

## WYZNACZENIE SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE PRZEWODU AFL-8-525

ADAM BAR, JÓZEF NIZIOŁ (KRAKÓW)

Jednym z ważnych zagadnień zarówno przy projektowaniu, jak i montażu linii elektroenergetycznych jest znajomość naprężeń statycznych i dynamicznych w poszczególnych warstwach przewodu. Obydwa te naprężenia decydują o zmęczeniu przewodu, a zatem o «żywołności» danej linii. Na szczególne niebezpieczeństwo narażone są odcinki przewodów tuż przy uchwycie przelotowym, gdzie występuje stan giętny. Na skutek drgań przewodu, wywołanych wiatrem, występują zmienne naprężenia dynamiczne w przewodzie, które w sposób istotny wpływają na jego zmęczenie. Ze względu na ich charakter rozważa się drgania zwane «tańcem przewodów» oraz drgania «eolskie». Stwierdzono, że w warunkach polskich częściej występują drgania typu drgań «eolskich» i na nie jest zwrócona główna uwaga. O ważności problemu drgań przewodów w liniach najwyższych napięć może świadczyć fakt, że w krajach wysoko uprzemysłowionych powołane są instytuty i specjalne grupy robocze, prowadzące od wielu lat doświadczalne i teoretyczne badania, mające na celu ustalenie kryterium zmęczeniowego.

Na podstawie prowadzonych przez wiele lat badań przez Institute of Electrical and Electronics Engineers [1], ustalono jako kryterium trwałej wytrzymałości zmęczeniowej podwójną względną amplitudę przewodu w stosunku do uchwytu przelotowego równą  $a = 0,2$  mm, mierzoną w odległości  $x = 89$  mm od ostatniego punktu styczności przewodu z uchwytem (łódką).

Na intensywność drgań wpływa bardzo wiele czynników, jak warunki klimatyczne i terenowe, dane znamionowe linii, jak konstrukcja i rodzaj przewodu, rodzaj uchwytu, jego masa, kształt, moment bezwładności itp. Z tego też powodu kryterium amerykańskie okazało się zbyt surowe i w wielu krajach niemożliwe do przyjęcia. Od szeregu lat prowadzi się więc badania nad własnymi przewodami w Japonii, NRF, Francji i innych krajach zachodnich. Wyniki badań doświadczalnych zarówno laboratoryjnych, jak i przeprowadzanych na liniach rzeczywistych w różnych krajach były dość różne, rozważania zaś teoretyczne bądź nie były publikowane, bądź przyjmowały modele, które niezbyt właściwie odzwierciedlały stan faktyczny.

W Polsce od kilku lat badania prowadzi Biuro Projektów Energetycznych «Energoprojekt» Oddział w Krakowie, a pomiary drgań na liniach rzeczywistych w terenie «Energopomiar» w Gliwicach. Pomiary drgań na krajowych liniach rzeczywistych wykazały występowanie dużych podwójnych amplitud względnych osiągających wartości  $a = 1,2$  mm, a więc sześciokrotnie przekraczających amplitudy dopuszczalne według kryterium amery-

kańskiego. Świadczyłyby to o bardzo dużym zagrożeniu wszystkich linii najwyższych napięć i nakazywałyoby szybką ich wymianę. Biorąc pod uwagę fakt, że koszt jednego kilometra linii wynosi około miliona złotych, widzimy jak ważnym problemem jest ustalenie prawidłowego kryterium zmęczeniowego dla linii krajowych.

Od trzech lat do współpracy z Energoprojektem w Krakowie przystąpił Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej, ustalając programy badań doświadczalnych, czuwając nad ich realizacją oraz dając odpowiednie opracowania teoretyczne. Przedmiotem badań był przewód stalowo-aluminiowy typu ALF-8-525. Oprócz badań mających na celu ustalenie kryterium zmęczeniowego, prowadzono wiele badań dotyczących samotłumienia przewodu, sposobu wymuszania drgań mających na celu uzyskanie dużych amplitud względnych, doboru odpowiednich tłumików drgań itp.

Niniejsza praca ma na celu wyznaczenie sztywności przewodu oraz stanowi pierwszą część ogólniejszego opracowania, którego celem jest wyznaczenie naprężeń statycznych i dynamicznych przewodu w pobliżu uchwytu przelotowego i na tej podstawie ustalenie kryterium zmęczeniowego przewodu.

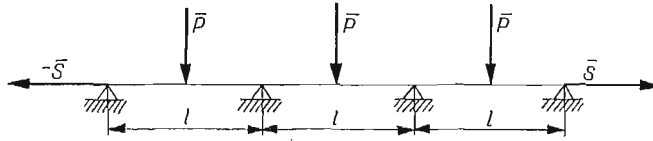
### 1. Wyznaczenie sztywności $EJ$ na zginanie przewodu AFL-8-525 — metoda statyczna

W obliczeniach stosowanych w technice traktowanie liny jako układu złożonego z poszczególnych drutów byłoby zbyt uczążliwe, a w przypadku drgań poprzecznych liny — praktycznie niemożliwe. Potraktujemy więc przewód jako ekwiwalentną belkę i w związku z powyższym musimy wyznaczyć dla niej pewne wartości przeciętne niektórych wielkości wytrzymałościowych. Jedną z istotniejszych dla naszego celu wielkości jest sztywność  $EJ$  przewodu na zginanie. Sztywność przewodów na zginanie była badana przez wielu badaczy zagranicznych ale zarówno sposoby podejścia, jak i uzyskiwane wyniki, wykazujące duże rozbieżności, budzą poważne zastrzeżenia.

Według obliczeń amerykańskich sztywność przewodów jest sumą sztywności poszczególnych drutów pomnożonych przez współczynnik 1,4 (otrzymywany doświadczalnie) [1]. Według badań fińskich wymieniony wyżej współczynnik równy jest 1,6 [2], innym znów razem jest znacznie większy od 2 (sztywność dla przewodu IBIS 1CSR,  $EJ = 200 \text{ Nm}^2$ ). Warunki, w których bada się dany przewód, powinny odpowiadać warunkom, w jakich pracuje on w rzeczywistości.

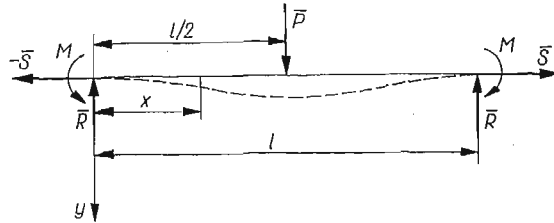
Wymienioną metodę statyczną oparto na prostej zależności między strzałką ugięcia belki poddanej pewnym obciążeniom a jej sztywnością na zginanie. Na odcinku pomiarowym o długości 20 m rozpięto poziomo usytuowany przewód poddany siłom rozciągającym, odpowiednio równym:  $S = 3000 \text{ kG}$ ,  $S = 3600 \text{ kG}$ ,  $S = 4000 \text{ kG}$ . Przewód ten podparty był na parzystej liczbie podpór (wypoziomowanych), symetrycznie rozmieszczonych względem jego środka. W środku między podporami obciążano każdy odcinek przewodu znaną siłą  $P$ . Rejestrowano strzałki ugięcia przewodu w środkowym przęśle  $f_1$  i w dwóch jego sąsiednich  $f_2$  i  $f_3$ . Pomiary powtarzano kilkakrotnie zmieniając dodatkowo wartości sił  $P$  (25 kG, 50 kG, 75 kG, 100 kG) oraz odległości między podporami  $l$  (0,7 m, 0,9 m, 1,4 m, 2 m, 3,1 m). Ideowy schemat stanowiska przedstawiono na rys. 1. Dość dużą długość przewodu  $l_1 = 20 \text{ m}$  przyjęto po to, aby wyeliminować wpływ zluźnienia drutów w przewodzie przy jego ucinaniu i zaprasowywaniu końcówek. Należy nadmienić,

że we wcześniejszych badaniach Energoprojekt, prowadzonych nieco inną metodą na przewodach bardzo krótkich, uzyskiwano duży rozrzut wyników. Złuznienia drutów były bardzo duże (zjawisko «pończochy») podobnie jak w badaniach zagranicznych. Wyniki te nie mogą być uważane za miarodajne.



Rys. 1

Ze względu na dużą liczbę podpór można przyjąć jako równoważny całemu przewodowi przedstawionemu na rys. 1 model belki przedstawiony na rys. 2, a obrazujący tylko środkowe przęśło układu. Pomiary strzałek \$f\_2\$ i \$f\_3\$ prowadzono w celu stwierdzenia słuszności przyjętego założenia. Wyniki pomiarów w zupełności potwierdziły to założenie.



Rys. 2

Ponieważ belka na podporach ułożona jest poziomo, więc

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = 0,$$

a zatem belka spełnia warunki belki utwierdzonej. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki przyjmuje postać:

$$(1.1) \quad EJ_s y'' = M + Sy - \frac{P}{2} x.$$

Rozwiązanie tego równania przy założeniu stałej sztywności \$EJ\$ jest następujące:

$$(1.2) \quad y = \frac{M}{a^2 EJ_s} \operatorname{ch}(ax) - \frac{P}{2a^3 EJ_s} \operatorname{sh}(ax) + \frac{P}{2a^3 EJ_s} x - \frac{D}{2a^3 EJ_s} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)},$$

gdzie

$$M = \frac{P}{2a} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)}, \quad a = \sqrt{\frac{S}{EJ_s}}.$$

Założenie stałej sztywności przewodu można uzasadnić w sposób następujący. Siły reakcji na podporach są nieduże w porównaniu z naciągiem  $S$  (wynika to z przyjętego modelu na rys. 2, gdzie maksymalna wartość siły  $P = 100$  kG, minimalny zaś naciąg  $S = 3600$  kG) i nie powodują dodatkowego zespolenia przewodu, a tym samym lokalnej zmiany sztywności  $EJ_s$ .

Strzałka ugięcia belki na podstawie (1.2) równa się

$$(1.3) \quad f_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2a^3 EJ_s} \left[ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right) + \frac{al}{2} - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)} \right].$$

Po dokonaniu przekształceń dostaniemy

$$(1.4) \quad f_1 = \frac{P}{aS} \left[ \frac{al}{4} - \operatorname{th}\left(\frac{al}{4}\right) \right].$$

Wprowadzając oznaczenie  $al/4 = z$ , otrzymujemy również

$$(1.5) \quad f_1 = \frac{Pl}{4S} \frac{1}{z} (z - \operatorname{th} z).$$

Równanie (1.5) jest równaniem przestępnym i jego ściśle rozwiązanie może nastęrczać duże kłopoty. Łatwo jednak zauważyć, że dla odpowiednio dużych  $z$  można przyjąć  $\operatorname{th} z \approx 1$ .

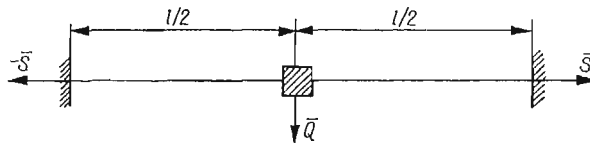
Przy założeniu  $\operatorname{th} z \approx 1$ , z równania (1.5) wyznaczamy

$$(1.6) \quad EJ_s = \frac{S}{16} \left( l - \frac{4S}{P} f_1 \right)^2.$$

Wzór powyższy może służyć do wyznaczania sztywności zastępczej przewodu na zginanie w przypadku, gdy nie występuje docisk pochodzący z zewnątrz, powodujący zespolenie przewodu.

## 2. Metoda dynamiczna

Metoda dynamiczna opiera się na zależności między częstością drgań belki a jej sztywnością na zginanie. Usytuowany poziomo przewód poddano jednemu z trzech wymienionych w p. 1 naciągów, a następnie za pomocą odpowiednich uchwytów przymocowano



Rys. 3

w dwu miejscach do fundamentu zapewniając warunki idealnego utwierdzenia. Przewód znajdujący się między uchwytami można było więc traktować jako belkę rozciągana siłą osiową  $S$  obustronnie utwierdzoną. Ponieważ częstości drgań belki (dla małych jej dłu-

gości) były bardzo wysokie i przebiegi drgań bardzo trudne do zarejestrowania, w środku belki umocowano dodatkowy ciężar (rys. 3). Belkę wytrącono z położenia równowagi i rejestrowano przebiegi drgań. Pomiary powtarzano kilkakrotnie dla różnych długości przewodu zarówno z ciężarkiem jak i bez ciężarka. Na podstawie pomiarów wyznaczono średnie okresy drgań przewodu przy różnych jego długościach.

Przy metodzie dynamicznej sztywności na zginanie  $EJ$  nie można już traktować jako stałej, ponieważ w miejscach utwierdzenia i w miejscu zamocowania ciężarka  $Q$  przewód jest bardzo ściśnięty, wskutek czego druty mocno przylegają do siebie, co wpływa na bardzo duży lokalny wzrost sztywności. Warunki te jednak odpowiadają stanowi rzeczywistemu utwierdzenia przewodu w uchwycie przelotowym.

Równanie różniczkowe drgań belki przyjmuje w tym przypadku postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością liniową przewodu.

Rozwiązanie tego równania jest więc niemożliwe ze względu na nieznajomość funkcji  $EJ(x)$ . Jeżeli założymy w przybliżeniu, że  $EJ = EJ_{sr} = \text{const}$ , to równanie, z którego można uzyskać częstość drgań własnych belki, przyjmie postać:

$$(2.2) \quad r_1^2 \text{th} r_2 l + r_2^2 \text{th} r_1 l - \frac{r_2^3}{r_1} \text{th} r_1 l - r_1 r_2 \text{th} r_1 l = 0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad r_1 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{S}{2EJ_{sr}}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho}{EJ_{sr}}} + \frac{S}{2EJ_{sr}}},$$

$$(2.4) \quad r_2 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{S}{2EJ_{sr}}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho}{EJ_{sr}}} - \frac{S}{2EJ_{sr}}},$$

$\omega$  zaś oznacza częstość kołową drgań własnych przewodu.

Rozwiązanie równania (2.2) i otrzymanie sztywności  $EJ_{sr}$  w funkcji częstości drgań  $\omega$  jest dla ogólnych danych niemożliwe. Częstość drgań przewodu wyznaczymy w oparciu o metodę Ritz'a.

Linie ugięcia belki przyjmiemy w postaci:

$$(2.5) \quad y = (l-x)^2 x^2.$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe dla belki obustronnie utwierdzonej. Maksymalna energia potencjalna układu równa się

$$(2.6) \quad U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [y'']^2 dx + \frac{1}{2} S \int_0^l [y']^2 dx,$$

maksymalna zaś energia kinetyczna przyjmie wartość

$$(2.7) \quad E_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho y^2 dx + \frac{1}{2} M \left[ y \left( \frac{l}{2} \right) \right]^2 \omega^2,$$

gdzie  $M$  jest masą ciężarka umocowanego na przewodzie. Przy obliczaniu całki (2.6) w miejsce  $EJ(x)$  podstawiamy  $EJ_{sr} = \text{const}$ .

Jeżeli odpowiednio dobrać sztywność średnią, to spełniony będzie warunek:

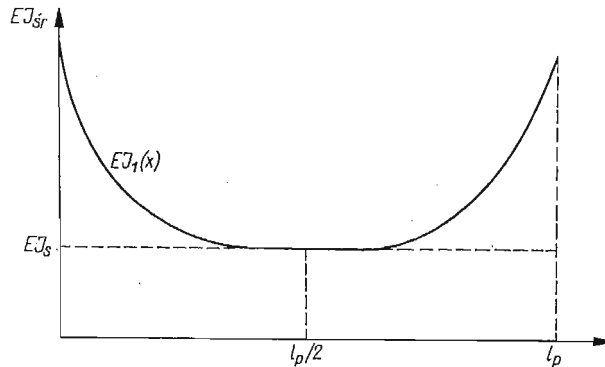
$$\int_0^l EJ(x)[y'']^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y'']^2 dx.$$

Z zależności  $E_{\max} = U_{\max}$  przy znajomości  $\omega^2$  można obliczyć  $EJ_{sr}$  (integralną zastępczą sztywność przewodu przy danej jego długości  $l$ ). Sztywność ta jest równa

$$(2.8) \quad EJ_{sr} = \omega^2 \frac{\int_0^l \rho y^2 dx + M \left[ y \left( \frac{l}{2} \right) \right]^2}{\int_0^l [y'']^2 dx} - S \frac{\int_0^l [y'']^2 dx}{\int_0^l [y'']^2 dx}.$$

Sztywność  $EJ_{sr}$  przewodu będzie zmieniać się wraz ze zmianą długości  $l$  badanego odcinka przewodu. Wynika to z zamocowania końców przewodu, co powoduje ściśnięcie drutów i wzrost sztywności w pewnym otoczeniu uchwytu. Wniosek ten znajduje dobre potwierdzenie na drodze doświadczalnej, co zostanie wykazane w przykładzie liczbowym.

Wpływ utwierdzenia na sztywność przewodu może mieć tylko charakter lokalny. Dla przewodu o dużej długości największa sztywność będzie tuż przy utwierdzeniu, a następnie będzie malała i od pewnej długości  $l_s$  będzie już stała i równa wyznaczonej sztywności statycznej.



Rys. 4

W przewodach linii rzeczywistych wysokiego napięcia właśnie w ten sposób będzie zmieniać się ich sztywność na zginanie. Sztywność taką nazwiemy «naturalną» sztywnością przewodu i ogólnie możemy zapisać ją w postaci:

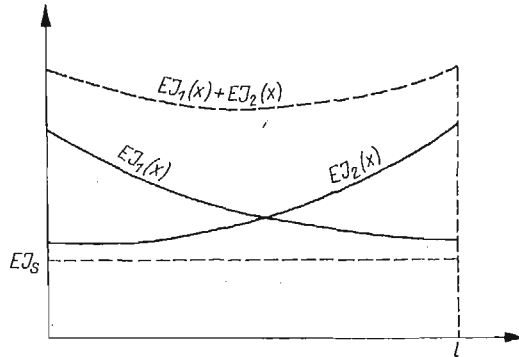
$$(2.9) \quad EJ(x) = \begin{cases} EJ_1(x) & \text{dla } 0 < x < l_s, \\ EJ_s & \text{dla } l_s < x < \frac{l_p}{2}, \end{cases}$$

gdzie przez  $l_p$  oznaczyliśmy rozpiętość pręśla (odległość między uchwytami przelotowymi).  $EJ(x)$  podana wzorem (2.9) jest funkcją symetryczną względem osi  $x = l_p/2$  (rys. 4).

Ze względu zarówno na wytrzymałość doraźną jak i zmęczeniową istotna jest dokładna znajomość charakterystyk wytrzymałościowych przewodu w pobliżu uchwytu przelotowego

czyli dla małych  $x$ . Z tego też powodu badania sztywności przewodu przeprowadzono przy małych odległościach między jego zamocowanymi końcami. Przy tak małych odcinkach, gdy  $l < 2l_s$ , pojawia się znowu dodatkowa trudność interpretacji uzyskanych wyników. Otóż na sztywność przewodu na całej jego długości wpływa równocześnie zamocowanie obydwu jego końców.

Weźmy pod uwagę  $l > 2l_s$ . Wówczas sztywność  $EJ(x)$  na odcinku  $0 < x < l_s$  nazwijmy przez  $EJ_1(x)$ , a sztywność na odcinku  $l-l_s \leq x < l$  — przez  $EJ_2(x)$  (rys. 4, w którym należałoby przyjąć  $l_p = l$ ). Oczywiście ze względu na jednakowy wpływ na sztywność przewodu utwierdzenia lewego i prawego brzegu, funkcja  $EJ_2(x)$  stanowi lustrzane odbicie funkcji  $EJ_1(x)$  względem prostej  $x = l/2$ .



Rys. 5

Jeżeli  $l < 2l_s$ , to nastąpi nakładanie się na siebie obu funkcji (rys. 5). Załóżmy, że sztywność  $EJ(x)$  wyraża się wzorem:

$$(2.10) \quad EJ(x) = EJ_1(x) + EJ_2(x).$$

W ogólnym przypadku  $EJ(x)$  jest jakąś funkcją  $EJ_1(x)$  oraz  $EJ_2(x)$ . Założenie (2.10) jest hipotetyczne i może być sprawdzone jedynie na drodze doświadczalnej.

Sztywność podaną wzorem (2.10) należy dobrać w ten sposób, aby spełniony był warunek:

$$(2.11) \quad \int_0^l EJ(x)[y''(x)]^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y']^2 dx.$$

Warunek taki powinien zachodzić dla każdego  $l$ .

Ponieważ  $EJ_{sr}$  wyznaczone jest na drodze doświadczalnej, więc (2.11) nie może być spełnione ściśle.  $EJ(x)$  dobieramy posługując się metodą najmniejszych kwadratów.

Przedstawimy  $EJ_1(x)$  w postaci wielomianu drugiego stopnia:

$$(2.12) \quad EJ_1(x) = \frac{1}{l_s^2} [(\sqrt{EJ_{max}} - \sqrt{EJ_s})x - l_s \sqrt{EJ_{max}}]^2 \quad \text{dla } 0 < x < l_s.$$

Ze względu na symetryczny wpływ zamocowań obu końców  $EJ_2(x)$  przyjmie postać:

$$(2.13) \quad EJ_2(x) = \frac{1}{l_s^2} [(\sqrt{EJ_{max}} - \sqrt{EJ_s})x + l_s \sqrt{EJ_s}]^2 \quad \text{dla } 0 < x < l_s.$$

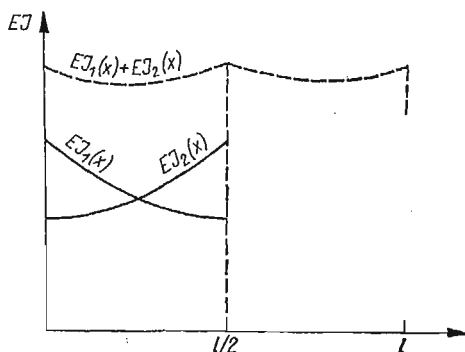
Po wstawieniu (2.12) do (2.11), otrzymamy

$$(2.14) \quad \int_0^l \left\{ \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) x - \sqrt{EJ_{\max}} \right]^2 + \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x + l_s - l) + \sqrt{EJ_s} \right]^2 \right\} [y'']^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y'']^2 dx.$$

Zależność ta jest słuszna przy  $l < l_s$ . Po scałkowaniu (2.14) i dokonaniu prostych przekształceń otrzymamy

$$(2.15) \quad -0,11905 \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 [\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}]^2 + EJ_{\max} \left[ 2 - 2 \frac{l}{l_s} + \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \right] + \\ + 2\sqrt{EJ_{\max} EJ_s} \frac{l}{l_s} \left( 1 - \frac{l}{l_s} \right) + EJ_s \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 = EJ_{sr}(l).$$

W przypadku, gdy w środku przewodu znajduje się ciężarek, jego umocowanie powoduje mocne ściśnięcie przewodu, a zatem wpływa na zmianę sztywności podobnie jak uchwyt stały. Należy uważać, że  $EJ_1(x)$  oraz  $EJ_2(x)$  brane są z przedziału  $0 < x < l/2$  (rys. 6).



Rys. 6

Ze względu na symetrię linii ugięcia przewodu  $y = y(x)$ , należy więc w miejsce warunku (2.14) przyjąć warunek następujący:

$$(2.16) \quad 2 \int_0^{l/2} \left\{ \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) x - \sqrt{EJ_{\max}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) \left( x + l_s - \frac{l}{2} \right) + \sqrt{EJ_s} \right]^2 \right\} [y'']^2 dx = 2EJ_{sr} \int_0^{l/2} [y'']^2 dx.$$



Stąd po scałkowaniu i dokonaniu prostych przekształceń dostaniemy

$$(2.17) \quad -0,0253 \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \left[ \sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s} \right]^2 + EJ_{\max} \left[ 2 - \frac{l}{l_s} + \frac{1}{4} \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \right] + \\ + \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} \frac{l}{l_s} \left( 1 - \frac{l}{2l_s} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 EJ_s = EJ_{sr}(l).$$

Zarówno  $EJ_{\max}$ , które równe jest sztywności przewodu dla  $x = 0$ , jak i  $l_s$  określające zasięg wpływu zamocowania na sztywność przewodu, nie można wyznaczyć na drodze doświadczalnej. Wielkości te potraktujemy jako parametry, które wyznaczymy za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Oznaczamy lewą stronę równania (2.15) przez

$$\varphi(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l).$$

Ponieważ znamy  $EJ_{sr}$  dla różnych wartości  $l = l_i$  (na podstawie eksperymentu można wyznaczyć dowolną ich ilość), dobieramy  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$  w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$(2.18) \quad \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)]^2 = \min.$$

Z warunku powyższego otrzymujemy układ równań:

$$(2.19) \quad \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)] \frac{\partial \varphi_i}{\partial EJ_{\max}} = 0, \\ \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)] \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_s} = 0.$$

W powyższym układzie równań zarówno  $EJ_s$ ,  $l_i$  jak  $EJ_{sr}(l_i)$  są znane, możemy więc wyznaczyć  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ .

Jeżeli lewą stronę (2.17) oznaczyć przez

$$f(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l),$$

to z warunku

$$\sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)]^2 = \min,$$

otrzymamy układ równań:

$$(2.20) \quad \sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)] \frac{\partial f_k}{\partial EJ_{\max}} = 0, \\ \sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)] \frac{\partial f_k}{\partial l_s} = 0.$$

Z układu tego można obliczyć  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ .

Pozornie może więc wydawać się, że mamy nadmiar równań (cztery równania — dwie niewiadome), co może prowadzić do sprzeczności. W rzeczywistości jednak tak nie jest.

Otóż jeżeli z układu równań (2.20) wyznaczmy  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ , to wstawiając je do układu (2.19) powinniśmy ten układ równań zamienić w tożsamości.

Jeżeli parametry  $EJ_{\max}$  i  $l_s$  wyznaczone z (2.20) będą znacznie odbiegać od parametrów wyznaczonych z (2.19), świadczyć to będzie o niesłuszności wzorów (2.10) i (2.16), które zostały przyjęte hipotetycznie.

### 3. Przykład liczbowy

Szywność statyczna przewodu wyznaczona została przy naciągu  $S = 3600$  kG, gdyż takie naciągi występują najczęściej w rzeczywistych liniach wysokiego napięcia. Wartości średnie uzyskane z badań doświadczalnych przy różnych wartościach siły  $P$  (25, 50, 75 i 100 kG) kilkakrotnie powtarzanych dla przewodu AFL-8-525 zestawiono w tabelcy 1.

Tablica 1

$l$ [m]	0,7	0,9	1,4	3,1
$EJ_s$ kGm <sup>2</sup>	13,2	13,35	12,38	12,4

Dane przedstawione w tej tabelcy potwierdzają słuszność założenia co do stałej szywności przewodu.

Metoda dynamiczna, jak już stwierdziliśmy, pozwala uwzględnić wpływ ściśnięcia przewodu przez uchwyt przelotowy na zmianę szywności.

Przy przyjęciu danych liczbowych  $S = 3600$  kG,  $qg = 1,93$  kG/m na podstawie (2.8) otrzymujemy

$$(3.1) \quad EJ_{sr} = 2,5 \cdot 10^{-6} [(0,61588l^4 + 80,1654Ql^3)f^2 - 9523,83601^2] \text{ [kGcm}^2\text{]},$$

gdzie  $f = \frac{1}{2\pi}\omega$  jest częstotliwością drgań wyznaczoną doświadczalnie dla danej długości  $l$ ,  $Q$  jest ciężarem zawieszonym na przewodzie [do wzoru (3.1) należy podstawić  $l$  w cm,  $Q$  w kG,  $f$  w Hz]. Wyniki szywności  $EJ_{sr}$  przedstawiono w tabelcy 2.

Tablica 2

$l$ [m]	$Q$ [kG]	$f$ [Hz]	$EJ_{sr}$ [kGm <sup>2</sup> ]
0,9	10	32,8	98,65
1,4	10	16,7	90,49
2	10	15,1	83,815
1,4	0	64,8	80,46
2	0	41	71,27

Z wyników podanych w tabelcy 2 widać, że szywność  $EJ$  zmienia się wraz z długością belki. Należy to, jak już wspomnieliśmy, wytłumaczyć wpływem zamocowania końców przewodu, które powoduje ściśnięcie drutów.

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia  $EJ_{\max}$  i  $l_s$  oraz sprawdzenia słuszności przyjętej hipotezy liniowej superpozycji sztywności [wzór (2.10)].

Pochodne cząstkowe występujące w równaniach (2.20) po odpowiednich przekształceniach równe są:

$$(3.2) \quad \frac{\partial f_k}{\partial EJ_{\max}} = 0,2247 \left( \frac{l_k}{l_s} \right)^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} \right) - \frac{l_k}{l_s} \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} \right) + 2,$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial f_k}{\partial l_s} = \frac{l_k^2}{l_s^3} [0,8988 \sqrt{EJ_{\max} EJ_s}] - 0,4494 (EJ_{\max} + EJ_s) + \frac{l_k}{l_s^2} [EJ_{\max} - \sqrt{EJ_{\max} EJ_s}].$$

Po wykorzystaniu wzorów (2.17), (3.2) i (3.3), układ równań (2.20) przyjmie postać:

$$(3.4) \quad 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} - 1,0263 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 1,0263 \frac{1}{l_s^4} EJ_s + \\ + 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_s \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} - 4,1561 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} + 6,3454 \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 2,5767 \frac{1}{l_s^3} EJ_s + \\ + 1,2891 \frac{1}{l_s^3} EJ_s \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} + 12,8151 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max} - 14,2932 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} + 6,4276 \frac{1}{l_s^2} EJ_s - \\ - \frac{1}{l_s^2} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} [0,182 EJ_{sr}(0,9) + 0,4404 EJ_{sr}(1,4) + 0,8988 EJ_{sr}(2)] + 11,9 \frac{1}{l_s} \sqrt{EJ_s EJ_{\max}} - \\ - 7,6 \frac{1}{l_s} EJ_{\max} - \frac{1}{l_s} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} [0,45 EJ_{sr}(0,9) + 0,7 EJ_{sr}(1,4) + EJ_{sr}(2)] - \frac{1}{l_s} [0,9 EJ_{sr}(0,9) + \\ + 1,4 EJ_{sr}(1,4) + 2 EJ_{sr}(2)] - 2 [EJ_{sr}(0,9) + EJ_{sr}(1,4) + EJ_{sr}(2)] + 12 EJ_{\max} = 0,$$

$$(3.5) \quad - 2,07 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max}^2 + 7,2783 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - \\ - 11,5521 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max} + 7,2801 \frac{1}{l_s^5} EJ_s \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - \\ - 1,207 \frac{1}{l_s^5} EJ_s + 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max}^2 - 23,2024 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} \times \\ \times \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} + 23,3485 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} EJ_s - 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_s \times \\ \times \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 10,3292 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max}^2 + 23,7096 EJ_{\max} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - \\ - 12,8548 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} EJ_s - \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} [0,728 EJ_{sr}(0,9) + \\ + 1,7616 EJ_{sr}(1,4) + 3,5952 EJ_{sr}(2)] + \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times [0,364 EJ_{\text{sr}}(0,9) + 0,8808 EJ_{\text{sr}}(1,4) + 1,7976 EJ_{\text{sr}}(2)] + \\
& + \frac{1}{l_s^3} EJ_s [0,364 EJ_{\text{sr}}(0,9) + 0,8808 EJ_{\text{sr}}(1,4) + 1,7976 EJ_{\text{sr}}(2)] + \\
& + 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}}^2 - 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}} \sqrt{EJ_{\text{max}} EJ_s} - \frac{1}{l_s^2} EJ_s \times \\
& \quad \times [0,9 EJ_{\text{sr}}(0,9) + 1,4 EJ_{\text{sr}}(1,4) + 2 EJ_{\text{sr}}(2)] + \\
& + \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\text{max}} EJ_s} [0,9 EJ_{\text{sr}}(0,9) + 1,4 EJ_{\text{sr}}(1,4) + 2 EJ_{\text{sr}}(2)] = 0.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzorów (3.4) i (3.5) danych liczbowych  $EJ_{\text{sr}}(0,9) = 98,65$ ,  $EJ_{\text{sr}}(1,4) = 90,49$ ,  $EJ_{\text{sr}}(2) = 83,815$ ,  $EJ_s = 12,84$ , otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad & 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\text{max}} - 3,6775 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\text{max}}} - 13,1775 \frac{1}{l_s^4} + \\
& + 47,7578 \frac{1}{l_s^4} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\text{max}}}} - 4,1561 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\text{max}} + 22,7374 \frac{1}{l_s^3} \times \\
& \quad \times \sqrt{EJ_{\text{max}}} - 33,0848 \frac{1}{l_s^3} + 59,3107 \frac{1}{l_s^3} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\text{max}}}} + \\
& + 12,8151 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}} - 51,2168 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\text{max}}} + 82,5303 \frac{1}{l_s^2} - \\
& - 475,6028 \frac{1}{l_s^2} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\text{max}}}} + 42,6412 \frac{1}{l_s} \sqrt{EJ_{\text{max}}} - 7,6 \frac{1}{l_s} EJ_{\text{max}} - \\
& - 686,3827 \frac{1}{l_s} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\text{max}}}} + 383,1008 \frac{1}{l_s} - 545,91 + 12 EJ_{\text{max}} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad & -2,07 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\text{max}}^2 + 26,0803 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\text{max}}^{3/2} - 148,3289 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\text{max}} + \\
& + 358,295 \frac{1}{l_s^5} \sqrt{EJ_{\text{max}}} - 198,9927 \frac{1}{l_s^5} + 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\text{max}}^2 - \\
& - 83,1458 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\text{max}}^{3/2} + 299,7947 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\text{max}} - 356,3025 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\text{max}}} + \\
& - 10,3292 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\text{max}}^2 + 84,9586 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\text{max}}^{3/2} - 591,4437 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\text{max}} - \\
& - 1908,2934 \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\text{max}}} + 266,2759 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\text{max}} + 3418,9825 \frac{1}{l_s^3} + \\
& + 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}}^2 - 30,8163 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}}^{3/2} - 383,101 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\text{max}} + 1372,7658 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\text{max}}} = 0.
\end{aligned}$$

Po rozwiązaniu przy użyciu maszyny cyfrowej układu równań (3.6) i (3.7) dostaniemy:

$$EJ_{\max} \approx 51 \text{ [kGm}^2\text{]}, \quad l_s = 2,9 \text{ [m]}.$$

Powyższe wartości parametrów powinny spełniać układ równań (2.19). Ponieważ doprowadzenie powyższego układu do postaci zawierającej konkretne współczynniki liczbowe jest bardzo czasochłonne [por. doprowadzenie do (3.5) i (3.6)], postąpimy nieco inaczej.

Podstawmy do wzoru (2.15)  $EJ_{\max} = 51 \text{ kGm}^2$ ,  $l_s = 2,9 \text{ m}$  i przyjmijmy  $l = 1,4 \text{ m}$  oraz  $l = 2 \text{ m}$ . Po wykonaniu obliczeń dostaniemy

$$EJ_{sr}(1,4) = 79,692 \text{ kGm}^2, \quad EJ_{sr}(2) = 72,646 \text{ kGm}^2.$$

Wyznaczone doświadczalnie odpowiednie sztywności są równe:

$$EJ_{sr}(1,4) = 80,46 \text{ kGm}^2, \quad EJ_{sr}(2) = 71,27 \text{ kGm}^2.$$

Z powyższego wynika, że przyjęta aproksymacja sztywności przewodu jest poprawna. Ostatecznie można więc sztywność przewodu (mierzoną w  $\text{kGm}^2$ ) przyjąć w postaci:

$$EJ(x) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2,9} (\sqrt{51} - \sqrt{12,84})x - \sqrt{51} \right]^2 & \text{dla } x < 2,9, \\ 12,84 & \text{dla } x \geq 2,9. \end{cases}$$

#### 4. Zakończenie

Sztywność przewodu AFL-8-525 jest znacznie większa od sumy sztywności poszczególnych drutów. Sztywność ta znacznie wzrasta przy zbliżaniu się do uchwytu przelotowego. Dzięki zaproponowanej metodzie można znaleźć sztywność przewodu tuż przy nakładce oraz zasięg wpływu zaciśnięcia przewodu w uchwycie na zmianę jego sztywności. Mając wyznaczoną sztywność  $EF$  przewodu na rozciąganie (wyznaczoną w r. 1971 metodą pomiaru prędkości rozchodzenia się fali) oraz sztywność  $EJ$  na zginanie, można przewód traktować jako ekwiwalentną belkę i stosunkowo prosto wyznaczyć naprężenia w zewnętrznej warstwie przewodu.

Szczególnie ważnym problemem jest wyznaczenie naprężeń w obszarze uchwytu przelotowego, gdzie jak wiadomo najczęściej występuje zniszczenie przewodu na skutek zmęczenia. Problem wyznaczenia naprężeń dynamicznych, wynikłych na skutek drgań, utrudnia fakt istnienia współpracy przewodu z łódką uchwytu przelotowego. Naprężenia te zostały wyznaczone przez autorów niniejszego opracowania i potwierdzone badaniami doświadczalnymi na przewodach rzeczywistych.

Metoda obliczania naprężeń w warstwie zewnętrznej przewodu z uwzględnieniem jego współpracy z łódką uchwytu przelotowego stanowić będzie, jak już wspomnieliśmy na wstępie, zasadniczą część ustalenia kryterium zmęczeniowego przewodu AFL-8-525.

#### Literatura cytowana w tekście

1. *Standardization of Conductor Vibration Measurements*, IEE Committee Report, 1966.
2. TAPANI SEPPÄ, *Effect of Various Factors on Vibration Fatigue Life of ACSR „IBIS”*, Helsinki 1969.
3. ROLF HELMS, *Zur Sicherheit der Hochspannungsfreileitungen bei hoher mechanischer Beanspruchung*, Berlin 1964.

4. *Sprawozdanie z laboratoryjnych badań drgań przewodu AFL-8-525*, «Energoprojekt» O/Kraków, X-40580, 1971 r.
5. *Wyniki badań zmęczeniowych przewodu AFL-8-525*, «Energoprojekt» O/Kraków X-44832, 1972.

## Р е з ю м е

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЁСТКОСТИ ИЗГИБА КАБЕЛЯ АФЛ-8-525

Представлен теоретико-экспериментальный метод определения жёсткости на изгиб энергетического кабеля. Кабель рассматривается как эквивалентная балка, для которой, по форме её изгиба, определяется статическая жёсткость при изгибе. Влияние закрепления каната в пролётной державке на изменение его жёсткости в области державки определено динамическим путём на основании измерений частот колебаний кабеля, закреплённого на некотором участке.

Дан способ оценки жёсткости в месте закрепления и рассмотрены пределы влияния закрепления на изменения жёсткости кабеля. Обнаружено, что изгибная жёсткость кабеля уменьшается вместе с увеличением расстояния от точки закрепления по параболическому закону и затем принимает постоянную величину, равную величине статической жёсткости.

## S u m m a r y

## DETERMINATION OF THE BENDING RIGIDITY OF A AFL-8-525 CONDUCTOR

In this paper is given the theoretical — experimental method of determining the bending rigidity of conductors of electrical lines. The conductor is replaced with an equivalent beam the deflection of which can easily be determined. On this basis, static rigidity of the conductor is determined. Influence of the conductor's clamping in a holder on the change of the stiffness (in the region of this holder) is determined by the dynamical method. Measurements data concerning beam's vibrations are given for the conductor clamped segment. The stiffness in the region of clamping and its influence on the change of the conductor rigidity is estimated. Bending stiffness of the conductor decreases parabolically with the distance from the region of clamping, and next it becomes constant and equal to the static stiffness.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1973 r.*

---