okazuje się, że przekształcenia *w*-liniowe traktowane jako równania zwane *w*-równaniami liniowymi lub równaniami *w*-liniowymi fenomenologicznymi można zilustrować za pomocą:

1) wielowskaźnikowego schematu blokowego nazywanego też wieloschematem blokowym lub wieloblokiem,

2) grafów wielowskaźnikowych z interpretacją (2a)-zmiennych wielowskaźnikowych (stanu zjawiska), albo (2b)-przekształceń wieloliniowych.

W związku z tym w punktach 3 i 4 omówimy:

1) wielowskaźnikowe schematy blokowe przekształceń wieloliniowych,

2) grafy wielowskaźnikowe przekształceń wieloliniowych.

3. Wielowskaźnikowe schematy blokowe równań fenomenologicznych *w*-liniowych

Przekształcenie *w*-liniowe stanowi [1, 2, 14] najprostszą transmitancję układu konkretnego przepływowego *w*-wskaźnikowego. Można w związku z tym przenieść formalizm takiego układu *w*-liniowego na systemy — procesy termodynamiczne nieodwracalne i sformułować kilka twierdzeń łatwych do udowodnienia.

---

3) W rozumieniu definicji 4.

Formalizm ten [14] przy wykorzystaniu pojęcia transmitancji wielowskaźnikowej ${}^{w}T$, w-grafu (grafu w-wskaźnikowego) oraz wieloboku jest nie tylko przejrzysty, ale umożliwia rozważanie wspomnianych procesów w kategoriach automatyki i programowania w-liniowego z poszukiwaniem rozwiązań optymalnych danych w-równań femonemologicznych przy istnieniu ograniczeń przedstawionych za pomocą źródeł entropii. Ku takim rozwiązaniom (minimum entropii) steruje — jak wiadomo — sama natura w procesach termodynamicznych nieodwracalnych, które można nazwać zjawiskami autoregulacyjnymi.

3.1. Schemat blokowy zerowskaźnikowy równania zeroliniowego. Przekształcenie zeroliniowe

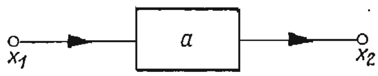
$$j = LX$$

jest najprostszą transmitancją zerowskaźnikową ${}^{0}T$, czyli

$$_{1}x = {}^{0}T_{2}x,$$

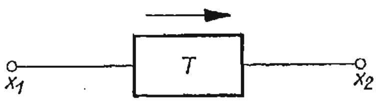
jeśli $_{1}x$ — sygnał wyjścia, a $_{2}x$ — sygnał wejścia układu termodynamicznego zerowskaźnikowego jako układu przepływowego.

Przedstawiamy go symbolicznie na rys. 1



Rys. 1

czyli wobec liniowości ${}^{0}T$ mamy schemat przyjęty na rys. 2.



Rys. 2

3.2. Schemat blokowy jednowskaźnikowy równania jednoliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny jednowskaźnikowy jest układem przepływowym jednowskaźnikowym.*

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego jednowskaźnikowego i układu przepływowego jednowskaźnikowego [14].

Układ przepływowy jednowskaźnikowy o transmitancji ${}^{1}T$, czyli

$$_{1}x = {}^{1}T_{2}\bar{x}, \quad _{1}\bar{x} = \bar{y}, \quad _{2}\bar{x} = \bar{x},$$

którego funkcja stanu wobec liniowości ${}^{1}T$ w przyjętych oznaczeniach dana jest przekształceniem

$$\bar{J} = {}^{2}\bar{L}\bar{X}$$

przedstawiono na rys. 3.

Widzimy, że każdy zerowskaźnikowy sygnał wyjścia y_{k_1}, $k_1 = 1, \ldots, n_1$ jest kombinacją liniową zerowskaźnikowych sygnałów wejścia x_{k_2}, $k_2 = 1, \ldots, n_2$. Tym samym układ jednowskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg jednowskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych.

3.3. Schemat blokowy dwuwskaźnikowy równania dwuliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny dwuwskaźnikowy jest układem przepływowym dwuwskaźnikowym.*

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego dwuwskaźnikowego i układu przepływowego dwuwskaźnikowego [14].

Układ przepływowy dwuwskaźnikowy o transmitacnji ${}^2T$, czyli

$$ {}^2_1\bar{x} = {}^2T\,{}^2_2\bar{x}, \quad {}^2_1\bar{x} = {}^2\bar{y}, \quad {}^2_2\bar{x} = {}^2\bar{x}, $$

którego funkcja stanu wobec liniowości ${}^2T$ w przyjętych oznaczeniach dana jest przekształceniem

$$ {}^2\bar{J} = {}^4\bar{L}\,{}^2\bar{X} $$

przedstawiono na rys. 4.

Każdy jednowskaźnikowy sygnał wyjścia $\bar{y}_{k_1}, k_1 = 1, \ldots, n_1,$ jest kombinacją liniową jednowskaźnikowych sygnałów wejścia $\bar{x}_{k_2}$, $k_2 = 1, \ldots, n_2$. Tym samym układ dwuwskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg jednowskaźnikowy kombinacji liniowych ciągów jednowskaźnikowych (rys. 4) lub ciąg dwuwskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych, co pokazano na rys. 5.

Widzimy, że każdy z podschematów blokowych, czyli podsystemu $\bar{y}_{k_1} = {}^2\bar{a}_{k_1k_2}\bar{x}_{k_2}$, $a = L$, jest systemem podobnym do podanego na rys. 3.

3.4. Schemat blokowy trójwskaźnikowy równania trójliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny trójwskaźnikowy jest układem przepływowym trójwskaźnikowym.*

Układ przepływowy trójwskaźnikowy o transmitancji ${}^3T$, czyli

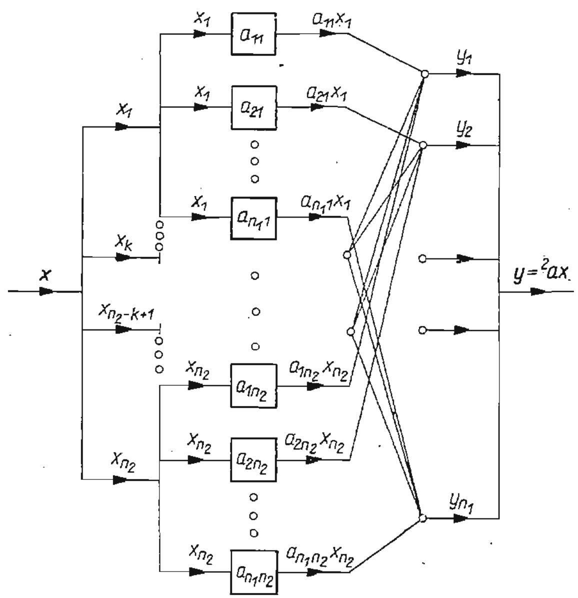
$$ {}^3_1\bar{x} = {}^3T\,{}^3_2\bar{x}, \quad {}^3_1\bar{x} = {}^3\bar{y}, \quad {}^3_2\bar{x} = {}^3\bar{x}, $$

którego funkcja stanu wobec liniowości ${}^3T$ w przyjętych oznaczeniach jest dana przekształceniem

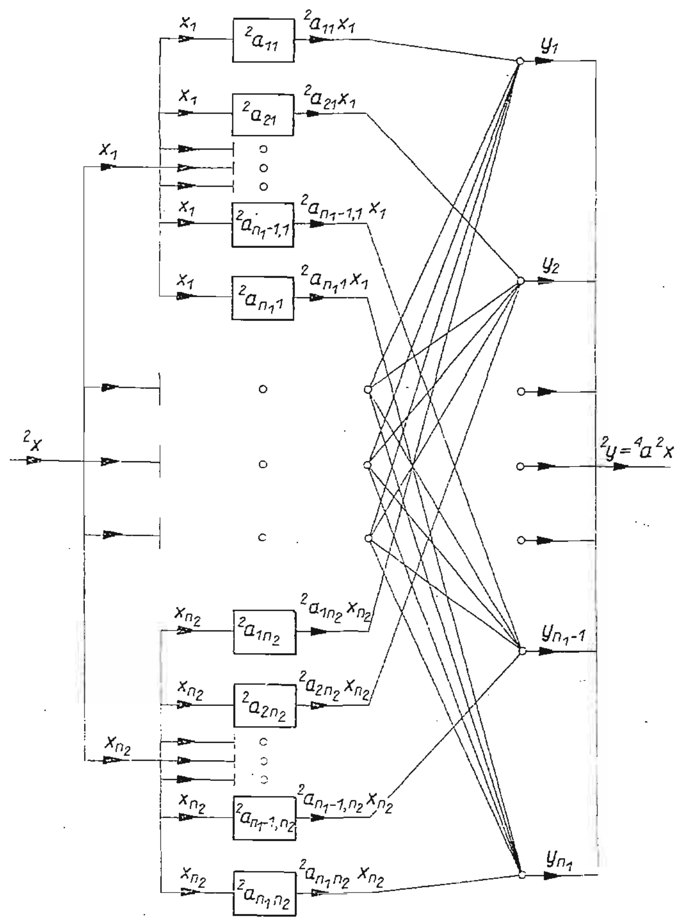
$$ {}^3\bar{J} = {}^6\bar{L}\,{}^3\bar{X} $$

przedstawiono na rys. 6.

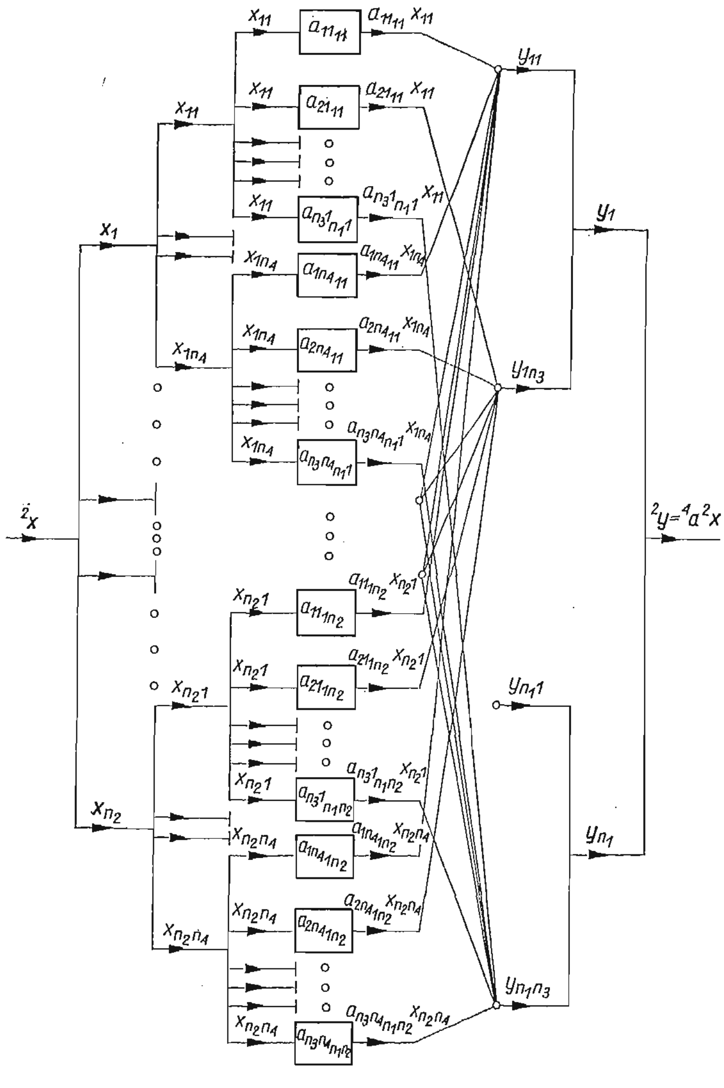
Każdy dwuwskaźnikowy sygnał wyjścia ${}^2\bar{y}_{k_1}$, $k_1 = 1, \ldots, n_1$, jest kombinacją liniową jednowskaźnikowych sygnałów wejścia ${}^2\bar{x}_{k_2}$, $k_2 = 1, \ldots, n_2$. W ten sposób każdy z podschematów blokowych, czyli podsystem $\bar{y}_{k_1} = {}^2a_{k_1k_2}\bar{x}_{k_2}$, $a = L$, jest systemem podobnym do pokazanego na rys. 5, a każdy podsystem tego systemu (podpodsystem) jest systemem podobnym do pokazanego na rys. 5. Tym samym układ trójwskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg dwuwskaźnikowy kombinacji liniowych ciągów jednowskaźnikowych lub ciąg trójwskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych. Można


x
x1
xk
xn2-k+1
xn2
a11
a21
an11
a1n2
a2n2
an1n2
a11x1
a21x1
an11x1
a1n2xn2
a2n2xn2
an1n2xn2
y1
y2
yn1
y=2ax

Rys. 3


2x
x1
xn2
2a11
2a21
2an1-1,1
2an11
2a1n2
2a2n2
2an1-1,n2
2an1n2
2a11x1
2a21x1
2an1-1,1 x1
2an11x1
2a1n2 xn2
2a2n2 xn2
2an1-1,n2 xn2
2an1n2 xn2
y1
y2
yn1-1
yn1
2y=4a2x

Rys. 4



Rys. 5

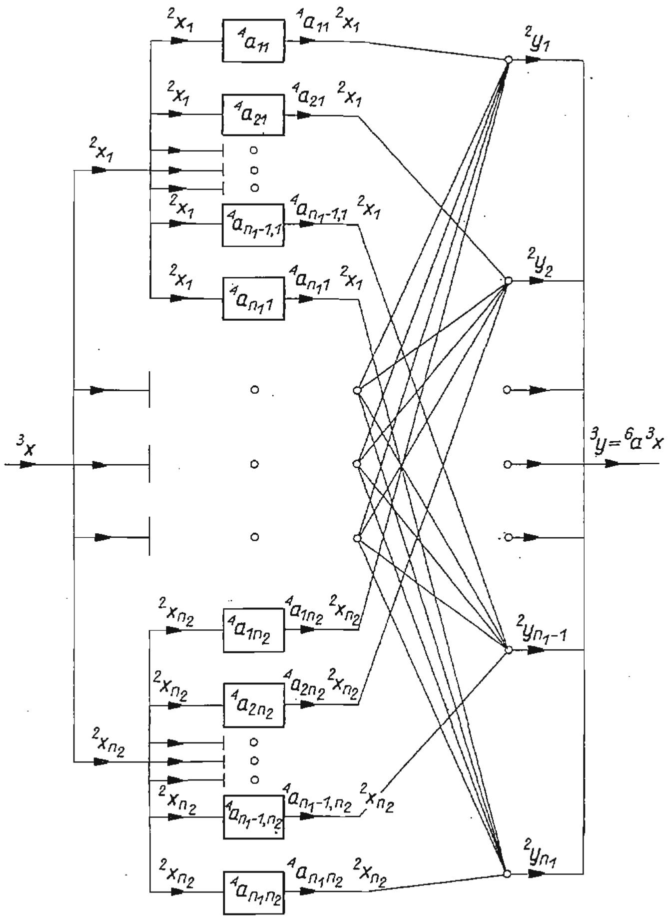
więc każdy system trójwskaźnikowy przedstawić za pomocą podsystemów zerowskaźnikowych.

Każdy podsystem jednowskaźnikowy takiego systemu jest systemem złożonym z podsystemów zerowskaźnikowych, podobnym do systemu jednowskaźnikowego przedstawionego na rys. 3.

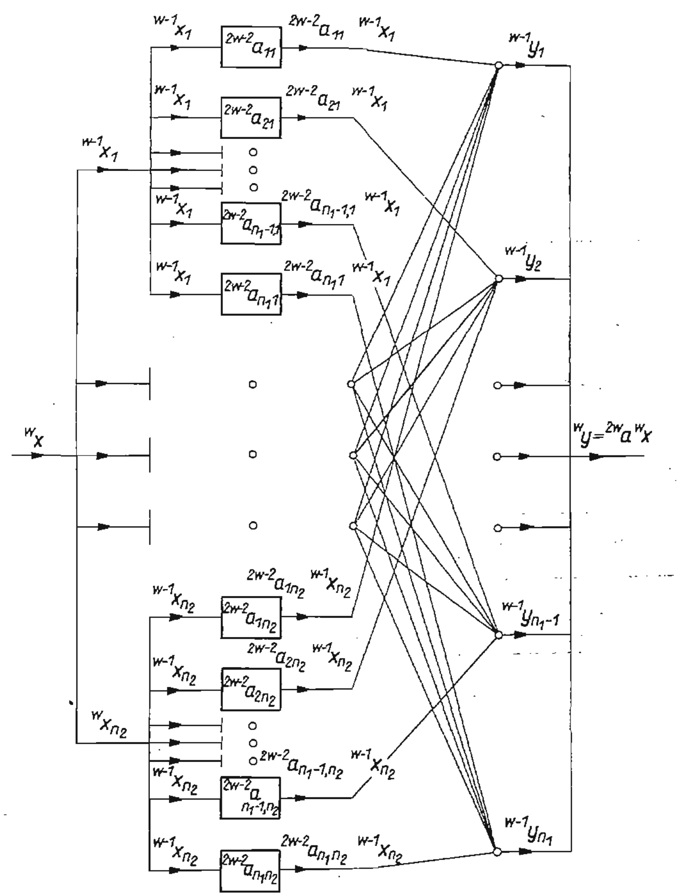
3.5. Schemat blokowy *w*-wskaźnikowy równania *w*-liniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny w-wskaźnikowy jest układem przepływowym w-wskaźnikowym.*

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego *w*-wskaźnikowego i układu przepływowego *w*-wskaźnikowego [14].


${}^{3}x$
${}^{2}x_1$
${}^{2}x_{n_2}$
${}^{4}a_{11}$
${}^{4}a_{21}$
${}^{4}a_{n_1-1,1}$
${}^{4}a_{n_1 1}$
${}^{4}a_{1n_2}$
${}^{4}a_{2n_2}$
${}^{4}a_{n_1-1,n_2}$
${}^{4}a_{n_1 n_2}$
${}^{2}y_1$
${}^{2}y_2$
${}^{2}y_{n_1-1}$
${}^{2}y_{n_1}$
${}^{3}y={}^{6}a\,{}^{3}x$

Rys. 7


${}^{w}x$
${}^{w-1}x_1$
${}^{w}x_{n_2}$
${}^{w-1}x_{n_2}$
${}^{2w-2}a_{11}$
${}^{2w-2}a_{21}$
${}^{2w-2}a_{n_1-1,1}$
${}^{2w-2}a_{n_1 1}$
${}^{2w-2}a_{1n_2}$
${}^{2w-2}a_{2n_2}$
${}^{2w-2}a_{n_1-1,n_2}$
${}^{2w-2}a_{n_1 n_2}$
${}^{w-1}y_1$
${}^{w-1}y_2$
${}^{w-1}y_{n_1-1}$
${}^{w-1}y_{n_1}$
${}^{w}y={}^{2w}a\,{}^{w}x$

Rys. 6

Układ przepływowy w-wskaźnikowy o transmitancji ${}^{w}T$, czyli

$$ {}_{1}^{w}\overline{x} = {}^{w}T\, {}_{2}^{w}\overline{x}, \quad {}_{1}^{w}\overline{x} = {}^{w}\overline{y}, \quad {}_{2}^{w}\overline{x} = {}^{w}\overline{x}, $$

którego funkcja stanu wobec liniowości ${}^{w}T$ w przyjętych oznaczeniach jest dana przekształceniem

$$ {}^{w}\overline{J} = {}^{2w}\overline{J}\, {}^{w}\overline{X} $$

przedstawiono na rys. 7.

Każdy z podschematów blokowych, czyli podsystem

$$ {}^{w-1}\overline{y}_{k_1} = {}^{2w-2}\overline{a}_{k_1 k_2}\, {}^{w-1}\overline{x}_{k_2}, \quad a = L, \quad k_1 = 1, \ldots, n_{w-1}, \quad k_2 = 1, \ldots, n_w, $$

jest systemem $(w-1)$-wskaźnikowym, który można sprowadzić do systemów $(w-2)$-wskaźnikowych, ..., 3, 2, 1, 0-wskaźnikowych.

4. Grafy ciągów wielowskaźnikowych

4.1. Grafem ciągu zerowskaźnikowego

$$ {}^{0}\overline{x} = x $$

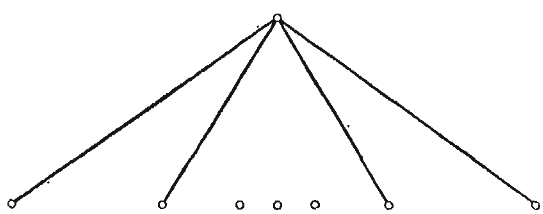
jako elementu pewnego ciała jest odcinek pokazany na rys. 8.

Rys. 8

4.2. Grafem ciągu jednowskaźnikowego

$$ {}^{1}\overline{x} = \overline{x} = [x_j], \quad j = 1, \ldots, n, \quad x_j \text{ — elementy ciała liczbowego,} $$

jest wychodzący z jednego punktu n-elementowy ciąg odcinków, czyli grafów zerowskaźnikowych, pokazany na rys. 9. Nazywamy go grafem jednopoziomowym.



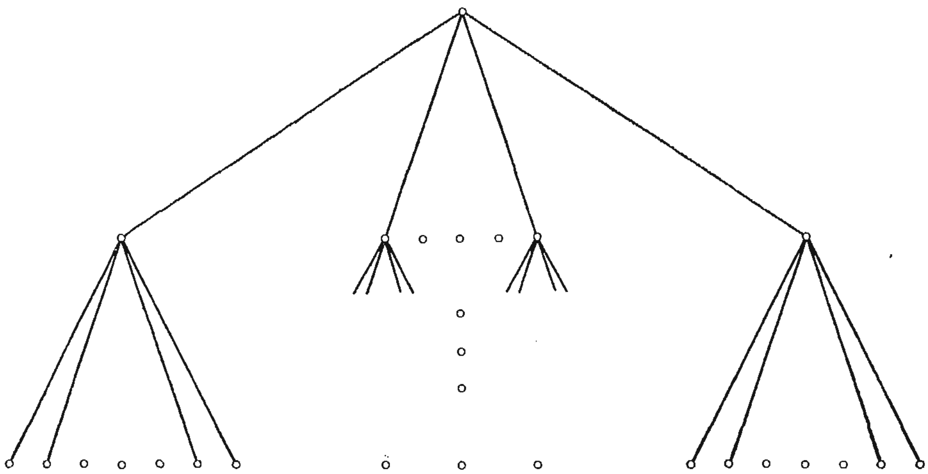
Rys. 9

4.3. Grafem ciągu dwuwskaźnikowego

$$^{2}\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 j_2}], \quad j_1 = 1, \ldots, n_1; \quad j_2 = 1, \ldots, n_2,$$

$x_{\bar{j}}$ — elementy ciała liczbowego,

jest graf jednowskaźnikowy, z którego n_1 końców poprowadzono po n_2 grafów jednowskaźnikowych. Pokazano go na rys. 10. Jest on inaczej nazywany grafem dwupoziomowym albo grafem grafu.



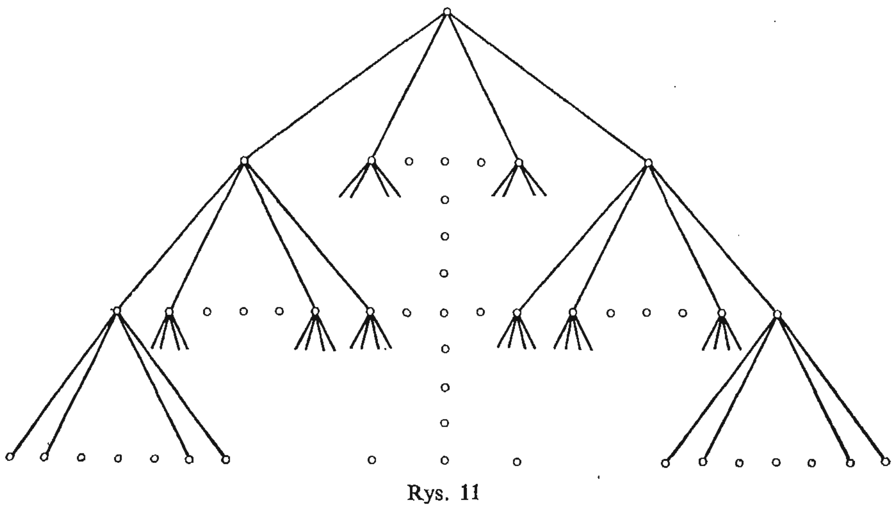
Rys. 10

4.4. Grafem ciągu trójwskaźnikowego

$$^{3}\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 j_2 j_3}], \quad j_k = 1, \ldots, n_k; \quad k = 1, 2, 3,$$

$x_{\bar{j}}$ — elementy ciała liczbowego,

jest graf dwuwskaźnikowy, z którego $n_1 n_2$ końców poprowadzono po n_3 grafów jednowskaźnikowych. Pokazano go na rys. 11. Jest on inaczej nazywany grafem trójpoziomowym, albo grafem grafu dwuwskaźnikowego.

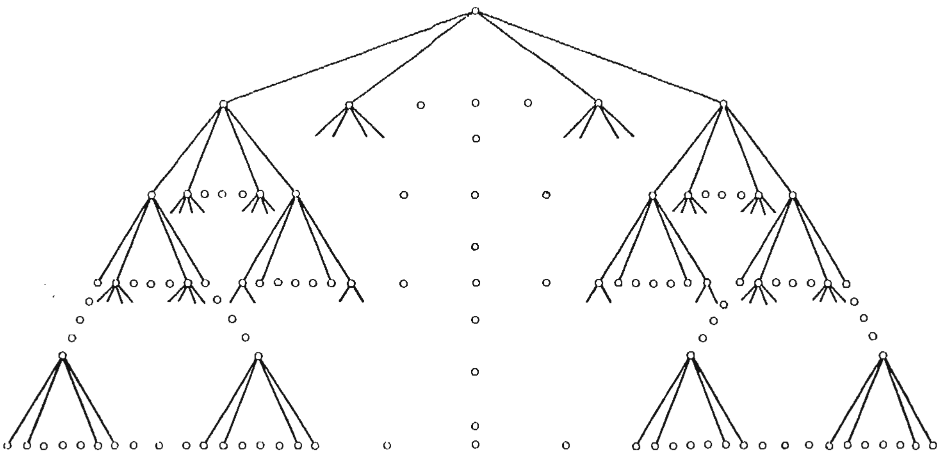


Rys. 11

4.5. Grafem ciągu w-wskaźnikowego

$$
{}^{w}\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w,
$$
$$
x_{\bar{j}} \text{ — elementy ciała liczbowego,}
$$

jest graf $(w-1)$-wskaźnikowy, z którego $n_1 n_2 \dots n_{w-1}$ końców poprowadzono po n_w grafów jednowskaźnikowych. Pokazano go symbolicznie na rys. 12. Nazywamy go grafem w-poziomowym albo grafem grafu $(w-1)$-wskaźnikowego, bądź też grafem dwuwskaźnikowym grafu $(w-2)$-wskaźnikowego lub ... $(w-1)$-wskaźnikowym grafem grafu jednowskaźnikowego.



Rys. 12

Podane w rozważaniach niniejszych przekształcenia wielociągowe mogą być także zilustrowane za pomocą pewnych par grafów [14]. Poniechamy tu tej ilustracji ze względu na przytoczone wielowskaźnikowe schematy blokowe.

5. Zagadnienie optymalizacji układu wieloliniowego

Przedstawiony wyżej opis zjawiska za pomocą operatora wieloliniowego, zwanego równaniem fenomenologicznym w-wskaźnikowym, umożliwia sformułowanie zagadnienia jego optymalizacji.

5.1. Optymalizacja układu zerowskaźnikowego. Wprowadzamy formę liniową (zeroliniową)

$$
{}^{0}\pi = \pi(c, X) = cX
$$

zwaną funkcją celu zerowskaźnikowego, gdzie $x \geqslant 0$, oraz żądamy spełnienia tego warunku przez operator

$$
J = LX.
$$

5.2. Optymalizacja układu jednowskaźnikowego. Wprowadźmy formę liniową

$$^{1}\pi = {}^{1}\pi(\bar{c}, \bar{X}) = \underbrace{\bar{c}\bar{X}}_{1} = c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n,$$

zwaną funkcją celu jednowskaźnikowego, gdzie

$$\bar{X} = \bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze liniowym

$$\bar{J} = {}^{2}\bar{L}\bar{X}.$$

Jest to powszechnie znany problem programowania liniowego, czyli programowania przy zastosowaniu ciągów jednowskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.3. Optymalizacja układu dwuwskaźnikowego. Wprowadzamy formę dwuliniową

$$^{2}\pi = {}^{2}\pi({}^{2}\bar{c}, {}^{2}\bar{X}) = \underbrace{{}^{2}\bar{c}\,{}^{2}\bar{X}}_{2} = \underbrace{\bar{c}_1\bar{X}_1}_{1} + \ldots \underbrace{\bar{c}_n\bar{X}_n}_{1} = c_{11}X_{11} + \ldots + c_{nn}X_{nn},$$

zwaną funkcją celu dwuwskaźnikowego, gdzie

$$^{2}\bar{X} \geqslant {}^{2}\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze dwuliniowym

$$^{2}\bar{J} = {}^{4}\bar{L}\,{}^{2}\bar{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania dwuliniowego, czyli z użyciem ciągów dwuwskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.4. Optymalizacja układu trójwskaźnikowego. Wprowadzamy formę trójliniową

$$^{3}\pi = {}^{3}\pi({}^{3}\bar{c}, {}^{3}\bar{X}) = \underbrace{{}^{3}\bar{c}\,{}^{3}\bar{X}}_{1} = \underbrace{{}^{2}\bar{c}_1\,{}^{2}\bar{X}_1}_{2} + \ldots + \underbrace{{}^{2}\bar{c}_n\,{}^{2}\bar{X}_n}_{2} = c_{111}X_{111} + \ldots + c_{nnn}X_{nnn},$$

zwaną funkcją celu trójwskaźnikowego, gdzie

$$^{3}\bar{X} = {}^{3}\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze trójliniowym

$$^{3}\bar{J} \geqslant {}^{6}\bar{L}\,{}^{3}\bar{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania trójliniowego, czyli z użyciem ciągów trójwskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.5. Optymalizacja układu w-wskaźnikowego Wprowadzamy formę w-liniową

$$^{w}\pi = {}^{w}\pi({}^{w}\bar{c}, {}^{w}\bar{X}) = \underbrace{{}^{w}\bar{c}\,{}^{w}\bar{X}}_{w} = \underbrace{{}^{w-1}\bar{c}_1\,{}^{w-1}\bar{X}_1}_{w-1} + \ldots + \underbrace{{}^{w-1}\bar{c}_n\,{}^{w-1}\bar{X}_n}_{w-1} =$$

$$= \ldots = c_{1\ldots1}X_{1\ldots1} + \ldots + c_{n\ldots n}X_{n\ldots n}$$

zwaną funkcją celu w-wskaźnikowego, gdzie

$$^{w}\bar{X} \geqslant {}^{w}\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze w-liniowym

$$^{w}\overline{J} = {}^{2w}\overline{L}\,{}^{w}\overline{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania w-liniowego, czyli programowania z użyciem ciągów w-wskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi (ciągi wielowskaźnikowe)*, praca doktorska, nie publikowana.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1970.
3. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe prawo Hooke'a wielkich systemów stereomechanicznych*, Arch. Bud. Maszyn (w druku).
4. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych jako systemów wielkich*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
5. R. KRZYWIEC, *O uogólnieniu wielowskaźnikowym prawa dynamiki układów mechanicznych wielokrotnych systemów wielkich*, Z. Nauk. Pol. Częst., 1971.
6. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Ohma układów elektrycznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Z. Nauk. Pol. Częst. (w druku).
7. R. KRZYWIEC, *Formułowanie zagadnień układu elektrycznego o jednym stopniu swobody w klasie równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Arch. Elek., PWN, Warszawa 1968.
8. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuwskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teor. Stos., PWN, Warszawa 1970.
9. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
10. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
11. R. KRZYWIEC, *Analogia elektromechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Z. Nauk. Pol. Częst., 1971.
12. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teor. Stos., PWN, Warszawa 1971.
13. K. GUMIŃSKI, *Termodynamika procesów nieodwracalnych*, PWN, Warszawa 1962.
14. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Maszyn, PWN, Warszawa 1971.
15. A. MOSTOWSKI, M. STARK, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1953.
16. Z. OPIAL, *Algebra wyższa*, Wydanie II, PWN, Warszawa 1964.
17. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

Р е з ю м е

БОЛЬШИЕ СИСТЕМЫ НЕОБРАТИМЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В работе рассматривается большая система необратимых термодинамических процессов. Система описывается с помощью линейных преобразований линейных пространств, элементами которых являются последовательности со многими индексами. Приводится интерпретация этих рассуждений с помощью блок-схемы и большой системы графов.

Такое обобщение термодинамической системы используется автором в другой работе содержащей постановку вопроса большой термоупругой системы.

S u m m a r y

GREAT SYSTEMS OF IRREVERSIBLE PROCESSES OF THERMODYNAMICS

The great system of irreversible thermodynamical processes is investigated by means of linear transformation of linear spaces the elements of which are multi-indicial sequences. The considerations are interpreted by a block diagram and a great system of graphs.

Such a generalization of thermodynamical systems is applied by the author in another paper aimed at the formulation of a great thermoelastic system.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1973 r.