MECHANIKA
TEORETYCZNA
STOSOWANA
2, 12 (1974)

ANALOGIA TARCZOWO-PŁYTOWA W TEORII DŹWIGARÓW SIATKOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

Wstęp

W pracy [6] sformułowano analogię statyczno-geometryczną w teorii powłok siatkowych, opisanych za pomocą równań dyskretnego ośrodka Cosseratów. Istnienie analogii statyczno-geometrycznej w liniowej teorii dyskretnych ośrodków Cossertów wykazano również w pracy [2].

Tę samą analogię dla powłok siatkowych, opisanych za pomocą równań różniczkowych w przypadku, w którym modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cossertów, sformułowano w pracy [4].

W cytowanych pracach nie analizowano jednak równań opisujących stan tarczowy i płytowy; w pracy [2] ograniczono się jedynie do podania równań przemieszczeniowych dla wymienionych przypadków. Analizę taką przeprowadzono w niniejszej pracy. Pozwoliła ona sformułować inną analogię o pewnym znaczeniu praktycznym. Jest nią analogia tarczowo-płytowa. Zachodzi tu formalne podobieństwo do znanej analogii w klasycznej teorii tarcz i płyt, obciążonych tylko wzdłuż brzegów, a polegającej na podobieństwie równania naprężeniowego tarczy

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0$$

i równania przemieszczeniowego płyty

$$\nabla^2\nabla^2 w = 0.$$

Ta klasyczna analogia, jak wiadomo, znalazła zastosowanie w eksperymentalnych badaniach stanu naprężenia tarcz.

Przedstawioną w tej pracy analogię prawdopodobnie będzie można w podobny sposób wykorzystać w zagadnieniach dźwigarów siatkowych. W punktach 1–3 omówiono tę analogię oraz równania regularnych tarcz i płyt siatkowych, utworzonych z dwóch rodzin prętów sztywno ze sobą połączonych w węzłach i opisanych za pomocą równań dyskretnej teorii sprężystości [1]. Oprócz tego założono, że wszystkie oczka siatki mają jednakowe kształty i wymiary. W punkcie 4 omówiona jest analogia tarczowo-płytowa w kontynualnej teorii dźwigarów siatkowych. Modelem obliczeniowym jest w tym przypadku dwuwymiarowy ośrodek włóknisty Cosseratów [3].

W pracy stosowana jest konwencja sumacyjna. Wskaźniki $k, l, m, n, \ldots$ oraz $K, L, M, N, \ldots$ przebiegają ciąg $1, 2$, wskaźniki Λ, $\Phi, \ldots$ przebiegają ciąg I, II. Symbole $\Delta_\Lambda\varphi(d)$ oraz $\bar{\Delta}_\Lambda\varphi(d)$ oznaczają prawe i lewe różnice funkcji $\varphi(d)$ [1]. Pochodną kowariantną oznaczono kreską pionową. Symbole a_{KL} i e_{KL} oznaczają składowe tensora metrycznego i dwuwektora Ricciego. Natomiast ε_{kl}, $\varepsilon_{\Lambda\Phi}$ i δ_{kl} oznaczają symbole Ricciego oraz symbol Kroneckera. Ujęcie wskaźników w nawias prostokątny oznacza ich alternację, a ujęcie wskaźnika w dwie pionowe kreski oznacza, że wskaźnik ten w operacji alternacji udziału nie bierze.

1. Równania przemieszczeniowe tarcz i płyt siatkowych opisanych za pomocą równań dyskretnej teorii sprężystości

Dla stanu tarczowego jednorodne równania równowagi, związki geometryczne oraz równania konstytutywne wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda &= 0,\\ \bar{\Delta}_\Lambda M^\Lambda + \varepsilon_k{}^l l_\Lambda^k T_l^\Lambda &= 0,\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda^k &= \Delta_\Lambda u^k + \varepsilon_k{}^l l_\Lambda^l v,\\ \varkappa_\Lambda &= \Delta_\Lambda v,\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}T_k^\Lambda &= A_{kl}^{\Lambda\Phi}\eta_\Phi^l + B_k^{\Lambda\Phi}\varkappa_\Phi,\\ M^\Lambda &= F^{\Lambda\Phi}\varkappa_\Phi + B_l^{\Phi\Lambda}\eta_\Phi^l,\end{aligned} \tag{1.3}$$

dla zagadnienia zaś płytowego mają postać następującą [5]:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_\Lambda T^\Lambda &= 0,\\ \bar{\Delta}_\Lambda M_k^\Lambda + \varepsilon_{kl} l_\Lambda^l T^\Lambda &= 0,\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda &= \Delta_\Lambda u + \varepsilon_{kl} l_\Lambda^k v^l,\\ \varkappa_\Lambda^k &= \Delta_\Lambda v^k,\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}T^\Lambda &= A^{\Lambda\Phi}\eta_\Phi + B^{\Lambda\Phi}{}_l\varkappa_\Phi^l,\\ M_k^\Lambda &= F_{kl}^{\Lambda\Phi}\varkappa_\Phi^l + B^{\Phi\Lambda}{}_k\eta_\Phi,\end{aligned} \tag{1.6}$$

gdzie T_k^Λ i M^Λ, η_Λ^k i $\varkappa_\Lambda$, u^k i v są kolejno składowymi tarczowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, a T^Λ i M_k^Λ, η_Λ i $\varkappa_\Lambda^k$, u i v^k są składowymi płytowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, l_Λ^k są składowymi wektora łączącego środek węzła d ze środkiem węzła $f_\Lambda d$, natomiast wielkości $A^{\Lambda\Phi}$, $A_{kl}^{\Lambda\Phi}$, $B^{\Lambda\Phi}{}_k$, $B_k^{\Lambda\Phi}$, $F_{kl}^{\Lambda\Phi}$, $F^{\Lambda\Phi}$ charakteryzują własności sprężyste rozważanych ustrojów. Wzory dla wielkości $A^{\Lambda\Phi}$, $A_{kl}^{\Lambda\Phi}$, $B^{\Lambda\Phi}{}_k$, $B_k^{\Lambda\Phi}$, $F_{kl}^{\Lambda\Phi}$, $F^{\Lambda\Phi}$ podano w [5]. Podstawiając (1.2) do (1.3) oraz wykorzystując równania (1.1), otrzymamy

$$\begin{aligned}&\bar{\Delta}_\Lambda[A_{kl}^{\Lambda\Phi}(\Delta_\Phi u^l + \varepsilon_m^l l_\Phi^m v) + B_k^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi v] = 0,\\ &\bar{\Delta}_\Lambda[F^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi v + B_l^{\Phi\Lambda}(\Delta_\Phi u^l + \varepsilon_m^l l_\Phi^m v)] + \varepsilon_k{}^l l_\Lambda^k[A_{lm}^{\Lambda\Phi}(\Delta_\Phi u^m + \varepsilon^m{}_n l_\Phi^n v) + B_l^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi v] = 0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Równania (1.7) stanowią przemieszczeniowy układ równań rozpatrywanych tarcz siatkowych.

Podobnie uzyskamy równania przemieszczeniowe dla stanu płytowego, mianowicie

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}_A[A^{A\Phi}(\Delta_\Phi u+\varepsilon_{kl}l^k_\Phi v^l)+B^{A\Phi}{}_l\Delta_\Phi v^l = 0,\\
(1.8)\qquad &\bar{\Delta}_A[F^{A\Phi}_{kl}\Delta_\Phi v^l+B^{\Phi A}{}_k(\Delta_\Phi u+\varepsilon_{lm}l^l_\Phi v^m)]+\\
&\qquad +\varepsilon_{kl}l^l_A[A^{A\Phi}(\Delta_\Phi u+\varepsilon_{mn}l^m_\Phi v^n)+B^{A\Phi}{}_m\Delta_\Phi v^m] = 0.
\end{aligned}
$$

2. Równania naprężeniowe tarcz i płyt siatkowych

Wprowadźmy nowe składowe stanu naprężenia za pomocą związków

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{T}^k_A &= \varepsilon_{\Phi A}\delta^{kl}T^\Phi_l,\\
\tilde{M}_A &= \varepsilon_{\Phi A}M^\Phi,\\
\tilde{M}^k_A &= \varepsilon_{\Phi A}\delta^{kl}M^\Phi_l,\\
\tilde{T}_A &= \varepsilon_{\Phi A}T^\Phi.
\end{aligned}
$$

Można teraz równania (1.1) i (1.4) przedstawić w następującej postaci:

$$
(2.2)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}_{[A}\tilde{T}^k_{\Phi]} = 0,\\
&\bar{\Delta}_{[A}\tilde{M}_{\Phi]}+\varepsilon_{kl}l^k_{[A}\tilde{T}^l_{\Phi]} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}_{[A}\tilde{T}_{\Phi]} = 0,\\
&\bar{\Delta}_{[A}\tilde{M}^k_{\Phi]}+\varepsilon^k{}_l l^l_{[A}\tilde{T}_{\Phi]} = 0.
\end{aligned}
$$

Jeżeli z kolei wielkości $\tilde{T}^k_A$, $\tilde{T}_A$, $\tilde{M}^k_A$ $\tilde{M}_A$ wyrazimy przez dowolne funkcje φ^k, φ, ψ^k, ψ w następujący sposób:

$$
(2.4)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{T}^k_A &= \bar{\Delta}_A\varphi^k,\\
\tilde{M}_A &= \bar{\Delta}_A\psi+\varepsilon_{kl}l^k_A\varphi^l,
\end{aligned}
$$

$$
(2.5)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{M}^k_A &= \bar{\Delta}_A\psi^k+\varepsilon^k{}_l l^l_A\varphi,\\
\tilde{T}_A &= \bar{\Delta}_A\varphi,
\end{aligned}
$$

to łatwo sprawdzić, że równania (2.2) i (2.3) będą spełnione tożsamościowo. Zatem funkcje φ^k i ψ są funkcjami naprężeń dla zagadnienia tarczowego, funkcje zaś ψ^k i φ dla zagadnienia płytowego. Korzystając z (2.4), (2.5) oraz (2.1) otrzymamy związki pomiędzy T^A_k, M^A, M^A_k, T^A a funkcjami φ^k, ψ, ψ^k, φ:

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
T^A_k &= \varepsilon^{A\Phi}\delta_{kl}\bar{\Delta}_\Phi\varphi^l,\\
M^A &= \varepsilon^{A\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi+\varepsilon_{kl}l^k_\Phi\varphi^l),
\end{aligned}
$$

$$
(2.7)\qquad
\begin{aligned}
M^A_k &= \varepsilon^{A\Phi}\delta_{kl}(\bar{\Delta}_\Phi\psi^l+\varepsilon^l{}_m l^m_\Phi\varphi),\\
T^A &= \varepsilon^{A\Phi}\bar{\Delta}_\Phi\varphi.
\end{aligned}
$$

Składowe stanu odkształcenia nie są od siebie niezależne, lecz muszą spełniać warunki nierozdzielności.

Dla zagadnienia tarczowego warunki te mają postać następującą:

$$
(2.8)\qquad
\begin{aligned}
&\Delta_{[A}\eta^k_{\Phi]}+\varepsilon^k{}_l l^l_{[A}\varkappa_{\Phi]} = 0,\\
&\Delta_{[A}\varkappa_{\Phi]} = 0,
\end{aligned}
$$

dla zagadnienia zaś płytowego mają postać

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{[\Lambda}\eta_{\Phi]}+\varepsilon_{kl}l^k_{[\Lambda}\varkappa^l_{\Phi]} = 0,\\
&\Delta_{[\Lambda}\varkappa^k_{\Phi]} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Warunki (2.8) i (2.9) można wyprowadzić ze wzorów podanych w pracy [2].

Wprowadzając nowe składowe stanu odkształcenia $\tilde{\eta}^\Lambda_k$, $\tilde{\eta}^\Lambda$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda_k$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda$ za pomocą wzorów

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}^\Lambda_k &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\delta_{kl}\eta^l_\Phi, & \tilde{\varkappa}^\Lambda &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\varkappa_\Phi,\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda_k &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\delta_{kl}\varkappa^l_\Phi, & \tilde{\eta}^\Lambda &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\eta_\Phi,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

warunki (2.8) i (2.9) przedstawimy w następującej postaci:

$$
\Delta_\Lambda\tilde{\eta}^\Lambda_k+\varepsilon_{kl}l^l_\Lambda\tilde{\varkappa}^\Lambda = 0, \qquad \Delta_\Lambda\tilde{\varkappa}^\Lambda = 0,
\tag{2.11}
$$

$$
\Delta_\Lambda\tilde{\eta}^\Lambda+\varepsilon_k{}^l l^k_\Lambda\tilde{\varkappa}^\Lambda_l = 0, \qquad \Delta_\Lambda\tilde{\varkappa}^\Lambda_k = 0.
\tag{2.12}
$$

Związki geometryczne dla składowych $\tilde{\eta}^\Lambda_k$, $\tilde{\eta}^\Lambda$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda_k$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda$ uzyskamy podstawiając do (2.10) prawe strony (1.2) i (1.5),

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}^\Lambda_k &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\delta_{kl}(\Delta_\Phi u^l+\varepsilon^l{}_m l^m_\Phi v),\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi v,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}^\Lambda &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}(\Delta_\Phi u+\varepsilon_{kl}l^k_\Phi v^l),\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda_k &= \varepsilon^{\Lambda\Phi}\delta_{kl}\Delta_\Phi v^l.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Związki odwrotne do (1.3) i (1.6) mają postać

$$
\begin{aligned}
\eta^k_\Lambda &= a^{kl}_{\Lambda\Phi}T^\Phi_l+b^k_{\Phi\Lambda}M^\Phi,\\
\varkappa_\Lambda &= f_{\Lambda\Phi}M^\Phi+b^l_{\Lambda\Phi}T^\Phi_l,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_\Lambda &= a_{\Lambda\Phi}T^\Phi+b_{\Phi\Lambda}{}^l M^\Phi_l,\\
\varkappa^k_\Lambda &= f^{kl}_{\Lambda\Phi}M^\Phi_l+b_{\Lambda\Phi}{}^k T^\Phi.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Wielkości $a^{kl}_{\Lambda\Phi}$, $a_{\Lambda\Phi}$, $b^k_{\Lambda\Phi}$, $b_{\Lambda\Phi}{}^k$, $f^{kl}_{\Lambda\Phi}$, $f_{\Lambda\Phi}$ można jednoznacznie określić korzystając ze wzorów podanych w [5].

Korzystając z (2.15), (2.16), (2.10) i (2.1) otrzymamy związki pomiędzy składowymi $\tilde{\eta}^\Lambda_k$, $\tilde{\eta}^\Lambda$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda_k$, $\tilde{\varkappa}^\Lambda$ i $\tilde{T}^k_\Lambda$, $\tilde{T}_\Lambda$, $\tilde{M}^k_\Lambda$, $\tilde{M}_\Lambda$, mianowicie

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}^\Lambda_k &= \tilde{a}^{\Lambda\Phi}_{kl}\tilde{T}^l_\Phi+b^{\Lambda\Phi}_k\tilde{M}_\Phi,\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda &= \tilde{f}^{\Lambda\Phi}\tilde{M}_\Phi+\tilde{b}^{\Phi\Lambda}_l\tilde{T}^l_\Phi,
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta}^\Lambda &= \tilde{a}^{\Lambda\Phi}\tilde{T}_\Phi+\tilde{b}^{\Lambda\Phi}{}_l\tilde{M}^l_\Phi,\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda_k &= \tilde{f}^{\Lambda\Phi}_{kl}\tilde{M}^l_\Phi+\tilde{b}^{\Phi\Lambda}{}_k\tilde{T}_\Phi,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}^{\Lambda\Phi}_{kl} &= \delta_{km}\delta_{ln}\varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}a^{mn}_{\Omega\Gamma},\\
\tilde{f}^{\Lambda\Phi}_{kl} &= \delta_{km}\delta_{ln}\varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}f^{mn}_{\Omega\Gamma},\\
\tilde{b}^{\Lambda\Phi}_k &= \delta_{kl}\varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}b^l_{\Omega\Gamma},\\
\tilde{b}^{\Lambda\Phi}{}_l &= \delta_{lm}\varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}b_{\Omega\Gamma}{}^m,\\
\tilde{a}^{\Lambda\Phi} &= \varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}a_{\Omega\Gamma},\\
\tilde{f}^{\Lambda\Phi} &= \varepsilon^{\Omega\Lambda}\varepsilon^{\Gamma\Phi}f_{\Omega\Gamma}.
\end{aligned}
$$

Związki (2.4), (2.17) oraz równania (2.11) stanowią układ równań naprężeniowych tarcz siatkowych.

Podstawowymi niewiadomymi są trzy funkcje naprężeń. Równania dla tych funkcji mają postać

$$\begin{gathered}
\Delta_\Lambda[\tilde{a}_{kl}^{\Lambda\Phi}\bar{\Delta}_\Phi\varphi^l+\tilde{b}_k^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi+\varepsilon_{lm}l_\Phi^l\varphi^m)]+\varepsilon_{kl}l_\Lambda^l[\tilde{f}^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi+\varepsilon_{mn}l_\Phi^m\varphi^n)+\tilde{b}_m^{\Phi\Lambda}\bar{\Delta}_\Phi\varphi^m] = 0,\\
\Delta_\Lambda[\tilde{f}^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi+\varepsilon_{kl}l_\Phi^k\varphi^l)+\tilde{b}_k^{\Phi\Lambda}\bar{\Delta}_\Phi\varphi^k] = 0.
\end{gathered}\tag{2.19}$$

Natomiast równania (2.5), (2.18) i (2.12) stanowią układ równań naprężeniowych płyt siatkowych. Równania dla funkcji naprężeń mają w tym przypadku postać następującą:

$$\begin{gathered}
\Delta_\Lambda[\tilde{a}^{\Lambda\Phi}\bar{\Delta}_\Phi\varphi+\tilde{b}_l^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi^l+\varepsilon^l{}_m l_\Phi^m\varphi)]+\varepsilon_k{}^l l_\Lambda^k[\tilde{f}_{lm}^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi^m+\varepsilon^m{}_n l_\Phi^n\varphi)+\tilde{b}^{\Phi\Lambda}_l\bar{\Delta}_\Phi\varphi] = 0,\\
\Delta_\Lambda[\tilde{f}_{kl}^{\Lambda\Phi}(\bar{\Delta}_\Phi\psi^l+\varepsilon^l{}_m l_\Phi^m\varphi)+\tilde{b}^{\Phi\Lambda}_l\bar{\Delta}_\Phi\varphi] = 0.
\end{gathered}\tag{2.20}$$

3. Analogia tarczowo-płytowa

Między równaniami stanu tarczowego i stanu płytowego rozważanych siatek zachodzi pełna analogia. Można ją sformułować następująco: Jeżeli w równaniach przemieszczeniowych (1.1), (1.2), (1.3), (1.7) dokonamy zamiany występujących tam symboli według schematu

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\Delta}_\Lambda \leftrightarrow \Delta_\Lambda, & T_k^\Lambda \leftrightarrow \tilde{\varkappa}_k^\Lambda, & M^\Lambda \leftrightarrow \tilde{\eta}^\Lambda,\\
u^k \leftrightarrow \psi^k, & v \leftrightarrow \varphi, & \eta_\Lambda^k \leftrightarrow \tilde{M}_\Lambda^k,\\
\varkappa_\Lambda \leftrightarrow \tilde{T}_\Lambda, & A_{kl}^{\Lambda\Phi} \leftrightarrow \tilde{f}_{kl}^{\Lambda\Phi}, & B_k^{\Lambda\Phi} \leftrightarrow \tilde{b}^{\Phi\Lambda}_k,\\
 & F^{\Lambda\Phi} \leftrightarrow \tilde{a}^{\Lambda\Phi}, &
\end{array}$$

to otrzymamy równania naprężeniowe płyt (2.5), (2.12), (2.18) (2.20). Podobnie, jeżeli w równaniach naprężeniowych tarcz (2.4), (2.11), (2.17), (2.19) zamienimy symbole według schematu

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\Delta}_\Lambda \leftrightarrow \Delta_\Lambda, & \tilde{T}_\Lambda^k \leftrightarrow \varkappa_\Lambda^k, & \tilde{M}_\Lambda \leftrightarrow \eta_\Lambda,\\
\varphi^k \leftrightarrow v^k, & \psi \leftrightarrow u, & \tilde{\eta}_k^\Lambda \leftrightarrow M_k^\Lambda,\\
\tilde{\varkappa}^\Lambda \leftrightarrow T^\Lambda, & \tilde{a}_{kl}^{\Lambda\Phi} \leftrightarrow F_{kl}^{\Lambda\Phi}, & \tilde{b}_k^{\Lambda\Phi} \leftrightarrow B^{\Phi\Lambda}_k,\\
 & \tilde{f}^{\Phi\Lambda} \leftrightarrow A^{\Lambda\Phi}, &
\end{array}$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe płyt (1.4), (1.5), (1.6), (1.8).

Analogia ta obejmuje również pozostałe równania, mianowicie (2.6), (2.7) i (2.13), (2.14); (2.2), (2.3) i (2.8), (2.9). Ogólnie można więc powiedzieć, że zamieniając odpowiednio symbole w dowolnym równaniu zagadnienia tarczowego, otrzymamy odpowiadające mu równanie zagadnienia płytowego i odwrotnie, dokonując takiej zamiany w dowolnym równaniu zagadnienia płytowego otrzymamy odpowiednie równanie zagadnienia tarczowego.

4. Analogia tarczowo-płytowa dla dźwigarów, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów

W poprzednim punkcie pracy omówiono analogię tarczowo-płytową dla regularnych siatek prętowych, opisanych równaniami dyskretnej teorii sprężystości. W tym punkcie wykażemy istnienie takiej samej analogii w kontynualnej teorii dźwigarów siatkowych.

Korzystając z reguł aproksymacyjnych podanych w [1] i w [5] można przejść od równań modelu dyskretyzowanego do równań modelu ciągłego. Równania dla modelu ciągłego przedstawimy od razu w krzywoliniowym układzie współrzędnych x^K, stosując takie same oznaczenia jak w pracy [3].

Jednorodne równania równowagi, związki geometryczne oraz równania konstytutywne dla zagadnienia tarczowego mają postać [3]:

$$p^{KL}|_K = 0, \quad m^K|_K + e_{KL}p^{KL} = 0, \tag{4.1}$$

$$\gamma_{KL} = u_L|_K + e_{LK}v, \quad \varkappa_K = v|_K, \tag{4.2}$$

$$p^{KL} = A^{KLMN}\gamma_{MN}, \quad m^K = C^{KL}\varkappa_L, \tag{4.3}$$

dla zagadnienia zaś płytowego postać następującą [3]:

$$p^K|_K = 0, \quad m^{KL}|_K + e^L{}_K p^K = 0, \tag{4.4}$$

$$\gamma_K = u|_K + e_{KM}v^M, \quad \varkappa_{KL} = v_L|_K, \tag{4.5}$$

$$p^K = A^{KL}\gamma_L, \quad m^{KL} = C^{KLMN}\varkappa_{MN}, \tag{4.6}$$

gdzie p^{KL} i m^K, γ_{KL} i $\varkappa_K$, u_K i v są kolejno składowymi tarczowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, a p^K, m^{KL}, γ_K i $\varkappa_{KL}$, u i v_K — składowymi płytowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, zaś A^{KLMN}, C^{KL}, C^{KLMN} i A^{KL} są składowymi tensorów sztywności sprężystej.

Równania dla składowych stanu przemieszczenia mają odpowiednio postać [3]:

$$\begin{gathered} [A^{KLMN}(u_N|_M + e_{NM}v)]|_K = 0, \\ (C^{KM}v|_M)|_K + e_{KL}A^{KLMN}(u_N|_M + e_{NM}v) = 0 \end{gathered} \tag{4.7}$$

dla tarczy oraz

$$\begin{gathered} [A^{KL}(u|_L + e_{LM}v^M)|_K = 0, \\ (C^{KLMN}v_N|_M)|_K + e^L{}_K A^{KM}(u|_M + e_{MN}v^N) = 0 \end{gathered} \tag{4.8}$$

dla płyty.

Równania naprężeniowe tarcz siatkowych zostały szeroko omówione w pracy [3], gdzie jako podstawowe niewiadome przyjęto dwie składowe stanu naprężenia m^K oraz jedną funkcję naprężeń. Pomiędzy tymi równaniami i równaniami przemieszczeniowymi płyt nie zachodzi jednak analogia. Dlatego też obecnie przedstawimy równania, które odpowiadają swoją budową równaniom podanym w drugim punkcie pracy.

Związkom (2.1) odpowiadają wzory:

$$\begin{gathered} \tilde{p}_{KL} = e_{MK}a_{NL}p^{MN}, \quad \tilde{m}_K = e_{MK}m^M, \\ \tilde{m}_{KL} = e_{MK}a_{NL}m^{MN}, \quad \tilde{p}_K = e_{MK}p^M, \end{gathered} \tag{4.9}$$

równaniom zaś (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) równania następujące:

$$\tilde{p}_{[M|N||K]} = 0, \quad \tilde{m}_{[M|K]} + e_{[K}{}^{N}\tilde{p}_{M]N} = 0, \tag{4.10}$$

$$\tilde{p}_{[M|K]} = 0, \quad \tilde{m}_{[M|N||K]} + e_{N[K}\tilde{p}_{M]} = 0, \tag{4.11}$$

$$\tilde{p}_{KL} = \varphi_{L}|_{K}, \quad \tilde{m}_{K} = \psi_{K} + e_{KL}\varphi^{L}, \tag{4.12}$$

$$\tilde{m}_{KL} = \psi_{L}|_{K} + e_{LK}\varphi, \quad \tilde{p}_{K} = \varphi|_{K}. \tag{4.13}$$

A zatem funkcje φ_K i ψ są funkcjami naprężeń dla zagadnienia tarczowego, a funkcje φ i ψ_K dla zagadnienia płytowego. Związki pomiędzy składowymi p^{KL}, m^{K}, m^{KL}, p^{K} a funkcjami $\varphi_K, \psi, \psi_K, \varphi$ mają postać:

$$p^{KL} = e^{KM}\varphi^{L}|_{M}, \quad m^{K} = e^{KM}(\psi|_{M} + e_{ML}\varphi^{L}), \tag{4.14}$$

$$m^{KL} = e^{KN}(\psi^{L}|_{N} + e^{L}{}_{N}\varphi), \quad p^{K} = e^{KL}\varphi|_{L}. \tag{4.15}$$

Warunki nierozdzielności odkształcenia odpowiadające warunkom (2.8) i (2.9) mają postać:

$$\gamma_{[M|N||K]} + e_{N[K}\varkappa_{M]} = 0, \quad \varkappa_{[M|N]} = 0, \tag{4.16}$$

$$\gamma_{[M|K]} + e_{[K}{}^{N}\varkappa_{M]N} = 0, \quad \varkappa_{[M|N||K]} = 0, \tag{4.17}$$

a odpowiadające warunkom (2.11) i (2.12) postać następującą:

$$\tilde{\gamma}^{KL}|_{K} + e_{K}{}^{L}\tilde{\varkappa}^{K} = 0, \quad \tilde{\varkappa}^{K}|_{K} = 0, \tag{4.18}$$

$$\tilde{\gamma}^{K}|_{K} + e_{KL}\tilde{\varkappa}^{KL} = 0, \quad \tilde{\varkappa}^{KL}|_{K} = 0, \tag{4.19}$$

gdzie

$$\tilde{\gamma}^{KL} = e^{KM}a^{LN}\gamma_{MN}, \quad \tilde{\varkappa}^{K} = e^{KL}\varkappa_{L},$$

$$\tilde{\varkappa}^{KL} = e^{KM}a^{LN}\varkappa_{MN}, \quad \tilde{\gamma}^{K} = e^{KL}\gamma_{L}.$$

Ostatnie zależności są odpowiednikami wzorów (2.10).

Równania geometryczne odpowiadające związkom (2.13) i (2.14) są następujące:

$$\tilde{\gamma}^{KL} = e^{KM}(u^{L}|_{M} + e^{L}{}_{M}v), \quad \tilde{\varkappa}^{K} = e^{KL}v|_{L}, \tag{4.20}$$

$$\tilde{\gamma}^{K} = e^{KM}(u|_{M} + e_{ML}v^{L}), \quad \tilde{\varkappa}^{KL} = e^{KM}v^{L}|_{M}. \tag{4.21}$$

Związki odwrotne do (4.3) i (4.6) mają postać

$$\gamma_{KL} = B_{KLMN}p^{MN}, \quad \varkappa_{K} = D_{KL}m^{L}, \tag{4.22}$$

$$\gamma_{K} = B_{KL}p^{L}, \quad \varkappa_{KL} = D_{KLMN}m^{MN}, \tag{4.23}$$

natomiast równania odpowiadające związkom (2.17) i (2.18) postać następującą:

$$\tilde{\gamma}^{KL} = \tilde{B}^{KLMN}\tilde{p}_{MN}, \quad \tilde{\varkappa}^{K} = \tilde{D}^{KL}\tilde{m}_{L}, \tag{4.24}$$

$$\tilde{\gamma}^{K} = \tilde{B}^{KL}\tilde{p}_{L}, \quad \tilde{\varkappa}^{KL} = \tilde{D}^{KLMN}\tilde{m}_{MN}, \tag{4.25}$$

gdzie

$$\tilde{B}^{KPRT} = e^{LK}a^{NP}e^{MR}a^{ST}B_{LNMS}, \quad \tilde{D}^{KS} = e^{LK}e^{MS}D_{LM},$$

$$\tilde{D}^{KPRT} = e^{LK}a^{NP}e^{MR}a^{ST}D_{LNMS}, \quad \tilde{B}^{KS} = e^{LK}e^{MS}B_{LM}.$$

Korzystając z (4.12), (4.24) i (4.18) otrzymamy równania na funkcje naprężeń dla zagadnienia tarczowego

$$\begin{aligned}&[\tilde{D}^{KL}(\psi|_L+e_{LM}\varphi^M)]|_K = 0,\\ (4.26)\qquad &(\tilde{B}^{KLMN}\varphi_N|_M)|_K+e^L{}_K\tilde{D}^{KM}(\psi|_M+e_{MN}\varphi^N) = 0.\end{aligned}$$

Korzystając zaś z (4.13), (4.25) i (4.19) otrzymamy odpowiednie równania dla zagadnienia płytowego, mianowicie

$$\begin{aligned}&[\tilde{D}^{KLMN}(\psi_N|_M+e_{NM}\varphi)]|_K = 0,\\ (4.27)\qquad &(\tilde{B}^{KM}\varphi|_M)|_K+e_{KL}\tilde{D}^{KLMN}(\psi_N|_M+e_{NM}\varphi) = 0.\end{aligned}$$

A zatem również w tym przypadku można stwierdzić, że jeżeli w równaniach przemieszczeniowych tarcz (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) dokonamy zamiany symboli według schematu:

$$p^{KL}\leftrightarrow\tilde{\varkappa}^{KL},\qquad m^K\leftrightarrow\tilde{\gamma}^K,\qquad u_K\leftrightarrow\psi_K,$$
$$v\leftrightarrow\varphi,\qquad \gamma_{KL}\leftrightarrow\tilde{m}_{KL},\qquad \varkappa_K\leftrightarrow\tilde{p}_K,$$
$$A^{KLMN}\leftrightarrow\tilde{D}^{KLMN},\qquad C^{KM}\leftrightarrow\tilde{B}^{KM},$$

to otrzymamy równania naprężeniowe płyt (4.13), (4.19), (4.25), (4.27) oraz że jeżeli w równaniach naprężeniowych tarcz (4.12) (4.18), (4.24), (4.26) dokonamy zamiany symboli według schematu:

$$\tilde{p}_{KL}\leftrightarrow\varkappa_{KL},\qquad \tilde{m}_K\leftrightarrow\gamma_K,\qquad \varphi_K\leftrightarrow v_K,$$
$$\psi\leftrightarrow u,\qquad \tilde{\gamma}^{KL}\leftrightarrow m^{KL},\qquad \tilde{\varkappa}^K\leftrightarrow p^K,$$
$$\tilde{D}^{KL}\leftrightarrow A^{KL},\qquad \tilde{B}^{KLMN}\leftrightarrow C^{KLMN},$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe płyt (4.4), (4.5), (4.6), (4.8).

Wydaje się, że najistotniejsze znaczenie ma analogia pomiędzy równaniami (4.26) i (4.8).

Funkcje naprężeń tarczy siatkowej muszą spełniać równania identyczne z równaniami dla składowych stanu przemieszczenia odpowiednio dobranej płyty siatkowej. A zatem będzie można mierząc składowe stanu przemieszczenia płyty jednoznacznie wyznaczyć wartości funkcji naprężeń dla tarczy. W ten sposób można eksperymentalnie badać stany naprężenia tarcz siatkowych. Może to mieć znaczenie dla tarcz o nietypowych kształtach.

5. Uwagi końcowe

W pracy [6] rozważono powłoki siatkowe zbudowane z trzech rodzin prętów przy założeniu, że różnice między długościami prętów sąsiednich są wielkościami «małymi» w porównaniu z długością pręta. Przy takim założeniu dokładność równań przemieszczeniowych i naprężeniowych jest różna w ramach tej samej teorii. Trudno zatem mówić w takim przypadku o pełnej analogii. Z tego też powodu w punktach 1–3 niniejszej pracy rozważania ograniczono do siatek, których wszystkie oczka mają jednakowy kształt i wymiary. Jednak znacznie istotniejsze jest założenie, że siatka prętowa utworzona jest z dwóch rodzin prętów. Modelem obliczeniowym jest wtedy dyskretny ośrodek Cosseratów, którego rząd struktury różnicowej m wynosi 2.

Wydaje się, że tylko dla tego przypadku możliwe jest sformułowanie nie tylko analogii tarczowo-płytowej, lecz również analogii statyczno-geometrycznej. Co prawda w pracach [2] i [6] dopuszczono do rozważań dyskretne ośrodki Cosseratów, dla których $m > 2$, lecz nie wyjaśniono istotnych problemów z tym związanych. Między innymi nie wyjaśniono redukcji liczby warunków nierozdzielności. Na przykład w pracy [2] wzór $(3.2)_2$ na str. 122 ma postać

$$\Delta_{[\Phi}\varkappa^{k}_{\Lambda]} = 0. \tag{5.1}$$

Dla $m = 3$ układ ten zawiera dziewięć niezależnych warunków nierozdzielności, podany zaś na tej samej stronie układ $(3.3)_2$ w postaci

$$\varepsilon^{\Lambda\Phi}\Delta_{\Lambda}\varkappa^{k}_{\Phi} = 0 \tag{5.2}$$

dla $m = 3$ zawiera już tylko trzy warunki nierozdzielności.

Ta sama uwaga odnosi się także do pozostałych warunków nierozdzielności. Powstaje zatem pytanie, czy rozwiązania otrzymane na podstawie równań naprężeniowych, podanych w [2] i proponowanych w [6], w przypadku gdy $m > 2$, będą poprawne, tzn. czy uzyskane na ich podstawie składowe stanu odkształcenia będą spełniały właściwe warunki nierozdzielności. Pytanie jest o tyle istotne, że można określić fikcyjny stan odkształcenia o składowych spełniających warunki (5.2), a nie spełniających koniecznych warunków nierozdzielności (5.1), gdyż równania (5.2) są sumami odpowiednich równań (5.1).

Gdy $m = 2$ symbol $\varepsilon^{\Lambda\Phi}$ przechodzi w symbol $\epsilon^{\Lambda\Phi}$ i równoważność odpowiednich układów jest oczywista. Natomiast w przypadku modelu ciągłego rozważania są poprawne dla siatek utworzonych zarówno z dwóch, jak i z trzech rodzin prętów.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, **23** (1971).
2. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elastic Cosserat media*, Arch. Mech. Stos., 2, **25** (1973).
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1970.
4. M. KLEIBER, Cz. WOŹNIAK, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon Sci., Série Sci. Techn., 3, **19** (1971).
5. S. KONIECZNY, F. PIETRAS, Cz. WOŹNIAK, *O liniowych zagadnieniach dyskretnej teorii sprężystości*, Rozpr. Inż., 2, **20** (1972).
6. M. KLEIBER, *Statics of elastic lattice-type shells*, Arch. Mech. Stos., 2, **25** (1973).

Резюме

ПЛАСТИНОЧНАЯ АНАЛОГИЯ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТЧАТЫХ НЕСУЩИХ СООРУЖЕНИЙ

В работе представлена пластиночная аналогия для дискретизованной модели и для непрерывной модели сетчатых пластин.

Аналогия состоит в сходстве уравнений в перемещениях описывающих состояние, вызванное нагрузкой, действующей в плоскости системы и уравнений в напряжениях, описывающих состояние, вызванное нагрузкой действующей перпендикулярно плоскости пластинки, а также в сходстве уравнений в напряжениях для первого случая и уравнений в перемещениях для второго случая.

Представленная аналогия может быть использована для экспериментального исследования напряженного состояния в сетчатых пластинках.

Summary

PLATE ANALOGY IN THE THEORY OF SURFACE LATTICE STRUCTURES

The paper discusses the plate analogy for a discretized model as well as for a continuous model of plane surface lattice structures.

Such an analogy consists in the similarity of displacement equations describing the state due to the loading acting in the plane of the system, and the stress equations describing the state produced by the loading acting perpendicularly to the plate, as well as in the similarity between the stress equations for the second case.

The analogy discussed in the paper may be applied in experimental investigations of stresses occurring in lattice plates.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1973 r.