

ZASTOSOWANIE GRAFÓW I LICZB STRUKTURALNYCH DO WYZNACZANIA RÓWNAŃ CHARAKTERYSTYCZNEGO I WIDMA CZĘSTOŚCI

JÓZEF WOJNAROWSKI, ANDRZEJ BUCHACZ (GLIWICE)

1. Wstęp

Jednym z głównych celów analizy układów mechanicznych jest określenie równania charakterystycznego i widma częstotliwości. Znane klasyczne metody dotyczące tego problemu [7, 13, 14, 21, 60] oparte są na ustaleniu równań różniczkowych ruchu układu i przez to wymagają szeregu przekształceń. Wykorzystanie grafów biegunowych i liczb strukturalnych umożliwi pominięcie tego etapu, a więc znacznie upraszcza samą analizę. W takim przypadku układ opisujemy funkcjonalnym modelem i grafem biegunowym [20, 24, 52, 53]. Wprowadzając pojęcie węzła i krawędzi jako reprezentację zmiennej i zależności funkcyjnej, MASON zapoczątkował teorię grafów przepływu sygnałów [28]. Od tego czasu szereg autorów zajmowało się rozwijaniem twierdzeń i reguł metody grafów [46, 47, 34, 41, 6, 19, 61]. Zastosowania grafów do opisu układów elektrycznych i elektromechanicznych zawarte są w pracach [43, 27, 42, 24, 20]. Związek między grafem przepływu sygnałów i grafem biegunowym można znaleźć w [29]. Warto podkreślić, że ostatnio pojawiają się też prace, w których omawiane są nowe zastosowania grafów [15, 40, 49, 18, 51, 58, 57], a także wprowadzane są inne typy grafów, jak np. graf sprzężeń (*bond graph*, *граф связей*) [22, 26].

Zauważmy, że szczególne miejsce w teorii grafów zajmuje pojęcie drzewa i zbioru drzew [6, 19]. Jeśli bowiem przypomnimy, że zbiór drzew zawiera pełną informację o wyznaczniku grafu, to modelowanie liniowych układów fizycznych grafami determinuje poszukiwanie metod i algorytmów generowania drzew.

Już w pracach KIRCHHOFFA [23]¹⁾ i CAYLEYA [8]¹⁾ sformułowano metody wyznaczania drzew sieci elektrycznej. Rozwijane w ostatnim dwudziestolecu zastosowania grafów w analizie i syntezy układów fizycznych, a głównie w sieciach elektrycznych i elektronicznych, wpłynęły na opracowywanie różnorodnych algorytmów wyznaczania zbioru drzew [2, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 25, 30, 31, 32, 35, 37, 39, 48].

W ostatnich latach zaczęto również algebraizować metody dotyczące przekształceń grafów poprzez zastosowanie liczb strukturalnych [3, 59]. W szczególności należy wyróżnić pracę BELLERTA i WOŹNIAKIEGO [4], w której podano podstawy algebry liczb strukturalnych w zastosowaniu do analizy i syntezy układów elektrycznych.

Rozwinięcie metod liczb strukturalnych i wykorzystanie maszyn cyfrowych do ich generowania podano w pracach [44, 45, 33, 38, 55]. W pracy [1] zastosowano liczby strukturalne do wyznaczania reakcji układu mechanicznego na wymuszenie kinematyczne.

¹⁾ Cytujemy za [18].

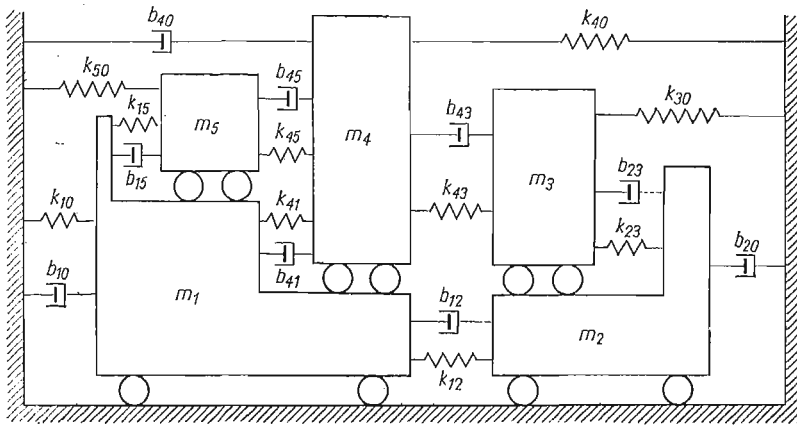
Algorytm analizy w sensie wyznaczania widma częstości oraz zastosowanie liczb strukturalnych do syntezy układów mechanicznych z elementami VOIGTA można znaleźć w pracach [50, 54, 55]. Zastosowanie liczb strukturalnych do modyfikacji własności dynamicznych liniowych układów mechanicznych podano w pracach [56, 57].

W niniejszej pracy przedstawiono zastosowania grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania równania charakterystycznego. U podstaw metod topologicznych leży związek między zbiorem drzew grafu a jego wyznacznikiem [36, 43, 9]. W tym sensie zastosowano niektóre elementy przekształceń grafów i generowania drzew. Prezentowane metody zilustrowano na przykładach dyskretnych liniowych układów mechanicznych.

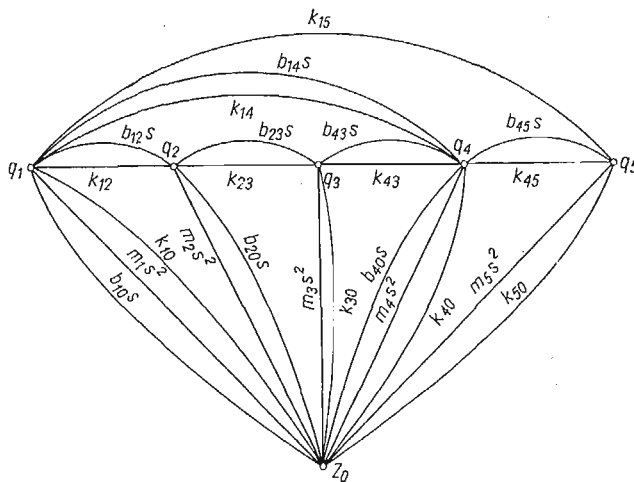
2. Wprowadzenie

Rozważmy dyskretny układ mechaniczny o 5 stopniach swobody (rys. 1).

Napisanie równań różniczkowych ruchu rozważanego układu a następnie otrzymanie równania charakterystycznego jest dość pracochłonne. Natomiast graf biegunowy (rys. 2),



Rys. 1



Rys. 2

który można otrzymać wprost z układu mechanicznego upraszcza ten proces i stanowi punkt wyjścia do analizy postawionego problemu [20, 24, 52, 53]. Ponadto w sposób wyraźny uwidacznia relacje pomiędzy poszczególnymi członami. Należy podkreślić, że przy konstruowaniu grafu biegunowego wykorzystujemy sformalizowane pojęcie członu, które jednoznacznie prowadzi do matematycznego modelu układu dynamicznego jako pewnego operatora przekształcającego dane wejściowe w wyjściowe.

3. Wyznaczenie równania charakterystycznego metodą grafów i liczb strukturalnych

Zgodnie z zasadą MAXWELLA [43] równanie charakterystyczne przyjmuje postać

$$(1) \quad \Delta(s^2) = \Delta G = \sum_{k=1}^t Z_k = 0,$$

gdzie $\Delta(s^2) = \Delta G$ oznacza wyznacznik grafu, $Z_k = \prod_{i=1}^{m_k} z_{ki}$ — impedancję drzewa grafu, m_k — liczbę krawędzi k -tego drzewa, z_{ki} — impedancję przyporządkowaną i -tej krawędzi drzewa k , t — liczbę wszystkich drzew grafu, s — argument przekształcenia Laplace'a. Ponieważ impedancje, czyli ilorazy zmiennych symetrycznych, są stałe w dowolnej chwili czasowej, więc równanie charakterystyczne (1) jako suma iloczynów tych stałych wielkości jest niezmiennikiem dla analizowanego układu dynamicznego.

W rozumieniu równania (1) zagadnienie wyznaczania równania charakterystycznego sprowadza się do obliczenia wyznacznika grafu, który można otrzymać:

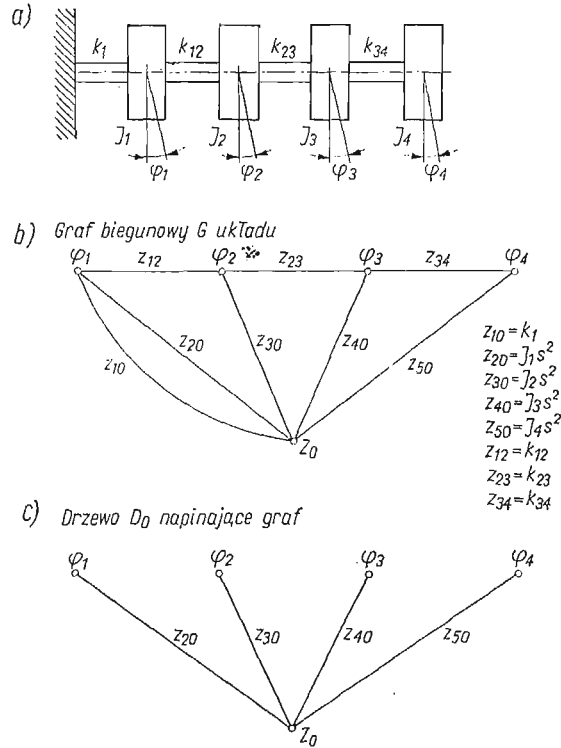
- metodą redukcji grafu według drzewa napinającego,
- metodą rozwinięcia według elementarnych łańcuchów,
- metodą przecięć grafu,
- metodą liczb strukturalnych.

3.1. Otrzymanie równania charakterystycznego metodą redukcji grafu według drzewa napinającego. Algorytm redukcji grafu przy wykorzystaniu rozwinięcia według drzewa D_0 napinającego graf [41, 43, 52] prowadzi do równania charakterystycznego o następującej postaci:

$$(2) \quad \Delta(s^2) = \Delta G(D_0) + \sum_{1 \leq i \leq k} z_{ki} \Delta G(D_0, s_i) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq k} z_{kj} z_{ki} \Delta G(D_0, s_i, s_j) + \dots + \prod_{1 \leq i \leq k} z_{ki},$$

gdzie $\Delta G(D_0)$ oznacza wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0 , $z_{ki}, z_{kj}, \dots, z_{kr}$ — impedancję krawędzi $s_i, s_j \dots$ drzewa D_0 , $r = n - 1$ — liczbę wierzchołków bez ogólnego bieguna Z_0 , $\Delta G(D_0, s_i)$ — wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0 i krawędzią s_i po koincydencji wierzchołka, który ta krawędź łączyła z biegunem Z_0 , $\Delta G(D_0, s_i, s_j)$ — wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0 i krawędziami s_i, s_j po koincydencji wierzchołków, które te krawędzie łączyły z biegunem Z_0 itd., $\Delta G(D_0, s_i \dots s_r) = 1$ — wyznacznik podgrafu zredukowanego do punktu.

Zastosowanie tej metody zilustrujemy na przykładzie układu drgającego o 4 stopniach swobody (rys. 3a). W tabelicy 1 przedstawiono algorytm redukcji grafu [równanie (2)] dla przykładu pokazanego na rys. 3.



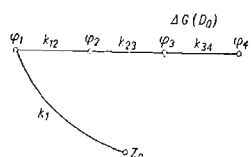
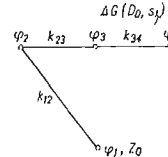
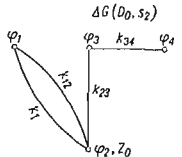
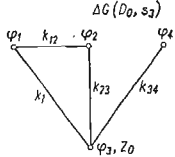
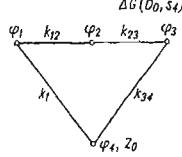
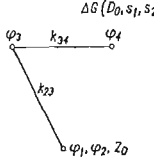
Rys. 3

Zgodnie z tabelicą 1 równanie charakterystyczne będące wprost równaniem częstotliwości jest następujące:

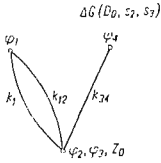
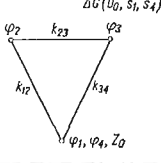
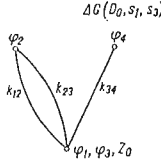
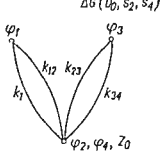
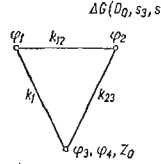
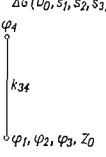
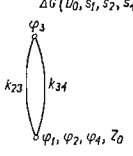
$$\begin{aligned}
 (3) \quad & J_1 J_2 J_3 J_4 \omega^8 - \omega^6 [J_2 J_3 J_4 (k_1 + k_{12}) + J_1 J_3 J_4 (k_{12} + k_{23}) + \\
 & + J_1 J_2 J_4 (k_{23} + k_{34}) + J_1 J_2 J_3 k_{34}] + \omega^4 [J_3 J_4 (k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1) + \\
 & + J_2 J_4 (k_1 + k_{12}) (k_{23} + k_{34}) + J_2 J_3 (k_1 + k_{12}) k_{34} + \\
 & + J_1 J_4 (k_{12} k_{23} + k_{23} k_{34} + k_{34} k_{12}) + J_1 J_3 (k_{12} + k_{23}) k_{34} + \\
 & + J_1 J_2 k_{23} k_{34}] - \omega^2 [J_4 (k_1 k_{12} k_{23} + k_{12} k_{23} k_{34} + k_{23} k_{34} k_1 + k_{34} k_1 k_{12}) + \\
 & + J_3 (k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1) k_{34} + J_2 (k_1 + k_{12}) k_{23} k_{34} + \\
 & + J_1 k_{12} k_{23} k_{34}] + k_1 k_{12} k_{23} k_{34} = 0.
 \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że przedstawiony algorytm pozwala uzyskać równanie charakterystyczne wprost według rosnących potęg częstotliwości.

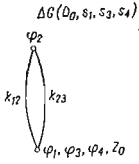
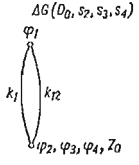
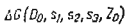
Tablica 1

Iloczyn impedancji gałęzi drzewa $D_0 \cdot z_{kl}$	Numery koincydentnych wierzchołków φ_l, Z_0	Podgraf po usunięciu drzewa D_0 i krawędzi s_1, \dots, s_r $G_i(D_0, s_1, \dots, s_r)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G_i(D_0, s_1, \dots, s_r)$
1	2	3	4
—	—		$k_1 k_{12} k_{23} k_{34}$
$J_1 s^2$	φ_1, Z_0		$k_{12} k_{23} k_{34}$
$J_2 s^2$	φ_2, Z_0		$(k_1 + k_{12}) k_{23} k_{34}$
$J_3 s^2$	φ_3, Z_0		$(k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1) k_{34}$
$J_4 s^2$	φ_4, Z_0		$k_1 k_{12} k_{23} + k_{12} k_{23} k_{34} + k_{23} k_{34} k_1 + k_{34} k_1 k_{12}$
$J_1 J_2 s^4$	$\varphi_1, \varphi_2, Z_0$		$k_{23} k_{34}$

c.d. tablicy 1

1	2	3	4
$J_1 J_3 s^4$	$\varphi_1, \varphi_3, Z_0$		$(k_{12} + k_{23})k_{34}$
$J_1 J_4 s^4$	$\varphi_1, \varphi_4, Z_0$		$k_{12}k_{23} + k_{23}k_{34} + k_{34}k_{12}$
$J_2 J_3 s^4$	$\varphi_2, \varphi_3, Z_0$		$(k_1 + k_{12})k_{34}$
$J_2 J_4 s^4$	$\varphi_2, \varphi_4, Z_0$		$(k_1 + k_{12})(k_{23} + k_{34})$
$J_3 J_4 s^4$	$\varphi_3, \varphi_4, Z_0$		$k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1$
$J_1 J_2 J_3 s^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, Z_0$		k_{34}
$J_1 J_2 J_4 s^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, Z_0$		$k_{23} + k_{34}$

c.d. tablicy 1

1	2	3	4
$J_1 J_3 J_4 s^6$	$\varphi_1, \varphi_3, \varphi_0,$ φ_4, Z_0		$k_{12} + k_{23}$
$J_2 J_3 J_4 s^6$	$\varphi_2, \varphi_3,$ φ_4, Z_0		$k_1 + k_{12}$
$J_1 J_2 J_3 J_0 s^8$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,$ φ_4, Z_0		1

3.2. Otrzymanie równania charakterystycznego metodą rozwinięcia według elementarnych łańcuchów. Rozwijając graf na elementarne łańcuchy [43] wyznacznik grafu przyjmie postać :

$$(4) \quad \Delta G = \sum_{i=1}^v Z_i \Delta G(Z_i),$$

gdzie Z_i oznacza impedancję i -tego elementarnego łańcucha łączącego dwa dowolnie wybrane wierzchołki φ_r, φ_s ²⁾, $\Delta G(Z_i)$ — wyznacznik podgrafu otrzymanego przez koincydencję wszystkich wierzchołków i -tego elementarnego łańcucha, v — wszystkie elementarne łańcuchy grafu.

W tablicy 2 pokazano zastosowanie metody rozwinięcia na elementarne łańcuchy dla układu mechanicznego przedstawionego na rys. 3. Wykonując sumowanie zgodnie ze wzorem (4) uzyskujemy równanie częstości (3).

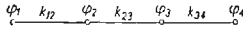
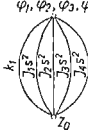
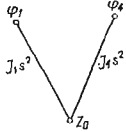
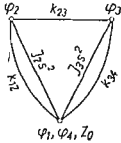
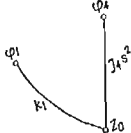
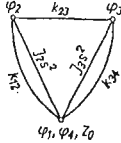
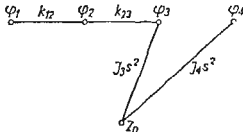
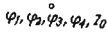
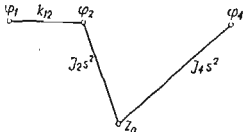
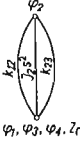
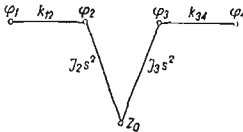
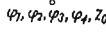
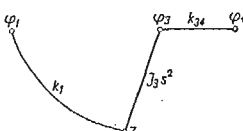
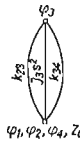
3.3. Wyznaczenie równania charakterystycznego metodą przecięć grafu. W przypadku bardziej złożonych układów efektywną staje się metoda przecięć grafu [17, 53]. Skończony zbiór impedancji Z wszystkich t drzew grafu m_k — argumentowych impedancji k -tego drzewa określa zależność

$$(5) \quad \{Z\} = \frac{\partial^{j-1}(Z' \times Z'')_I}{\partial(z'_{12} \cup z''_{12}) \partial(z'_{23} \cup z''_{23}) \dots \partial(z'_{j-1,j} \cup z''_{j-1,j})},$$

gdzie $Z' \times Z''$ oznacza iloczyn kartezjański zbiorów impedancji gałęzi drzew podgrafów G' i G'' , $z'_{rs} \cup z''_{rs}$ — zbiór impedancji podgrafu, otrzymanego jako suma zbiorów impedancji

²⁾ Najlepiej tak wybierać wierzchołki φ_r, φ_s , aby w zbiorze elementarnych łańcuchów było jak najwięcej drzew grafu G .

Tablica 2

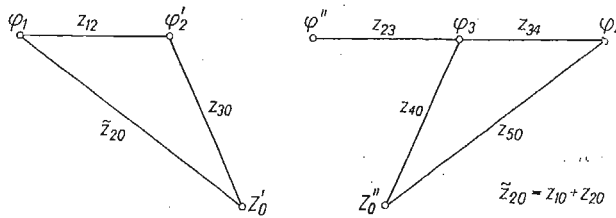
Elementarny łańcuch (φ_r, φ_s) rozpięty na wierzchołkach φ_1 i φ_4	Impedancja elementarnego łańcucha	Podgraf otrzymany po koincydencji wierzchołków i -tego łańcucha $G(Z_i)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G(Z_i)$
1	2	3	4
	$k_{12}k_{23}k_{34}$		$k_1 + J_1s^2 + J_2s^2 + J_3s^2 + J_4s^2$
	$J_1J_4s^4$		$(k_{12} + J_2s^2)k_{23} + k_{23}(J_3s^2 + k_{34}) + (J_3s^2 + k_{34}) \times (J_2s^2 + k_{12})$
	$k_1J_4s^2$		$(k_{12} + J_2s^2)k_{23} + k_{23}J_3s^2 + k_{34} + (J_3s^2 + k_{34}) \times (J_2s^2 + k_{12})$
	$k_{12}k_{23}J_3J_4s^4$		<p>1</p>
	$J_2J_4s^4k_{12}$		$k_{23} + J_3s^2 + k_{34}$
	$k_{12}J_2J_3s^4k_{34}$		<p>1</p>
	$k_1J_3s^2k_{34}$		$k_{12} + J_2s^2 + k_{23}$

c.d. tablicy 2

1	2	3	4
	$J_1 J_3 s^4 k_{34}$		$k_{12} + J_2 s^2 + k_{23}$
	$k_1 J_2 s^2 k_{23} k_{34}$		<p>1</p>
	$J_1 J_2 s^4 k_{23} k_{34}$		<p>1</p>

krawędzi łańcuchów $z'_{r,s}$ i $z''_{r,s}$ pomiędzy rozciętymi wierzchołkami, j — liczbę wierzchołków, poprzez które dokonano rozcięcia grafu G .

W celu zilustrowania podanych wyżej rozważań wyznaczmy równanie charakterystyczne omawianego już układu.



Rys. 4

- 1° Rozcinamy graf G (rys. 3b) na dwa podgrafy (rys. 4).
- 2° Znajdujemy bezpośrednio³⁾ zbiory impedancji gałęzi drzew w podgrafach G' i G''

$$Z' = \{ \{z_{12}, z_{30}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}\} \},$$

$$Z'' = \{ \{z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{z_{40}, z_{50}, z_{23}\} \}.$$

3° Dla tak rozciętego grafu G wyznaczamy zbiory impedancji $z'_{r,s}$, $z''_{r,s}$ pomiędzy rozciętymi wierzchołkami. W rozważanym przypadku mamy

$$z'_{12} = \{z_{30}\}, \quad z''_{12} = \{z_{23}, z_{40}\},$$

³⁾ Gdy podgrafy G' i G'' są bardziej złożone wówczas rozcinamy je dalej na G'_1 i G''_2 itd., a zbiory impedancji drzew dla nich wyznaczamy ze wzoru (5).

wobec czego

$$z'_{12} \cup z''_{12} = \{z_{30}, z_{23}, z_{40}\},$$

gdzie \cup jest sumą zbiorów. Ponieważ $j = 2$, to

$$\{Z\} = \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial\{z_{30}, z_{23}, z_{40}\}}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\{z_{rs}\}} = \frac{\partial Z^*}{\partial z_{r1}} \oplus \frac{\partial Z^*}{\partial z_{r2}} \oplus \dots \oplus \frac{\partial Z^*}{\partial z_{rp}},$$

gdzie $\{z_{rs}\} = \{z_{r1}, z_{r2}, \dots, z_{rp}\}$, r — numer łańcucha, Z^* — zbiór impedancji gałęzi drzew Z' lub Z'' dla rozciętego grafu G , \oplus — symbol sumy pierścieniowej zbiorów⁴⁾, wtedy

$$\{Z\} = \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{30}} \oplus \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{23}} \oplus \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{40}}.$$

Różniczkowanie iloczynu kartezjańskiego zbiorów względem impedancji z_{ij} rozumiemy jako

$$\frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{ij}} = \begin{cases} \frac{\partial Z'}{\partial z_{ij}} \times Z'' & \text{gdy } z_{ij} \in Z', \\ \frac{\partial Z''}{\partial z_{ij}} \times Z' & \text{gdy } z_{ij} \in Z''. \end{cases}$$

Natomiast operację różniczkowania zbioru określamy następująco:

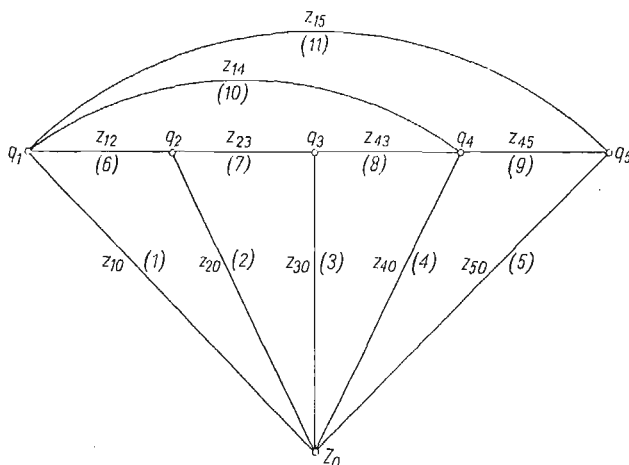
$$\frac{\partial Z^*}{\partial z_{ij}} = \begin{cases} Z^* \oplus z_{ij} & \text{gdy } z_{ij} \in Z^* \\ 0 & \text{gdy } z_{ij} \notin Z^*. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \{Z\} &= \frac{\partial Z'}{\partial z_{30}} \times Z'' \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{23}} \times Z' \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{40}} \times Z' = \\ &= \{\{z_{12}\}, \{\tilde{z}_{20}\}\} \times Z'' \oplus \left\{ \frac{\partial Z''}{\partial z_{23}} \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{40}} \right\} \times Z' = \\ &= \{\{z_{12}\}, \{\tilde{z}_{20}\}\} \times \{\{z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{z_{40}, z_{50}, z_{23}\}\} \oplus \\ &\oplus \left[\{\{z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}\}, \{z_{40}, z_{50}\}\} \oplus \{\{z_{34}, z_{23}\}, \{z_{50}, z_{23}\}\} \right] \times \\ &\times \{\{z_{12}, z_{30}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}\}\} = \{\{z_{12}, z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \\ &\{z_{12}, z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, (z_{12}, z_{40}, z_{50}, z_{23}), \{\tilde{z}_{20}, z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \\ &\{\tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{40}, z_{50}, z_{23}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{34}, z_{50}\}, \\ &\{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{40}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{40}, z_{50}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{34}, z_{23}\}, \end{aligned}$$

⁴⁾ Dla dwóch niepustych zbiorów $A = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_p\}$ ($A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}\}$) i $B = \{B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_r\}$ ($B_j = \{b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm}\}$), $A \oplus B = A \cup B - A \cap B$, gdzie „-” oznacza różnicę zbiorów, zaś \cap — przekrój zbiorów.

Zastępując oznaczenia elementów liczby strukturalnej α_{ik} odpowiadającymi im impedancjami $z_{\alpha_{ik}}$ otrzymujemy funkcję wyznacznikową, która przyrównywana do zera daje równanie charakterystyczne (3). Dla pokazania prostoty metody liczb strukturalnych skorzystajmy jeszcze raz z przykładu pokazanego na wstępie artykułu.



Rys. 6

Dokonując redukcji grafu (rys. 2) uzyskujemy graf uproszczony (rys. 6). Na rys. 6 w nawiasach podano elementy zbioru $\alpha \in N$, które przyporządkowano krawędziom grafu, natomiast poszczególne impedancje wynoszą

$$\begin{aligned} z_{10} &= k_{10} + b_{10}s + m_1s^2, & z_{20} &= b_{20}s + m_2s^2, \\ z_{30} &= k_{30} + m_3s^2, & z_{40} &= b_{40}s + k_{40} + m_4s^2, \\ z_{50} &= m_5s^2 + k_{50}, & z_{12} &= k_{12} + b_{12}s, \\ z_{23} &= b_{23}s + k_{23}, & z_{43} &= k_{43} + b_{43}s, \\ z_{45} &= k_{45} + b_{44}s, & z_{14} &= k_{14} + b_{14}s, \\ z_{15} &= k_{15}. \end{aligned}$$

Liczba strukturalna grafu (rys. 6) wynosi

$$A = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5,$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, 6, 10, 11], & P_2 &= [6, 2, 7], & P_3 &= [7, 3, 8], \\ P_4 &= [8, 4, 9, 10], & P_5 &= [9, 5, 11]. \end{aligned}$$

Tworząc funkcję wyznacznikową otrzymanej liczby strukturalnej i przyrównując ją do zera możemy już łatwo otrzymać równanie charakterystyczne.

Metoda ta staje się efektywniejsza, gdy wykorzystamy algorytm iloczynu liczb strukturalnych [38], względnie generowanie drzew grafu metodą liczb strukturalnych binarnych [44, 45, 33].

W przypadku wyznaczania równania charakterystycznego metodą liczb strukturalnych w postaci naturalnej, ustalamy na podstawie grafu układu mechanicznego jej czynniki $P_i (i = 1, \dots, n-1)$ i wczytujemy do programu GENEROWANIE DRZEW [55]. Uzyskana w ten sposób liczba strukturalna, a tym samym jej funkcja wyznaczkowa, rozwiązuje problem wyznaczania równania charakterystycznego.

4. Wniosek

Przedstawione metody wyznaczania widma częstości drgań własnych pozwalają na pełną algebraizację, a przez to umożliwiają stosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej.

Literatura cytowana w tekście

1. K. ARCZEWSKI, *Topologiczna analiza mechanicznych drgających układów liniowych metodą liczb strukturalnych*, Arch. Bud. Masz., 4, **19** (1972) 589 - 605.
2. S. D. BEDROSIAN, *Trees of a Full Graph as an Occupancy Problem*, IEEE, Trans. on Circ. Theory, CT-11 (1964) 290 - 291.
3. S. BELLERT, *Topological analysis and synthesis of linear systems*, J. Franklin Inst., December (1962) 425 - 443.
4. S. BELLERT, H. WOŹNIAKCI, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, WNT, Warszawa 1968.
5. I. BERGER, A. NATHAN, *The algebra of sets of trees, k — trees and other configurations*, IEEE Trans. Circ. Theory, CT-15 (1968) 221 - 228.
6. К. БЕРК, *Теория графов и ее применения*, Изд. Иностран. Лит., Москва 1962 (tłum. książki Claude BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958).
7. R. H. CANNON Jr., *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973 (przekł. książki — *Dynamics of Physical Systems*, McGraw-Hill, Inc. 1967).
8. A. CAYLEY, *A theorem on trees*, Quart. J. Math., **23** (1889) 376 - 378.
9. I. CEDERBAUM, *On network determinant*, Proc. JRE, **44** (1956) 258 - 259.
10. S. G. CHAN, W. T. CHANG, *Efficient tree — listing algorithm*, Elektr. Letters, 9 (1970) 271 - 272.
11. J. P. CHAR, *Generation of trees, 2-trees and storage of master forestes*, IEEE Trans. CT., CT-15 (1968) 228 - 238.
12. L. E. CLARKE, *On Cayley's formula for countign trees*, J. London Math. Soc., **33** (1958) 471 - 473.
13. Ф. С. ЦЗЕ, И. Е. МОРЗЕ, Р. Т. ХИНКЛ, *Механические колебания*, Изд. Машиностроение, Москва 1966 (przekł. książki Francis S. TSE, Ivan E. MORSE, Rolland T. HINKLE, *Mechanical vibrations*, Allyn and Bacon, Inc. Boston 1963).
14. DEN HARTOG J. P., *Drgania mechaniczne*, PWN, Warszawa 1971, (tłum. książki — *Mechanical vibrations*, McGraw-Hill Inc., New York 1956).
15. А. С. ГРИГАНОВ, А. В. СИНЕВ, *Программирование задач динамики пневматических машин ударного действия для аналоговых электронновычислительных машин методами теории графов*, Сборник — Нелинейные Колебания и Переходные процессы в Машинах, Изд. «Наука», Москва 1972, 242 - 252.
16. S. L. HAKIMI, *On trees of a graph and their generation*, J. Franklin Inst., **270**, (1961) 347 - 359.
17. S. L. HAKIMI, D. G. GREEN, *Generation and realisation of trees and k-tree*, IEEE Trans. on Circ. Theory, CT-11, (1964) 247 - 255.
18. F. HARARY, *New direction in the theory of graphs*, Academic Press, New York and London, 1973.

19. Ф. ХАРРАИ, *Теория графов*, Изд. «Мир», Москва 1973 (przekł. książki Frank HARARY, *Graph theory*, Reading, Massachusetts 1969).
20. Н. Ф. ИЛИНСКИЙ, В. К. ЦАЦЕНКИН, *Приложение теории графов к задачам электромеханики*, Энергия, Москва 1968.
21. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
22. D. C. KARNOPP, *Power — conserving transformations*, Physical Journal of the Franklin Institute, **288**, 3 (1969) 175 - 201.
23. G. KIRCHHOFF, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem., **72** (1847) 497 - 508.
24. Н. Е. КОЕНИГ, *Elektromechanical system theory*, McGraw-Hill Inc., New York 1961.
25. К. КОНКОЛ, *Generacja drzew kompletnych*, Arch. Elektrot., **4** (1973) 843 - 860.
26. Д. Кэрноп, Р. Розенберг, *Применение графов связей в механике*, Москва 1974 (tłum. z jeź. ang.: *Bond graph modeling for engineering systems*, Ed. by D. KARNOPP and R. ROSENBERG, New York, USA, 1972).
27. J. LAGASSE, *Metoda wykresu przepływu sygnałów w zastosowaniu do analizy obwodów elektrycznych*, ZN. Pol. Śl., Automatyka, **3** (1963).
28. S. J. MASON, *Feedback theory: Some properties of signal flow graphs*, Proc. IRE., **41** (1953) 1144 - 1156.
29. С. МЕЗОН, Г. ЦИММЕРМАН, *Электронные цепи, сигналы и системы*, Издательство Иностран. Литературы, 1963 (tłum. książki S. MASON, H. ZIMMERMAN: *Electronic circuits, signals and systems*, New York 1960).
30. W. MAYEDA, S. L. NAHIMI, W. K. CHEN, N. DEO, *Generation of complete trees*, IEEE Trans. CT, CT-15 (1968) 101 - 105.
31. W. MAYEDA, S. SESHU, *Generation of trees without duplication*, IEEE Trans. CT, CT-12 (1965) 181 - 185.
32. G. J. MINTY, *A simple algorithm for listing all the trees of a graph*, IEEE Trans. CT, CT-12 (1965) 120.
33. J. NADRATOWSKI, *Wyznaczenie drzew grafów niezorientowanych w oparciu o algebrę liczb strukturalnych*, Arch. Elektrot., **2** (1970) 325 - 341.
34. O. ORE, *Wstęp do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1966 (tłum. książki — *Graphs and their uses*, New York, Randon House 1963).
35. A. J. PAUL, *Generation of directed trees and 2-trees without duplication*, IEEE Trans. CT, CT-14 (1967) 354 - 356.
36. W. S. PERCIVAL, *Solution of passive electrical networks by means of mathematical trees*, J. IEEE, Part III, **100** (1953) 143 - 150.
37. M. PIEKARSKI, *Listing of all possible trees of linear graph*, IEEE Trans. CT, CT-12 (1965) 124 - 125.
38. M. PSTROKOŃSKI, *Iloczyn liczb strukturalnych*, Rozprawy Elektrot., **1** (1968) 3 - 8.
39. V. V. B. RAO, V. G. K. MURTI, *Enumeration of trees a graph*, Elektr. Letters, **4** (1970) 103 - 104.
40. R. C. READ, *Graph theory and computing*, Academic Press, New York and London 1972.
41. L. ROVICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN, Warszawa 1968 (przekład książki — *Graphes de fluence*, Applications á l'électrotechnique et á l'électronique. Calculateurs analogiques et digitaux Eyrolles, Paris 1961).
42. S. SESHU, M. B. REED, *Linear graphs and electrical networks*, Addison — Wesley Reading, Massachusetts 1961.
43. С. СЕШУ, Н. БАЛАБАНИАН, *Анализ линейных цепей*, Изд. Гос. Энерг., Москва 1963 (przekł. książki S. SESHU, N. BALABANIAN, *Linear network analysis*, New York 1959).
44. Cz. SYC, *Wyznaczenie drzew i wielodrzew grafów opisanych metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych*, Biul. WAT, **10** (1968) 73 - 98.
45. Cz. SYC, *Generowanie drzew i multidrzew multigrafów metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych*, Rozpr. Elektrot., **3** (1969) 495 - 513.
46. H. TRENT, *Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical system*, J. Acoust. Soc. Amer., **27**, (1955), 500 - 527.
47. J. G. TRUXAL, *Control systems synthesis*, McGraw-Hill, New York 1955.
48. O. WING, *Enumeration of trees*, IEEE Trans. CT, CT-10 (1963) 127 - 128.

49. J. WOJNAROWSKI, *Metoda «graf» wyznaczania obciążenia w założonych przekładniach zębatych*, ZN Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Pol. Śl., 17/51, Gliwice 1973.
50. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania widma częstości drgań własnych*, VI Sympozjum — Drgania w układach fizycznych. Zbiór streszczeń, Poznań 1974, 45 - 46.
51. J. WOJNAROWSKI, A. LIDWIN, *The application of signal flow graphs for the kinematic analysis of planetary gear trains*, J. Mech. and Mach. Theory, 10 (1975) 17 - 31.
52. J. WOJNAROWSKI, *Analiza dyskretnych liniowych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody metodą grafów*, Proc. Polish-Czechoslovak Conf. on Machine Dynamics, 2, (1971) 567 - 581.
53. J. WOJNAROWSKI, *Graf jako język struktury układu*, ZN Pol. Śl. Mechanika, 52 (1973) 3 - 21.
54. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *O możliwości optymalizacji układów mechanicznych przy użyciu liczb strukturalnych*, Sympozjon — Optymalizacja w Mechanice, Zbiór referatów, PTMTiS Oddział Gliwice (1974), 303 - 315.
55. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Analiza i synteza liniowych układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*, Materiały Konferencji Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, 21/55, 2 (1974) 63 - 89.
56. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *O sposobie modyfikacji własności dynamicznych metodą liczb strukturalnych*, Sympozjon — Optymalizacja w Mechanice, Zbiór referatów, PTMTiS Oddział Gliwice, 1975, s. 253 - 260.
57. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Grafy i liczby strukturalne wyższej kategorii jako efektywny sposób modyfikacji własności dynamicznych układów liniowych*, ZN Pol. Śl., Mechanika, 53 (1975) 8 - 13.
58. J. WOJNAROWSKI, *Про новый метод определения нагрузки в сложных зубчатых передачах*, Proc. IX Conference on Dynamics of Machines, Smolenice 1974, 231 - 241.
59. H. WOŹNIAKCI, *Analiza blokowych układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, Arch. Elektrot., 2(1966) 347 - 365; 3 (1966) 619 - 631.
60. S. ЗЕМБА, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
61. А. А. Зыков, *Теория конечных графов*, т. I Изд. «Наука», Новосибирск 1969.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ И СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СПЕКТРА ЧАСТОТ

В работе рассматриваются некоторые топологические методы определения характеристического уравнения и спектра частот для дискретных линейных механических систем. При описании вибрации системы с помощью функциональной модели и полюсного графа приводятся методы построения этого уравнения. Связь между графом и определительной функцией структурного числа используется для того чтобы показать, что можно значительно проще получить характеристическое уравнение без составления дифференциальных уравнений движения системы. Практическое применение описываемых методов демонстрируется на примерах.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF GRAPHS AND STRUCTURAL NUMBERS FOR DETERMINING
THE EQUATION OF STATE AND THE SPECTRUM OF FREQUENCY

In the paper the authors discussed topological methods of determining the equation of state and the spectrum of frequency for linear discrete mechanical systems. Describing a vibrating system by a functional model and a terminal graph, the methods of creation of such equation were shown.

Utilizing the relation between a graph and a determinant function of a structural number, the authors proved that the characteristic equation and the frequency spectrum can be found by a simpler procedure, without setting the differential equations of motion.

Practical applications of methods described were demonstrated on examples.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 sierpnia 1974 r.; w wersji ostatecznej
dnia 12 lutego 1975 r.*
