MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 12 (1974)

ANALIZA NIELINIOWYCH SAMOWZBUDNYCH CYKLÓW GRANICZNYCH DRGAŃ POWŁOKI O MAŁYM WZNIOSIE W NIELINIOWYM OPŁYWIE NADDŹWIĘKOWYM

BARBARA GAJL (WARSZAWA)

1. Wstęp

W dotychczasowej literaturze, zajmującej się zagadnieniami aerosprężystości układów powierzchniowych w opływach naddźwiękowych, zajmowano się wyznaczaniem krytycznych wartości parametrów, określających granice stateczności drgań samowzbudzonych — były to badania układów zlinearyzowanych; rozpatrywano także cykle graniczne w problemach nieliniowych dla płaskich płyt przy założeniu liniowości sił aerodynamicznych i bez uwzględnienia tłumienia materiałowego [3].

Nieliniowe zagadnienie drgań samowzbudnych powłok o małym wzniosie i skończonej długości wymaga zastosowania nieliniowej aerodynamiki z uwzględnieniem wpływu opływu stacjonarnego na opływ niestacjonarny. Jak wykazały analizy przeprowadzone w pracach [11 i 12], wartość poprawek wynikłych z uwzględnienia kształtu powłoki i nieliniowości drgań jest niepomijalna.

W niniejszej pracy określono cykl graniczny dla pewnych warunków początkowych, pokazano zmienność w czasie przemieszczeń punktów powłoki i zmienność w czasie funkcji $A_n(t)$, będących składowymi szeregu określającego wielkości przemieszczeń normalnych powierzchni powłoki. Uwzględniono tłumienie materiałowe wg modelu Voigta oraz nieliniową zależność ciśnienia od drgań powierzchni powłoki i wpływ opływu stacjonarnego na opływ niestacjonarny. Przyjęto stałe krzywizny w kierunku podłużnym i poprzecznym. Zastosowano techniczną nieliniową teorię powłok.

Rozwiązanie na przemieszczenia normalne powierzchni powłoki przedstawiono w postaci podwójnego szeregu funkcji własnych i zastosowano ortogonalizacyjną metodę Galerkina w celu sprowadzenia nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu do układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.

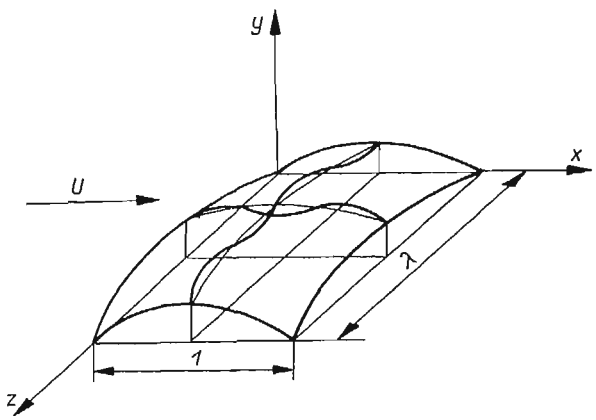
Układ równań różniczkowych zwyczajnych przedstawiony w postaci bezwymiarowej rozwiązano numerycznie. Obliczenia zostały wykonane na elektronowej maszynie cyfrowej GIER. Do programu włączono duńską procedurę Mersno opartą na znanej metodzie numerycznej Rungego-Kutta.

Przykład obliczono dla następujących parametrów: liczba Macha $M = 3$; L/h oznacza stosunek długości powłoki do jej grubości $= 240$; dla wartości krzywizny poprzecznej i podłużnej $k_x = k_z = 0{,}08$ oraz dla wzniosu $\varepsilon = 0{,}08$. W oparciu o wcześniej przeprowadzone rozważania przyjęto ilość fal podłużnych $n = 4$ i ilość fal poprzecznych $m = 1$,

czyli rozwiązywano w przykładzie układ czterech równań. Program dla maszyny liczącej napisano w ten sposób, iż możemy dowolnie zmieniać warunki początkowe, liczbę równań w układzie oraz parametry przepływu i powłoki. Liczenie jest bardzo pracochłonne, gdyż obliczanie jednego punktu płaszczyzny fazowej trwa dla maszyny GIER około 3 min. Z tego względu ograniczono się do jednego przykładu.

2. Równania problemu

Rozpatrujemy powłokę o małym wzniosie i skończonej długości, której rzut na płaszczyznę xz ma długość b i szerokość L. Przyjmujemy, że na krawędziach powłoki są spełnione warunki podparcia przegubowo-przesuwnego. Przyjmujemy ponadto, że powłoka stanowi część nieograniczonej płaszczyzny, która poza powłoką jest nieodkształcalna. Powłoka jest opływana z jednej strony naddźwiękowym strumieniem gazu idealnego o prędkości U w kierunku równoległym do osi x. Niesprężystość materiału powłoki uwzględniono przez wprowadzenie modelu Voigta.



Rys. 1

Zagadnienie przedstawiamy w postaci bezwymiarowej. Wprowadzamy następujące oznaczenia: ϱ_0 oznacza gęstość powietrza w nieskończoności, współrzędne $\bar{x}, \bar{z}$ i przemieszczenie środkowej powierzchni powłoki w kierunku normalnym $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$ odnosimy do szerokości powłoki L i oznaczamy odpowiednio x, z, $w(x, z, t)$. Główne krzywizny $\bar{k}_x$ i $\bar{k}_z$ odnosimy do $1/L$ i oznaczamy przez k_x i k_z. Funkcję naprężeń Airy'ego $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$ odnosimy do $\frac{1}{2}\varrho_0 U^2 L^3$ i oznaczamy przez $\Phi(x, z, t)$, ciśnienie zaś $\Delta\bar{p}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$ odnosimy do ciśnienia dynamicznego $\frac{1}{2}\varrho_0 U^2$ i oznaczamy przez $\Delta p(x, z, t)$. Przez N oznaczamy siły działające na jednostkę długości przekroju powłoki, odnosimy je do $\frac{1}{2}\varrho_0 U^2 L$ i oznaczamy w zależności od kierunku działania odpowiednio N_x i N_z. Czas $\bar{t}$ odniesiony jest do ilorazu L/U i oznaczony przez t, współczynnik zaś tłumienia materiałowego do L/a_0 i oznaczony przez θ; a_0 oznacza prędkość dźwięku.

Stosujemy techniczną nieliniową teorię powłok, która jest szczególnym przypadkiem nieliniowej teorii małych odkształceń (zlinearyzowanej względem składowych wektora przemieszczenia, stycznych do powierzchni podstawowej powłoki) i mieści się ponadto w ramach założeń Kirchhoffa-Love'a. Za powierzchnię podstawową przyjmujemy środkową powierzchnię powłoki.

Równania ruchu powłoki w układzie bezwymiarowym mają następującą postać:

$$(2.1)\quad \left(1+\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\nabla^2 w+\lambda_1 \mathsf{M}^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\lambda_2\mathsf{M}^2\left[\left(k_x+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\left(k_z+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}+\Delta p\right],$$

$$(2.2)\quad \nabla^2\nabla^2\Phi=\lambda_3\frac{1}{\mathsf{M}^2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-k_x\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-k_z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right],$$

gdzie θ oznacza tłumienie materiałowe,

$$(2.3)\quad \begin{aligned}\lambda_1 &= 12(1-\nu^2)(L/h)^2\varrho_s a_0^2/E,\\ \lambda_2 &= 12(1-\nu^2)(L/h)^3\varrho_0 a_0^2/2E,\\ \lambda_3 &= 2E/\varrho_0 a_0^2(h/L);\end{aligned}$$

M oznacza liczbę Macha, ν — współczynnik Poissona, E — moduł sprężystości Younga, ϱ_s — gęstość materiału powłoki, h — grubość powłoki, zaś Δp jest różnicą ciśnień działającą na powierzchnię powłoki i wyraża się wzorem

$$(2.4)\quad \Delta p=\varepsilon(p_1^{(1)}+p_1^{(2)})+\varepsilon^2 p_2^{(1)}+\delta(p_3^{(1)}+p_3^{(2)})+\delta\varepsilon p_4^{(1)}+\delta^2 p_5^{(1)};$$

ε i δ są małymi parametrami i mają ten sam sens co w [11 i 12], wyrażenia zaś na składowe ciśnienia są podane w [12].

3. Określenie funkcji naprężeń

Rozwiązania układu równań (2.1) i (2.2) będziemy poszukiwali w postaci podwójnego szeregu funkcji własnych

$$(3.1)\quad w(x,z,t)=\sum_n\sum_m A_{nm}(t)\sin n\pi x\sin\frac{m\pi}{\lambda}z,$$

gdzie n i m są liczbą fal w kierunku podłużnym i poprzecznym, a $\lambda=b/L$ — wydłużeniem powłoki.

Rozwiązanie równania (2.2) przedstawiamy jako sumę rozwiązań

$$(3.2)\quad \Phi(x,z,t)=\Phi_1(x,z,t)+\Phi_2(x,z,t),$$

gdzie $\Phi_1(x,z,t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, natomiast $\Phi_2(x,z,t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania pełnego.

Rozwiązanie ogólne przedstawiamy za pomocą wzoru [1]

$$\Phi_1(x,z,t)=\frac{1}{2}(\tilde{N}_x z^2+\tilde{N}_z x^2-2N_{xz}xz), \tag{3.3}$$

gdzie $\tilde{N}_x, \tilde{N}_z, \tilde{N}_{xz}$ są pewnymi stałymi, uzyskanymi z całkowania; zakładamy mianowicie, że średnie przemieszczenie powierzchni w kierunkach x i z jest równe zeru i zapisujemy to w postaci

$$\int_0^1 dx \int_0^\lambda \frac{\partial u}{\partial x}dz = 0, \qquad \int_0^1 dx \int_0^\lambda \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0, \tag{3.4}$$

gdzie $u(x,z,t)$, $v(x,z,t)$ oznaczają bezwymiarowe przemieszczenia w kierunkach osi x i z.

Zależność między pochodnymi u i v a funkcją Airy'ego jest następująca [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{\lambda_3}\mathsf{M}^2(N_x-\nu N_z)+k_x w-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\ \frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{1}{\lambda_3}\mathsf{M}^2(N_z-\nu N_x)+k_z w-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie

$$N_x=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}, \qquad N_z=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}, \qquad N_{xz}=-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial z}. \tag{3.6}$$

Po podstawieniu (3.1) do (3.5), a następnie do (3.4) i wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tilde{N}_x-\nu\tilde{N}_z&=\frac{\lambda_3}{\mathsf{M}^2}\left\{\frac{\pi^2}{8}\sum_n\sum_m n^2A_{nm}^2(t)-\frac{k_x}{\pi^2}\sum_n\sum_m\frac{1}{nm}A_{nm}(t)[1-(1)^n][1-(1)^m]\right\},\\ \tilde{N}_z-\nu\tilde{N}_x&=\frac{\lambda_3}{\mathsf{M}^2}\left\{\frac{\pi^2}{8\lambda^2}\sum_n\sum_m m^2A_{nm}^2(t)-\frac{k_z}{\pi^2}\sum_n\sum_m\frac{1}{nm}A_{nm}(t)[1-(1)^n][1-(1)^m]\right\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Z (3.1) drogą prostych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tilde{N}_x=\frac{\lambda_3}{\mathsf{M}^2(1-\nu^2)}\Bigg\{&\frac{\pi^2}{8}\sum_n\sum_m\left(n^2+\frac{m^2\nu}{\lambda^2}\right)A_{nm}(t)-\\ &-\frac{1}{\pi^2}(k_x+\nu k_z)\sum_n\sum_m\frac{1}{nm}A_{nm}(t)[1-(1)^n][1-(1)^m]\Bigg\};\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{N}_z=\frac{\lambda_3}{\mathsf{M}^2(1-\nu^2)}\Bigg\{&\frac{\pi^2}{8}\sum_n\sum_m\left(\nu n^2+\frac{m^2}{\lambda^2}\right)A_{nm}^2(t)-\\ &\frac{1}{\pi^2}(k_z+\nu k_x)\sum_n\sum_m\frac{1}{nm}A_{nm}(t)[1-(1)^n][1-(1)^m]\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tilde{N}_{xz}\equiv 0.$$

Podstawiając (3.7), (3.8) i (3.9) do (3.3) otrzymujemy następujące wyrażenia na pochodne funkcji naprężeń:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = \tilde{N}_x, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \tilde{N}_z, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} = 0. \tag{3.10}$$

Rozwiązanie szczególne równania (2.2), a tym samym i wartości funkcji $\Phi_2(x, z, t)$, określamy w sposób następujący. Podstawiamy (3.1) do równania (2.2) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\Phi_2(x, z, t) = \frac{\lambda_3}{M^2}\Bigg\{\frac{\pi^4}{\lambda^2}\sum_n\sum_m\sum_s\sum_q A_{nm}(t)A_{sq}(t)nmsq\cos n\pi x\cos s\pi x \times \\ \times \cos\frac{m\pi}{\lambda}z\cos\frac{q\pi}{\lambda}z - \frac{\pi^2}{M^2}\sum_n\sum_m\sum_s\sum_q n^2q^2A_{nm}(t)A_{sq}(t)\sin n\pi x\sin s\pi x \times \\ \sin\frac{m\pi}{\lambda}z\sin\frac{q\pi}{\lambda}z + \pi^2\sum_n\sum_m{}'\left[k_x\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + kn^2\right]A_{nm}(t)\sin n\pi x\sin\frac{m\pi}{\lambda}z\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Poszukujemy rozwiązania równania (3.11) z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} &\int_0^\lambda \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}dz = 0, \qquad \int_0^\lambda \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial z}dz = 0, \qquad \text{dla} \quad x = 0 \quad \text{oraz} \quad x = 1; \\ &\int_0^1 \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}dx = 0, \qquad \int_0^1 \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial z}dx = 0, \qquad \text{dla} \quad z = 0 \quad \text{oraz} \quad z = \lambda. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Równanie (3.11) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\Phi_2(x, z, t) = \frac{\lambda_3}{M^2}\Bigg\{\frac{\pi^4}{4\lambda^2}\sum_n\sum_m\sum_s\sum_q A_{nm}(t)A_{sq}(t) \times \\ \times\Bigg[\cos\frac{\pi}{\lambda}(m-q)z[nq(ms+nq)\cos\pi(n+s)x + nq(ms-nq)\cos\pi(n-s)x] + \\ + \cos\frac{\pi}{\lambda}(m+q)z[nq(ms-nq)\cos\pi(n+s)x + nq(ms+nq)\cos\pi(n-s)x]\Bigg] + \\ + \pi^2\sum_n\sum_m{}'\left[k_x\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + k_z n^2\right]A_{nm}(t)\sin n\pi x\sin\frac{m\pi}{\lambda}z\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Zakładamy rozwiązanie (spełniające warunki brzegowe (3.12)) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, z, t) = \sum_n\sum_m\sum_s{}'\sum_q A_{nm}(t)A_{sq}(t)\Bigg\{\cos\frac{\pi}{\lambda}(m-q)z[A_1\cos\pi(n+s)x + \\ + B_1\cos\pi(n-s)x] + \cos\frac{\pi}{\lambda}(m+q)z[C_1\cos\pi(n+s)x + D_1\cos\pi(n-s)x]\Bigg\} + \\ + E_1\sum_n\sum_m{}'A_{nm}(t)\sin n\pi x\sin\frac{m\pi}{\lambda}z. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Przewidywane rozwiązanie (3.14) podstawiamy do (3.13) i otrzymujemy równanie na współczynniki. Z tego równania określamy

$$A_1 = \frac{\lambda_3 nq(ms+nq)}{4M^2\lambda^2\left[(n+s)^2+\left(\frac{m-q}{\lambda}\right)^2\right]^2},$$

$$B_1 = \frac{\lambda_3 nq(ms-nq)}{4M^2\lambda^2\left[(n-s)^2+\left(\frac{m-q}{\lambda}\right)^2\right]^2},$$

(3.15)
$$C_1 = \frac{\lambda_3 nq(ms-nq)}{4M^2\lambda^2\left[(n+s)^2+\left(\frac{m+q}{\lambda}\right)^2\right]^2},$$

$$D_1 = \frac{\lambda_3 nq(ms+nq)}{4M^2\lambda^2\left[(n-s)^2+\left(\frac{m+q}{\lambda}\right)^2\right]^2},$$

$$E_1 = \frac{\lambda_3\left[k_x\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2+k_z n^2\right]}{M^2\pi^2\left[n^2+\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\right]^2}.$$

Podstawiając (3.15) do (3.14) otrzymujemy rozwiązanie szczególne dla $\Phi_2(x, z, t)$.

4. Redukcja równań

Mając określoną funkcję naprężeń $\Phi(x, z, t)$ możemy sprowadzić różniczkowe cząstkowe równanie ruchu powłoki (2.1) do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu (względem czasu t) podstawiając uprzednio do (2.1) rozwiązanie założone w postaci szeregu funkcji własnych (3.1) i odpowiednie pochodne funkcji naprężeń $\Phi(x, z, t)$.

Zapisujemy równanie (2.1) w postaci

(4.1)
$$\mathscr{L}[w(x, z, t)] = 0.$$

Po zastosowaniu ortogonalizacyjnej metody Galerkina otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu

(4.2)
$$\int_0^1\int_0^\lambda \mathscr{L}[w(x, z, t)]w_{lr}(x, z)\,dx\,dz = 0,$$

gdzie $l, r = 1, 2, 3, \ldots$, zaś

(4.3)
$$w_{lr}(x, z) = \sin l\pi x \sin\frac{r\pi}{\lambda}z$$

jest funkcją ortogonalizującą.

Jeżeli założymy, że funkcja opisująca powierzchnię $f(x, z) = \sin\pi x \sin(\pi/\lambda)z$ i podstawimy ją do (2.1), to układ równań opisujący drgania powłoki przybierze postać

$$(4.4)\quad \frac{d^2}{dt^2}A_{lr}(t) = -\frac{1}{\lambda \mathsf{M}^2}\left[\pi^4\left(l^2+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)^2\theta - \frac{2(\mathsf{M}^2-2)}{\beta^3}\right]\frac{d}{dt}A_{lr}(t) + \frac{2\varepsilon(\gamma+1)\pi^2}{\lambda_1 \mathsf{M}^2}\times$$

$$\times \sum_n \frac{d}{dt}A_{nr}(t)\alpha^{(1)}_{1nl} + \frac{4\pi(\gamma+1)}{\lambda_1 \lambda \mathsf{M}^2}L_{lr} + \frac{2(\gamma+1)}{\lambda_1 \lambda \mathsf{M}^2}\mathsf{M}_{lr} + \frac{4}{\lambda\lambda_1 \mathsf{M}^2}H_{lr} - \frac{1}{\lambda_1 \mathsf{M}^2}\times$$

$$\left[\pi^4\left(l^2+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda}\frac{\left[k_x\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 + k_z l\right]^2}{\left[l^2+\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\right]^2}\right]A_{lr}(t) + \frac{4}{\lambda_1 \mathsf{M}^2}\sum_n A_{nr}(t)\left[\frac{\pi}{\beta}\alpha_{(l+n)(l-n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon(\gamma+1)\pi^2}{2}\alpha_{1nl}\right] - \frac{4\lambda_4}{\pi^2\lambda_1\lambda\mathsf{M}^2}\frac{1}{lr}[1-(-1)^l][1-(-1)^r]C + \frac{\lambda_4\pi^2}{\lambda_1\lambda\mathsf{M}^2}\left(Al^2 + B\frac{r^2}{\lambda^2}\right)A_{lr}(t) +$$

$$+ \frac{4\lambda_4}{\pi^2\lambda_1\lambda\mathsf{M}^2}\frac{1}{lr}[1-(-1)^l][1-(-1)^r]C^{(1)} - \frac{\lambda_2\lambda_3\pi^2}{\lambda^3\lambda_1\mathsf{M}^2}D_{lr} + \frac{4\lambda_2\lambda_3\pi^2}{\lambda^3\lambda_1\mathsf{M}^2}F_{lr} +$$

$$\frac{2(\gamma+1)\pi^2}{\lambda\lambda_1\mathsf{M}^2}K_{lr} - \frac{\lambda_4\pi^2}{\lambda_1\lambda\mathsf{M}^2}\left(A^{(1)}l^2 + B^{(1)}\frac{r^2}{\lambda^2}\right)A_{lr}(t) + \frac{\lambda_2\lambda_3\pi^4}{\lambda^5\lambda_1\mathsf{M}^2}E_{lr}.$$

Podajemy teraz listę oznaczeń symboli wprowadzonych w tym równaniu. λ, λ_1, λ_2, λ_3, oraz M są określone wzorami (2.3) i (3.1). Ponadto

$$(4.5)\quad \beta = \sqrt{\mathsf{M}^2-1},$$

γ — wykładnik adiabaty, ε jest określone wzorem (2.3), $\lambda_4 = 12\lambda(L/h)^2$,

$$\alpha^{(1)}_{1nl} = \gamma^{(1)}_{1(l-n)} - \gamma^{(1)}_{1(l+n)},$$

$$\gamma^{(1)}_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp n)^2 \neq 1,$$

$$\gamma^{(1)}_{1(l\mp n)} = 1/4 \quad \text{dla} \quad (l\mp n)^2 = 1,$$

$$\gamma^{(1)}_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp n)^2 = 0.$$

$$(4.6)\quad L_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t)\frac{d}{dt}A_{sq}(t)n\alpha^{(2)}_{nsl}\beta_{mqr},$$

gdzie

$$\alpha^{(2)}_{nsl} = \gamma^{(2)}_{n(l-s)} - \gamma^{(2)}_{n(l+s)},$$

$$\gamma^{(2)}_{n(l\mp s)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp s)^2 \neq n^2,$$

$$\gamma^{(2)}_{n(l\mp s)} = 1/4 \quad \text{dla} \quad (l\mp s)^2 = n^2,$$

$$\gamma^{(2)}_{n(l\mp s)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp s)^2 = 0;$$

$$\beta_{mqr} = \varkappa_{m(q-r)} - \varkappa_{m(q+r)},$$

$$\varkappa_{m(q\mp r)} = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{1-(-1)^{m-(q\mp r)}}{m-(q\mp r)} + \frac{1-(-1)^{m+(q\mp r)}}{m+(q\mp r)}\right] \quad \text{dla} \quad (q\mp r)^2 \neq m^2,$$

$$\varkappa_{m(q\mp r)} = \frac{\lambda}{4} \quad \text{dla} \quad (q\mp r)^2 = m^2 \neq 0,$$

$$\varkappa_{m(q\mp r)} = \frac{1-(-1)^m}{2}\frac{\lambda}{\pi m} \quad \text{dla} \quad (q\mp r) = 0.$$

$$\mathsf{M}_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q \frac{d}{dt}A_{nm}(t)\frac{d}{dt}A_{sq}(t)\alpha^{(3)}_{nsl}\beta_{mqr}, \tag{4.7}$$

gdzie

$$\alpha^{(3)}_{nsl} = \gamma^{(3)}_{n(l-s)} - \gamma^{(3)}_{n(l+s)},$$

$$\gamma^{(3)}_{n(l\pm s)} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n-(l\mp s)}}{n-(l\mp s)} + \frac{1-(-1)^{n+(l\mp s)}}{n+(l\mp s)}\right] \quad \text{dla} \quad (l\mp s)^2 \neq n^2,$$

$$\gamma^{(3)}_{n(l\mp s)} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad (l\mp s)^2 = n^2 \neq 0,$$

$$\gamma^{(3)}_{n(l\mp s)} = \frac{1-(-1)^n}{2}\frac{1}{\pi n} \quad \text{dla} \quad (l\mp s) = 0,$$

β_{mqr} określono wzorem (4.6).

$$H_{lr} = \varepsilon\left[\frac{2\pi}{\beta}H^{(1)}_{lr} + \frac{\pi}{\beta^3\lambda^2}H^{(2)}_{lr}\right] + \varepsilon^2\frac{(\gamma+1)\pi^2}{2}H^{(3)}_{lr}, \tag{4.8}$$

gdzie

$$H^{(1)}_{lr} = \alpha_{(l+1)(l-1)}\beta_{(r+1)(r-1)},$$

$$H^{(2)}_{lr} = (\alpha_{(l+1)(l-1)} - \alpha_l)\beta_{(r+1)(r-1)}, \quad H^{(3)}_{lr} = \alpha\beta',$$

$$\alpha_{(l+1)(l-1)} = \gamma_{(l+1)} - \gamma_{(l-1)},$$

$$\gamma_{(l\pm 1)} = \frac{1-(-1)^{l\pm r}}{2\pi(l\pm 1)} \quad \text{dla} \quad l^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{(l\pm r)} = 0 \quad \text{dla} \quad l^2 = 1,$$

$$\beta_{(r+1)(r-1)} = \varkappa_{(r-1)} - \varkappa_{(r+1)},$$

$$\varkappa_{(r\pm 1)} = 0 \quad \text{dla} \quad r^2 \neq 1,$$

$$\varkappa_{(r-1)} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{dla} \quad r = 1,$$

$$\varkappa_{(r+1)} = 0 \quad \text{dla} \quad r = 1,$$

$$\alpha_l = \frac{1-(-1)^l}{\pi l} \quad \text{dla każdego } l.$$

$$\alpha = \gamma_{1(l+1)} + \gamma_{1(l-)},$$

$$\gamma_{1(l\pm1)} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-(-1)_l}{l} + \frac{1-(-1)^{l\mp2}}{l\mp2}\right] \quad \text{dla} \quad (l\pm1)^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{1(l\pm1)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\pm1)^2 = 1,$$

$$\gamma_{1(l\pm1)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\pm1) = 0,$$

$$\beta' = \varkappa_{1(r-1)} - \varkappa_{1(r+1)},$$

$$\varkappa_{1(r\pm1)} = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\mp\left(\frac{1-(-1)^r}{r}\right)\pm\left(\frac{1-(-1)^{r\pm2}}{r\pm2}\right)\right] \quad \text{dla} \quad (r\pm1)^2 \neq 1,$$

$$\varkappa_{1(r\pm1)} = 0 \quad \text{dla} \quad (r\pm1)^2 = 1,$$

$$\varkappa_{1(r\pm1)} = \frac{\lambda}{\pi} \quad \text{dla} \quad (r\pm1) = 0.$$

(4.9)
$$\alpha_{(l+n)(l-n)} = \gamma_{(l+n)} - \gamma_{(l-n)},$$

$$\gamma_{(n\pm l)} = \frac{1-(-1)^{l\pm n}}{2\pi(l\pm n)} \quad \text{dla} \quad n^2 \neq l^2,$$

$$\gamma_{(l\pm n)} = 0 \quad \text{dla} \quad n^2 = l^2,$$

$$\alpha_{1nl} = \gamma_{1(l-n)} + \gamma_{1(l+n)},$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-(-1)^{l\mp n-1}}{l\mp n-1} + \frac{1-(-1)^{l\mp n+1}}{l\mp n+1}\right] \quad \text{dla} \quad (l\mp n)^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp n)^2 = 1,$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l\mp n) = 0.$$

(4.10)
$$C = Ak_x + Bk_x,$$

gdzie

$$A = \frac{1}{\pi^2}(k_x + \nu k_z)\sum_n\sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t)[1-(-1^n)][1-(-1)^m],$$

$$B = \frac{1}{\pi^2}(k_z + \nu k_x)\sum_n\sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t)[1-(-1)^n][1-(-1)^m].$$

(4.11)
$$C^{(1)} = A^{(1)}k_x + B^{(1)}k_z,$$

gdzie

$$A^{(1)} = \frac{\pi^2}{8}\sum_n\sum_m\left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}\nu\right)A_{nm}^2(t),$$

$$B^{(1)} = \frac{\pi^2}{8}\sum_n\sum_m\left(\nu n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}\right)A_{nm}^2(t),$$

$$(4.12)\quad D_{lr}=\sum_n\sum_m\sum_s\sum_q A_{nm}(t)A_{sq}(t)\Big\|\Big\{\Big[k_z(n+s)^2+k_x\Big(\frac{m-q}{\lambda}\Big)^2\Big]\times$$

$$\times A_1\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)}+\Big[k_z(n-s)^2+k_x\Big(\frac{m-q}{\lambda}\Big)^2\Big]B_1\alpha_{(n-s+l)(n-s-l)}\Big\}\beta_{(m-q+r)(m-q-r)}+$$

$$+\Big\{\Big[k_z(n+s)^2+k_x\Big(\frac{m+q}{\lambda}\Big)^2\Big]C_1\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)}+\Big[k_z(n-s)^2+k_x\Big(\frac{m+q}{\lambda}\Big)^2\Big]\times$$

$$\times D_1\alpha_{(n-s+l)(n-s-l)}\Big\}\beta_{(m+q+r)(m+q-r)}\Big\|,$$

gdzie A_1, B_1, C_1, D_1 określono wzorem (3.15),

$$\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)}=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{-(n+s)+l}}{-(n+s)+l}+\frac{1-(-1)^{n+s+l}}{n+s+l}\Big]\qquad\text{dla}\quad (n+s)\neq l,$$

$$\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)}=0\qquad\text{dla}\quad (n+s)=l,$$

$$\beta_{(m+q+r)(m+q-r)}=\frac{\lambda}{2\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{r-(m+q)}}{r-(m+q)}+\frac{1-(-1)^{r+m+q}}{r+m+q}\Big]\qquad\text{dla}\quad (m+q)\neq r,$$

$$\beta_{(m+q+r)(m+q-r)}=0\qquad\text{dla}\quad (m+q)=r,$$

$$\alpha_{[l-(n-s)][l+(n+s)]}=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{l-(n-s)}}{l-(n-s)}+\frac{1-(-1)^{l+(n+s)}}{l+n+s}\Big]\qquad\text{dla}\quad (n-s)^2\neq l^2,$$

$$\alpha_{[l-(n-s)][l+(n+s)]}=0\qquad\text{dla}\quad (n-s)^2=l^2,$$

$$\beta_{[r+(m-q)][r-(m-q)]}=\frac{\lambda}{2\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{r-(m-q)}}{r-(m-q)}+\frac{1-(-1)^{r+(m-q)}}{r+(m-q)}\Big]\qquad\text{dla}\quad (m-q)^2\neq r^2,$$

$$\beta_{[r+(m-q)][r-(m-q)]}=0\qquad\text{dla}\quad (m-q)^2=r^2.$$

$$(4.13)\quad F_{lr}=\sum_i\sum_j\sum_n\sum_m A_{ij}(t)A_{nm}(t)\{[(jn)^2+(im)^2]\times$$

$$\times\alpha_{inl}\beta_{jmr}-2ijnm\alpha^1_{inl}\beta^1_{jmr}\}E_1,$$

gdzie E_1 określono w (3.15)

$$\alpha_{inl}=\gamma_{l(i-n)}-\gamma_{l(i+n)},$$

$$\gamma_{l(i\mp n)}=\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{l(l\mp n)}}{l-(i\mp n)}+\frac{1-(-1)^{l+(l\mp n)}}{l+(i\mp n)}\Big]\qquad\text{dla}\quad l^2\neq(i\mp n)^2,$$

$$\gamma_{l(l\mp n)}=0\qquad\text{dla}\quad l^2=(i\mp n)^2\neq 0,$$

$$\gamma_{l(j\mp m)}=0\qquad\text{dla}\quad l=(i\mp n)=0,$$

$$\beta_{jmr}=\varkappa_{r(j-m)}-\varkappa_{r(j+m)},$$

$$\varkappa_{r(j\mp m)}=\frac{\lambda}{4\pi}\Big[\frac{[1-(-1)^{r-(j\mp m)}}{r-(j\mp m)}+\frac{1-(-1)^{r+(j\mp m)}}{r+(j\mp m)}\Big]\qquad\text{dla}\quad r^2\neq(j\mp m)^2,$$

$$\varkappa_{r(j\mp m)} = 0 \qquad \text{dla} \quad r^2 = (j\mp m)^2 \neq 0,$$

$$\varkappa_{r(j\mp m)} = 0 \qquad \text{dla} \quad r = (j\mp m) = 0,$$

$$\alpha^l_{inl} = \gamma^l_{l(i+n)} + \gamma^l_{l(i-n)}, \qquad \gamma^l_{l(l\pm n)} = \gamma_{l(l\pm n)},$$

$$\beta^1_{jmr} = \varkappa^1_{r(j+m)} + \varkappa^1_{r(j-m)}, \qquad \varkappa^1_{r(j\pm m)} = \varkappa_{r(j\pm m)}.$$

(4.14)
$$K_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) sn\alpha^{(1)}_{nsl} \beta_{mqr},$$

gdzie

$$\alpha^{(1)}_{nsl} = \gamma^{(1)}_{n(l-s)} + \gamma^{(1)}_{n(l+s)},$$

$$\gamma_{n(l\mp s)} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-(-1)^{l\pm s-n}}{l\mp s-n} + \frac{1-(-1)^{l\mp s+n}}{l\mp s+n}\right] \qquad \text{dla} \quad n^2 \neq (l\mp s)^2,$$

$$\gamma_{n(l\mp s)} = 0 \qquad \text{dla} \quad n^2 = (l\mp s)^2 \neq 0,$$

$$\gamma_{n(l\mp s)} = 0 \qquad \text{dla} \quad n = (l\mp s) = 0,$$

β_{mqr} określono wzorem (4.6).

(4.15)
$$E_{lr} = \sum_i \sum_j \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{ij}(t) A_{nm}(t) A_{sq}(t) \times$$

$$\times \underline{\underline{\|}} \{[j^2(n+s)^2 + i^2(m-q)^2]\alpha_{(n+s)il}\beta_{(m-q)jr} - 2ij(m-q) \times$$

$$\times (n+s)\alpha^1_{(n+s)il}\beta^1_{(m-q)jr}\} A_1 + \{[j^2(n-s)^2 + i^2(m-q)^2] \times$$

$$\times \alpha_{(n-s)il}\beta_{(m-q)jr} - 2ij(n-s)(m-q)\alpha^1_{(n-s)il}\beta^1_{(m-q)jr}\} B_1 +$$

$$+ \{[j^2(n+s)^2 + i^2(m+q)^2]\alpha_{(n+s)il}\beta_{(m+q)jr} - 2ij(n+s)(m+q) \times$$

$$\times \alpha^1_{(n+s)il}\beta^1_{(m+q)jr}\} C_1 + \{[j^2(n-s)^2 + i^2(m+q)^2]\alpha_{(n-s)il} \times$$

$$\times \beta_{(m+q)jr} - 2ij(n-s)(m+q)\alpha^1_{(n-s)il}\beta^1_{(m+q)jr}\} D_1 \underline{\underline{\|}},$$

gdzie A_1, B_1, C_1, D_1 określono wzorami (3.15),

$$\alpha_{(n+s)il} = \gamma_{(n+s)(i-l)} - \gamma_{(n+s)(i+l)},$$

$$\gamma_{(n+s)(i\mp l)} = 0 \qquad \text{dla} \quad (n+s)^2 \neq (i\mp l)^2,$$

$$\gamma_{(n+s)(i\mp l)} = \frac{1}{4} \qquad \text{dla} \quad (n+s)^2 = (i\mp l)^2 \neq 0,$$

$$\gamma_{(n+s)(i\mp l)} = \frac{1}{2} \qquad \text{dla} \quad (n+s) = (i\mp l) = 0.$$

$$\beta_{(m+q)jr} = \varkappa_{(m+q)(r-j)} - \varkappa_{(m+q)(r+j)},$$

$$\varkappa_{(m+q)(r\mp j)} = 0 \qquad \text{dla} \quad (m+q)^2 \neq (r\mp j)^2,$$

$$\varkappa_{(m+q)(r\mp j)} = \frac{\lambda}{4} \qquad \text{dla} \quad (m+q)^2 = (r\mp j)^2 \neq 0,$$

$$\varkappa_{(m+q)(r\mp j)} = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{dla} \quad (m+q) = (r\mp j) = 0.$$

$$\alpha_{(n-s)ll} = \gamma_{(n-s)(i-l)} - \gamma_{(n-s)(i+l)},$$

$$\gamma_{(n-s)(i\mp l)} = 0 \quad \text{dla} \quad (n-s)^2 \neq (i\mp l)^2,$$

$$\gamma_{(n-s)(i\mp l)} = \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad (n-s)^2 = (i\mp l)^2 \neq 0,$$

$$\gamma_{(n-s)(i\mp l)} = \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad (n-s) = (i\mp l) = 0.$$

$$\beta_{(m-q)jr} = \varkappa_{(m-q)(r-j)} - \varkappa_{(m-q)(r+j)},$$

$$\varkappa_{(m-q)(r\mp j)} = 0 \quad \text{dla} \quad (m-q)^2 \neq (r\mp j)^2,$$

$$\varkappa_{(m-q)(r\mp j)} = \frac{\lambda}{4} \quad \text{dla} \quad (m-q)^2 = (r\mp j)^2 \neq 0,$$

$$\varkappa_{(m-q)(r\mp j)} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{dla} \quad (m-q) = (r\mp j) = 0.$$

5. Obliczenia numeryczne i wnioski końcowe

W celu określenia zmienności przemieszczeń drgającej powłoki w czasie i zbadania cyklu granicznego rozwiązano numerycznie układ równań różniczkowych nieliniowych (4.4).

Zastosowano metodę Rungego-Kutta jako bardzo dokładną i dającą się stosunkowo łatwo zaprogramować dla elektronowych maszyn liczących. Oprócz tego ważną zaletą tej metody jest możliwość zastosowania zmiennego odstępu, co jest szczególnie ważne przy poszukiwaniu cyklu granicznego.

Numeryczne obliczenia wykonano na cyfrowej maszynie matematycznej GIER dla powłok duralowych ($E = 7{,}2 \cdot 10^9\,\mathrm{kG/m^2}$, $\nu = 0{,}3$, $\varrho_s = 285\,\mathrm{kG/sek^2/m^4}$).

W opływie na poziomie morza $a_0 = 340\,\mathrm{m/sek}$, $\varrho_0 = 0{,}125\,\mathrm{kG/sek^2/m^4}$. Przyjęto do obliczeń wydłużenie $\lambda = 1$, maksymalny wznios $\varepsilon = 0{,}08$ i stałe krzywizny w kierunku podłużnym i poprzecznym $k_x = k_z = 0{,}08$. Ponadto uwzględniono tłumienie materiałowe i przyjęto wartość $\theta = 0{,}2$. Obliczenia wykonano dla liczby Macha $\mathrm{M} = 3$ i dla wartości L/h przyjmowanych w konstrukcjach lotniczych.

Wyznaczono cykl graniczny dla ilości fal poprzecznych $m = 1$ oraz liczby fal podłużnych (w kierunku przepływu) $n = 4$. Wybór parametrów $\varepsilon = 0{,}08$ i $\mathrm{M} = 3$ jest podyktowany tym, że dla tego zestawu możemy stosować teorię potencjalnego przepływu w drugim przybliżeniu, nie wprowadzając błędu w stosunku do teorii skośnej fali uderzeniowej. Tłumienie materiałowe $\theta = 0{,}2$ jest typowym tłumieniem dla konstrukcji lotniczych, a poza tym nie można go pominąć ze względu na to, że wprowadza destabilizację układu w zakresie badanych parametrów. Obliczenie przeprowadzono dla wielkości typowych dla konstrukcji lotniczych, ponieważ w tej dziedzinie istnieje najwięcej ustaleń dotyczących drgań samowzbudnych typu flatteru.

Badanie przeprowadzono dla liczby fal podłużnych $n = 4$, gdyż za pomocą czterech wyrazów szeregu Fouriera można z dużą dokładnością aproksymować szeroką klasę

funkcji gładkich. Wartości rozwiązań niewiele zmieniają się, jeżeli wprowadzimy liczbę funkcji własnych większą od czterech.

Program napisany jest w języku GIER — Algol 4.

Rozwiązujemy n równań różniczkowych drugiego rzędu. Do programu włączona jest duńska procedura Mersno rozwiązująca z dowolną dokładnością n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

Program przystosowany jest do działania na pamięci szybkiej (operacyjna plus bęben).

Realizacja programu wymaga wprowadzenia z taśmy ośmiokanałowej następujących danych w kolejności:

n	liczba równań drugiego rzędu,
$y[1:2n]$	warunki początkowe na zmienne, a następnie na pochodne,
x	wartość początkowa czasu,
x^2	wartość czasu, od którego liczymy,
x^3	długość kroku,
x^4	końcowa wartość czasu,
M	liczba Macha,
L/h	stosunek długości powłoki do jej grubości,
k_x	krzywizna w kierunku podłużnym,
k_z	krzywizna w kierunku poprzecznym,
dok	dana dokładność.

Wyniki otrzymujemy na drukarce wierszowej w następującej kolejności: $A_1(t) \ldots A_n(t)$, $\dot{A}_1(t) \ldots \dot{A}_n(t)$. Są one punktem wyjściowym do obliczenia przemieszczenia $W(t)$ i prędkości przemieszczenia $\dot{W}(t)$ w każdym punkcie badanego obszaru powłoki. Na tej podstawie sporządzono wykresy na płaszczyźnie fazowej dla punktów o współrzędnych $x = 0{,}75$; $z = 0{,}5\lambda$ oraz $x = 0{,}25$; $z = 0{,}5\lambda$ (rys. 2, rys. 8) oraz wykresy zmienności funkcji $A_n(t)$ (rys. 4, 5, 6, 7).

Pokazano zmienność przemieszczeń w czasie na rys. 3 i rys. 9 dla wyżej wymienionych punktów.

Z podanych przebiegów należałoby wnioskować, że ustalenie się drgań samowzbudzonych następuje między siódmym a dziewiątym cyklem i dla danych parametrów, np. dla punktu $x = 0{,}75$, $z = 0{,}5$, maksymalne wychylenie przyjmuje wartość dziesięciokrotnie wyższą od danych wychyleń początkowych.

Obliczenia w zakresie rozważanego tematu wykonano dla założonych następujących warunków początkowych:

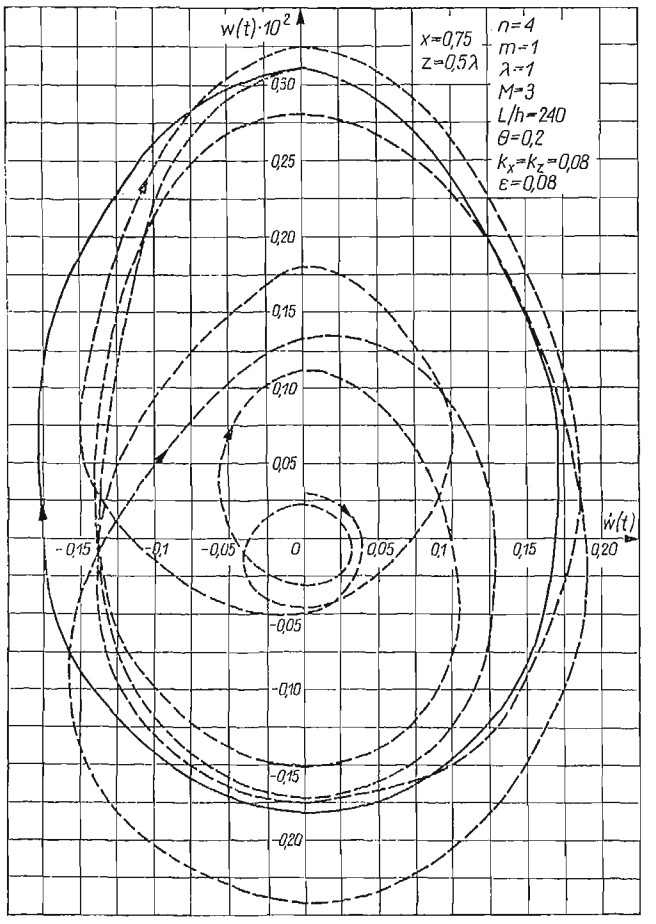
$$A_1(0) = 0{,}1 \cdot 10^{-2}, \quad A_2(0) = 0{,}08 \cdot 10^{-2},$$

$$A_3(0) = 0{,}06 \cdot 10^{-2}, \quad A_4(0) = 0{,}04 \cdot 10^{-2},$$

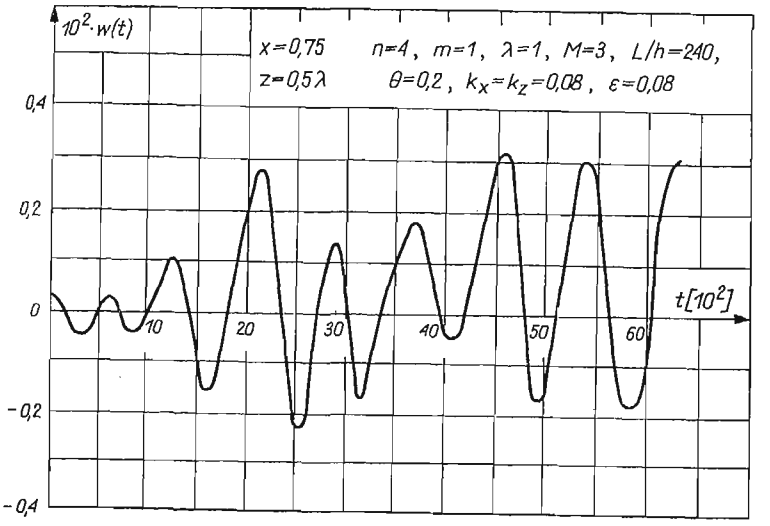
$$\dot{A}_n(0) = 0,$$

gdzie $n = 1, 2, 3, 4$, co daje dla punktu $x = 0{,}75$, $z = 0{,}5$ wartość wychylenia $W(0) = 0{,}03 \cdot 10^{-2}$, $\dot{W}(0) = 0$.

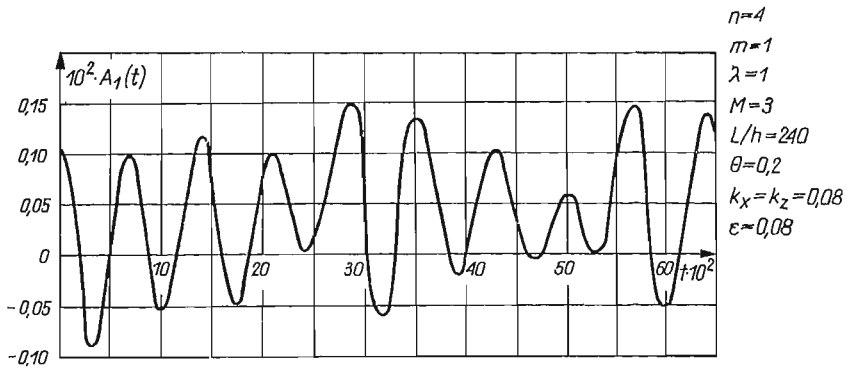
Obliczenia te mają na celu ustalenie charakteru zmian zachodzących w okresie ustalania się drgań samowzbudnych.


w(t)·10²
x=0,75
z=0,5λ
n=4
m=1
λ=1
M=3
L/h=240
θ=0,2
k_x=k_z=0,08
ε=0,08
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
-0,05
-0,10
-0,15
-0,20
-0,15
-0,1
-0,05
0
0,05
0,1
0,15
0,20
ẇ(t)

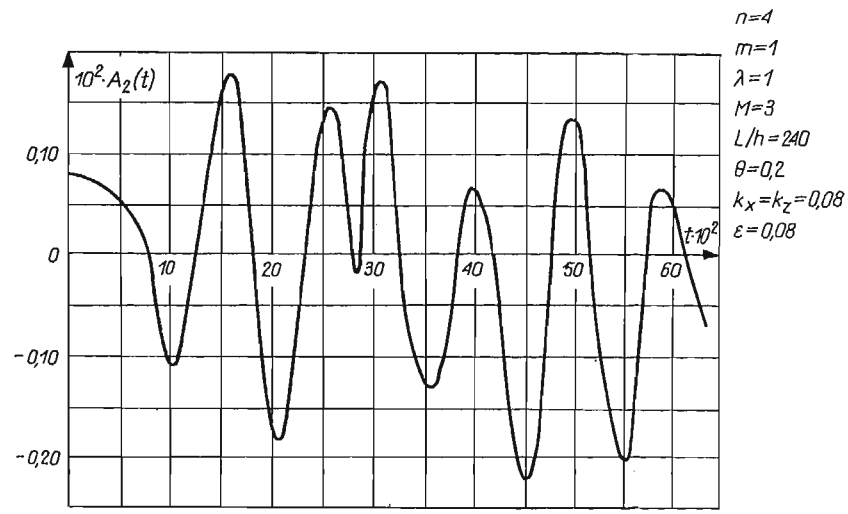
Rys. 2


10²·w(t)
x=0,75
z=0,5λ
n=4, m=1, λ=1, M=3, L/h=240,
θ=0,2, k_x=k_z=0,08, ε=0,08
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
10
20
30
40
50
60
t[10²]

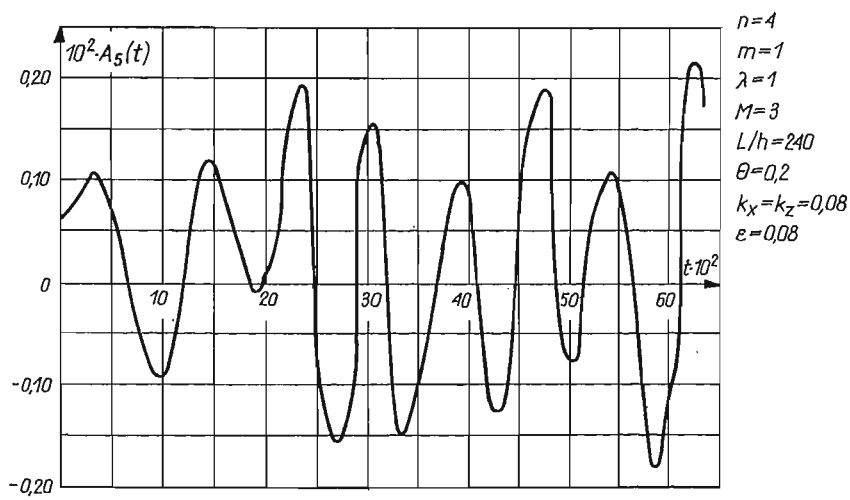
Rys. 3



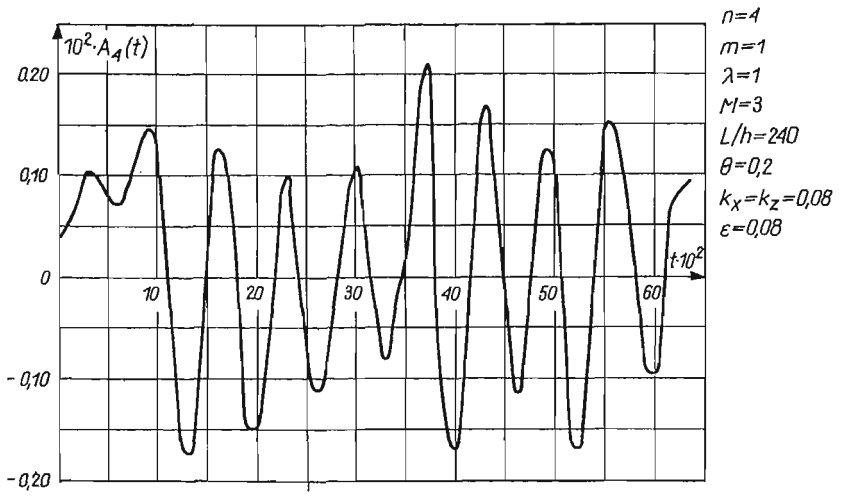
Rys. 4



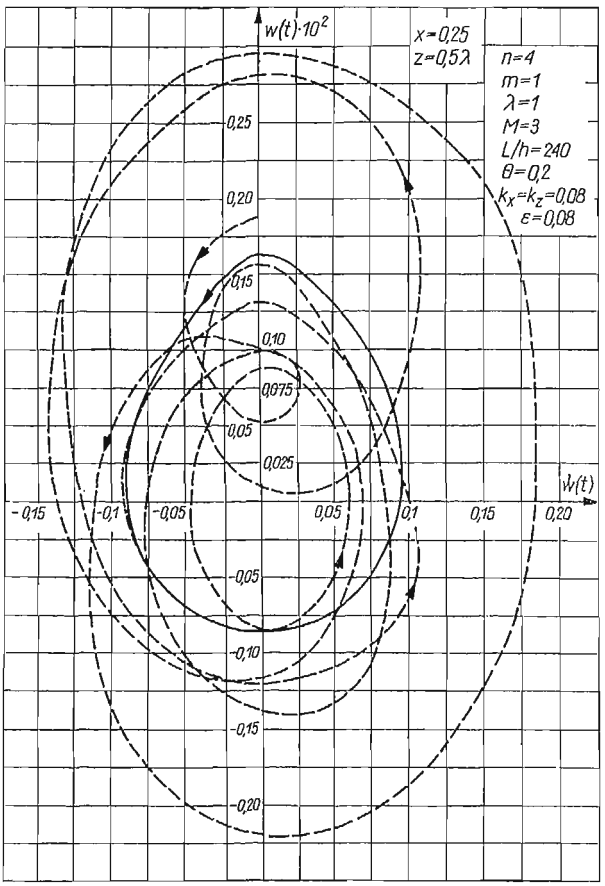
Rys. 5



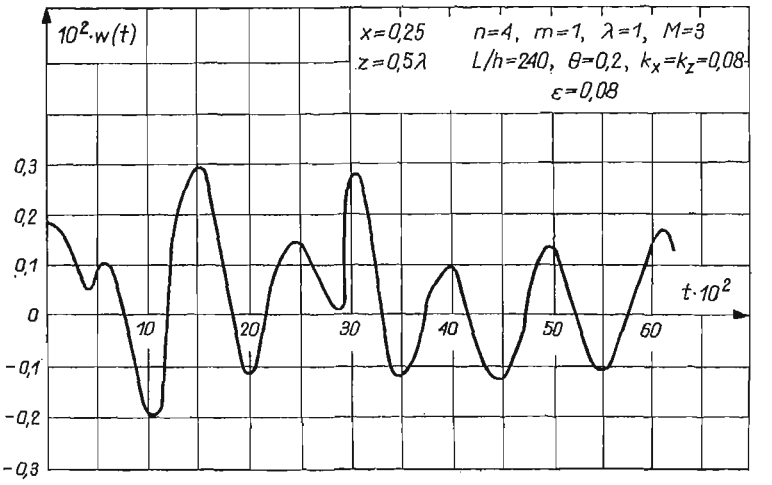
Rys. 6


$10^2 \cdot A_1(t)$
0,20
0,10
0
- 0,10
- 0,20
10
20
30
40
50
60
$t \cdot 10^2$
n=4
m=1
λ=1
M=3
L/h=240
θ=0,2
$k_x = k_z = 0,08$
ε=0,08

Rys. 7


$w(t) \cdot 10^2$
x=0,25
z=0,5λ
n=4
m=1
λ=1
M=3
L/h=240
θ=0,2
$k_x = k_z = 0,08$
ε=0,08
0,25
0,20
0,15
0,10
0,075
0,05
0,025
-0,05
-0,10
-0,15
-0,20
- 0,15
-0,1
-0,05
0,05
0,1
0,15
0,20
W(t)

Rys. 8



Rys. 9

Literatura cytowana w tekście

1. B. B. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва 1961.
2. Cz. Woźniak, *Nieliniowa teoria powlok*, PWN, Warszawa 1966.
3. Earl H. Dowell, *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate*, AJAA J., **4**, No. 7, 1966. — AJAA J. No. 10, 1967.
4. Z. Dżygadło, *Analiza drgań nieautonomicznych układów powierzchniowych w opływie naddźwiękowym*, Dodatek do Biul. WAT Nr 7 (191), Warszawa 1968.
5. M. Holt, S. L. Strack, *Supersonic Panel Flutter of a Cylindrical Shell of Finite Length*, J.A.S., No. 3, 1961.
6. M. D. Olson, Y. C. Fung, *Comparing Theory and Experiment for the Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*, AYAA J., No. 10, 1967.
7. L. L. Carter, R. O. Stearman, *Some Aspects of Cylindrical Shell Panel Flutter*, AYAA J., No. 1, 1968.
8. Z. Dżygadło, S. Kaliski, L. Solarz, E. Włodarczyk, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
9. N. W. McLachlan, *Równanie różniczkowe zwyczajne nieliniowe w fizyce i naukach technicznych*, PWN, Warszawa 1964.
10. B. P. Demidowicz, Y. A. Maron, E. Z. Szuwałowa, *Metody numeryczne*, cz. II, PWN, Warszawa 1965.
11. B. Gajl, *Pressure Acting on the Oscillating Surface of an Airfoil in Nonlinear Supersonic Potential Flow*, Proc. Vibr. Probl., Warsaw, 1, **9**, 1968.
12. B. Gajl, *La pression sur la surface vibrante de l'aile dans l'écoulement supersonique la deuxième approximator*, Fluid Dynamics Transactions, **4**, 191–201, 1969.

Резюме

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕЛИНЕЙНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В работе рассмотрены нелинейные задачи автоколебаний пологих оболочек конечной длины, в которых учитываются нелинейные аэродинамические явления и зависимость нестационарного

обтекания от параметров стационарного течения. Кроме того учитывается демпфирование, связанное с физическими свойствами материала оболочки, описываемого моделью Фойгта.

Решение для нормальных перемещений срединной поверхности оболочки представлено в виде двойного ряда по собственным функциям, для которого применен ортогонализационный метод Галеркина.

Дается численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сведенной к безразмерному виду.

Вычисления выполнены на ЭЦВМ. Найден предельный цикл для некоторых начальных условий. Показана зависимость от времени перемещений точек поверхности оболочки.

Summary

ANALYSIS OF NON-LINEAR SELFEXCITED LIMIT CYCLES OF VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS IN A NON-LINEAR SUPERSONIC FLOW

The subject of the present paper is the problem of nonlinear selfexcited vibrations of a shallow shell of finite length. Nonlinear aerodynamics is applied, the influence of stationary flow on the nonstationary flow as also material damping is taken into account.

Normal displacement of the shell is presented as a double series of eigenfunctions. To obtain the set of ordinary differential equations, Galerkin's ortogonalization method is applied. The set written in a non-dimensional form is solved numerically. Using a digital computer, the limit cycle under certain initial conditions is found. Variation of the displacements of the shell in time is also shown.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1973 r.