

WPLYW WSTĘPNYCH UGIĘĆ NA PRACĘ TARCZY PROSTOKĄTNEJ  
PODDANEJ NIELINIOWEMU ROZKŁADOWI OBCIĄŻEŃ

TEOFIL SIEGMÜLLER (GDAŃSK)

1. Wstęp

W procesie budowy konstrukcji stalowych, przy powszechnym stosowaniu spawania, odkształcenia wstępne tarcz nie dadzą się praktycznie wyeliminować, przy czym dochodzą one nawet do 50% grubości tarcz.

Wstępne ugięcia odgrywają znaczną rolę w zagadnieniach stateczności tarcz prostokątnych i mają poważny wpływ na pracę tych tarcz w warunkach obciążeń ponadkrytycznych. Dotyczy to tych przypadków obciążenia, gdy oprócz obciążenia poprzecznego działają również siły w płaszczyźnie środkowej tarczy, bądź też gdy stanowią one jedyne obciążenie tych tarcz. Wpływ tych sił na końcowy stan naprężenia i odkształcenia zależy bowiem nie tylko od ugięcia  $w_1$  wywołanego przyłożonym obciążeniem, lecz również od ugięcia wstępnego  $w_0$ . Dlatego też przeprowadzenie w przypadku takiego obciążenia analizy wpływu wstępnych ugięć na stan naprężenia i odkształcenia tarczy wydaje się niezbędne.

Praca cienkościennej tarczy prostokątnej po utracie stateczności, przy nieliniowym rozkładzie obciążeń, została szczegółowo przeanalizowana w pracy [7] przy założeniu płaskiej postaci tej tarczy w stanie początkowym.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu wstępnego ugięcia takiej tarczy poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń na jej stan końcowy.

2. Podstawy teoretyczne oraz przyjęte założenia

Przedmiotem rozważań jest cienka, prostokątna, izotropowa tarcza o stałej grubości  $h$ , swobodnie podparta na całym obwodzie.

Zagadnienie wpływu wstępnych ugięć na pracę tarczy prostokątnej poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń na brzegach  $x = \pm a$ , działających w jej płaszczyźnie środkowej i zmieniających się według równania

$$(2.1) \quad \sigma = K_0 \left[ \alpha \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \beta \right]$$

związane jest z koniecznością rozwiązania równania biharmonicznego

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0.$$

Rozwiązania równania (2.2) będziemy poszukiwali w postaci

$$(2.3) \quad \Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \sum_n A_n \Phi_n(x, y).$$

Funkcja naprężeń  $\Phi(x, y)$  powinna spełniać następujące warunki brzegowe:  
dla  $x = \pm a$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = K_0 \left( \alpha \frac{y^2}{b^2} - \beta \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(2.4) \quad \text{dla } y = \pm b$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Funkcja  $\Phi_0(x, y)$  powinna również spełniać warunki brzegowe podane w wyrażeniu (2.4).  $\Phi_n(x, y)$  jest to funkcja spełniająca jednorodne warunki brzegowe:  
dla  $x = \pm a$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(2.5) \quad \text{dla } y = \pm b$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} = 0.$$

Funkcję naprężeń przyjęto w postaci

$$(2.6) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2} K_0 y^2 \left( \frac{1}{6} \alpha \frac{y^2}{b^2} - \beta \right) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (A_1 + A_2 x^2 + A_3 y^2 + \dots).$$

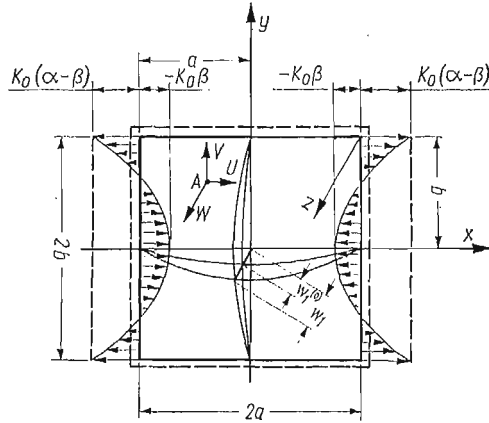
Do przybliżonego rozwiązania równania biharmonicznego (2.2) zastosowano zasadę minimum energii.

W oparciu o funkcję naprężeń (2.6), ograniczając się do pierwszego składnika szeregu, otrzymano wyrażenie określające naprężenie

$$(2.7) \quad \sigma_x = K_0 \left( \alpha \frac{y^2}{b^2} - \beta \right) + 4A_1 (x^2 - a^2)^2 (3y^2 - b^2).$$

Dla parametru  $K_0$  przyjęto założenie, że jest on liczbowo większy od wartości odpowiadającej obciążeniu krytycznemu. Założono, że powierzchnia środkowa tarczy nie jest powierzchnią idealnie płaską, lecz ma początkową krzywiznę. W każdym jej punkcie istnieje zatem pewne wstępne ugięcie  $w_0$ . Przyjęto, że jest ono małe w porównaniu z grubością tarczy.

Najmniej korzystna — z punktu widzenia pracy tarczy przy obciążeniach ponadkrytycznych — jest taka postać wstępnego ugięcia, jaką pierwotnie płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności.



Rys. 1

W rozpatrywanym przypadku podparcia i obciążenia postać taką można przedstawić jako wynik nałożenia się jednej półfali cosinusoidy w kierunku osi  $O_x$  z trzema półfalami wzdłuż osi  $O_y$ , w drugim przybliżeniu jednej półfali wzdłuż osi  $O_x$  z pięcioma półfalami osi  $O_y$  itd. [7].

W rozpatrywanym zagadnieniu założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej tarczy w postaci odpowiadającej pierwszemu przybliżeniu

$$(2.8) \quad w_0 = \cos \frac{m\pi x}{2a} \left( w_{m,1}^{(0)} \cos \frac{\pi y}{2b} + w_{m,3}^{(0)} \cos \frac{3\pi y}{2b} \right).$$

Jak wiadomo [2], składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej mają następującą postać:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

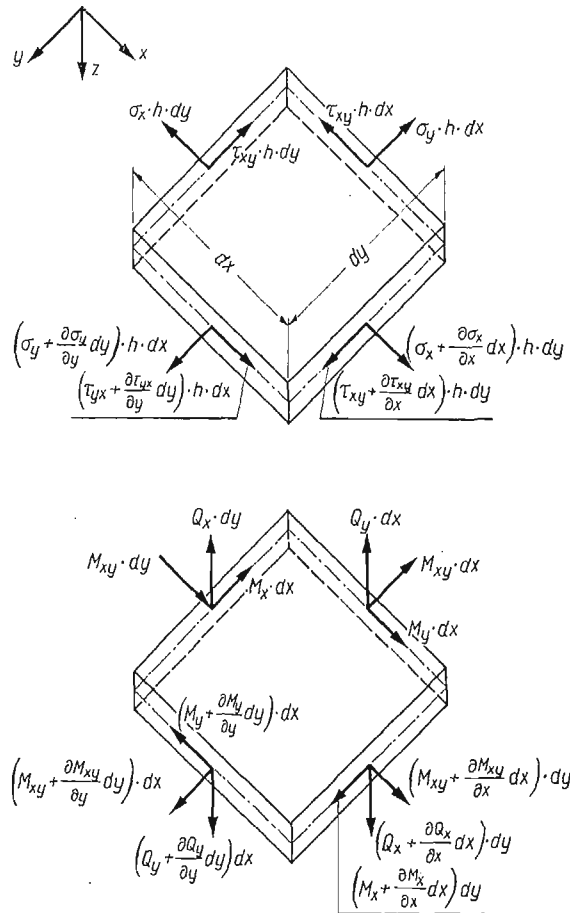
Rozkład sił wewnętrznych i naprężeń podany jest na rys. 2.

Momenty gnące i skręcające oraz siły poprzeczne zależą od przyrostu ugięcia tarczy i wyrażają się następującymi wzorami:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) \right], \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w - w_0) \end{aligned}$$

oraz

$$(2.11) \quad \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 (w - w_0)], \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 (w - w_0)]. \end{aligned}$$



Rys. 2. Siły wewnętrzne i naprężenia na krawędziach wyciętego elementu tarczy

We wzorach tych  $D$  oznacza płytową sztywność zginania

$$(2.12) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Błonowe siły wewnętrzne  $N_x$ ,  $N_y$  i  $\tau$  określono za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$  następującymi wzorami:

$$(2.13) \quad N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

W ten sposób wszystkie siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą bądź funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$ , bądź funkcji  $(w - w_0)$  przyrostu ugięcia tarczy, wywołanego przyłożonym obciążeniem. Funkcje te związane są ze sobą układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych noszących nazwę równań Kármána. Dla rozpatrywanego zagadnienia równania te mają postać:

$$(2.14) \quad \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.15) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} [U(w, w) - U(w_0, w_0)].$$

W równaniach powyższych symbolem  $\nabla^2 \nabla^2$  oznaczono podwójny operator różniczkowy Laplace'a.

$$(2.16) \quad \nabla^2 \nabla^2 (\dots) = \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial y^4}.$$

Symbol zaś  $U$  w równaniu (2.15) jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu o postaci

$$(2.17) \quad U(\dots) = 2 \left\{ \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial y^2} - \left[ \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\}.$$

### 3. Rozwiązanie zagadnienia

W celu uzyskania rozwiązania postawionego zagadnienia w oparciu o równania (2.14) i (2.15) założono taką postać funkcji  $w = w(x, y)$  określającą końcowe ugięcie tarczy w stosunku do płaszczyzny  $xy$ , aby opisywała ona z możliwie dobrym przybliżeniem kształt, jaki przyjmie tarcza pod wpływem danego obciążenia. W oparciu o wstępne uwagi dla funkcji tej przyjęto postać, jak dla funkcji ugięcia wstępnego  $w_0$

$$(3.1) \quad w(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{2a} \left( w_{m,1} \cos \frac{\pi y}{2b} + w_{m,3} \cos \frac{3\pi y}{2b} \right).$$

Współczynniki  $w_{m,1}$  i  $w_{m,3}$  występujące w powyższym wyrażeniu, są nieznanymi parametrami ugięcia. Przyjęta funkcja wstępnego ugięcia  $w_0 = w_0(x, y)$ , jak i funkcja końcowego ugięcia tarczy  $w = w(x, y)$  spełniają założone warunki swobodnego podparcia krawędzi tarczy. Jak wynika bowiem z wyrażeń (2.8) i (3.1)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (w_0)_{x=\pm a} &= (w_0)_{y=\pm b} = 0, \\ (w)_{x=\pm a} &= (w)_{y=\pm b} = 0. \end{aligned}$$

Na podstawie zaś związku (2.4) zachodzi:

$$(3.3) \quad (M_x)_{x=\pm a} = 0 \quad \text{i} \quad (M_y)_{y=\pm b} = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej postaci funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , za pomocą której określone są błonowe siły przekrojowe  $N_x, N_y$  i  $\tau$ , wykorzystano równanie (2.15), które przy uwzględnieniu wyrażeń (2.8) i (3.1) przyjmie postać:

$$(3.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -E \frac{m^2 \pi^4}{32 \cdot a^2 b^2} \left\{ (w_{m,1}^2 - w_{m,1}^{(0)2}) \left( \cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{m\pi x}{a} \right) + \right. \\ \left. + 2(w_{m,1} w_{m,3} - w_{m,1}^{(0)} w_{m,3}^{(0)}) \left[ \cos \frac{\pi y}{b} + 4 \cos \frac{2\pi y}{b} + \left( 4 \cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \right] + \right. \\ \left. + 9(w_{m,3}^2 - w_{m,3}^{(0)2}) \left( \cos \frac{3\pi y}{b} + \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \right\}.$$

Jeżeli do powyższego równania wprowadzić następujące współczynniki bezwymiarowe:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \lambda &= a/b && \text{współczynnik kształtu tarczy;} \\ \xi_0 &= w_{m,1}^{(0)}/h && \text{stosunek wstępnego ugięcia tarczy do jej grubości;} \\ \xi &= w_{m,1}/h && \text{stosunek końcowego ugięcia tarczy do jej grubości;} \\ \Psi_0 &= w_{m,3}^{(0)}/w_{m,1}^{(0)}, \\ \Psi &= w_{m,3}/w_{m,1}, \end{aligned}$$

to funkcja naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , która jest ogólnym rozwiązaniem tego równania, będzie miała postać:

$$(3.6) \quad \Phi(x, y) = -\frac{Em^2 h^2}{16\lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\xi^2 - \xi_0^2) \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{9} (\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2) \cos \frac{3\pi y}{b} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2m^4} \lambda^4 [(\xi^2 - \xi_0^2) + 9(\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2)] \cos \frac{m\pi x}{a} + (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left( \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ \left. + \lambda^4 (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ \frac{4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \right\} - \\ - \frac{1}{2} k_0 y^2 \left( \frac{1}{6} \alpha \frac{y^2}{b^2} - \beta \right) - A_1^* (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

Ostatni człon powyższego wyrażenia jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(3.7) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0.$$

Błonowe siły przekrojowe  $N_x, N_y$  i  $\tau$  wyrażają się za pomocą funkcji naprężeń  $\Phi(x, y)$  związkami (2.13). Wykorzystując zatem wyrażenie (3.6), otrzymujemy:

$$(3.8) \quad N_x = \frac{E\pi^2 m^2 h^3}{16b^2 \lambda^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\xi^2 - \xi_0^2) \cos \frac{\pi y}{b} + \xi^2 \Psi^2 + \xi_0^2 \Psi_0^2 \right] \cos \frac{3\pi y}{b} - \right. \\ \left. - (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left( \cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - 4\lambda^4 ((\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ \frac{1}{(\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \right\} - k_0 h \left[ \alpha \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \beta \right] - 4A_1 h (x^2 - a^2)^2 (3y^2 - b^2),$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad [c.d.] \quad N_y &= \frac{Em^2h^3\pi^2\lambda^2}{16a^2} \left\{ \frac{1}{2m^2} [(\xi^2 - \xi_0^2) + 9(\xi^2\Psi^2 - \xi_0^2\Psi_0^2)] \cos \frac{m\pi x}{a} + \right. \\
 &\quad \left. + m^2(\xi^2\Psi - \xi_0^2\Psi_0) \left[ \frac{4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \right\} - 4A_1(3x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2h, \\
 \tau &= \frac{Em^3h^3\pi^2\lambda^2}{8ab} (\xi^2\Psi - \xi_0^2\Psi_0) \left[ \frac{2}{(\lambda^2 + m^2)^2} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} + 16A_1hxy(x^2 - a^2)(y^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

Trzecie z otrzymanych powyżej wyrażeń staje się równe zero dla  $x = \pm a$  i  $y = \pm b$ . Stąd wynika, że na obwodzie tarczy nie ma sił stycznych  $\tau$  zgodnie z przyjętymi założeniami dotyczącymi jej podparcia i obciążenia.

Dla stanu początkowego, to znaczy, gdy  $\xi = \xi_0$  oraz  $\Psi = \Psi_0$ , jest

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad N_x &= -K_0h \left[ \alpha \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \beta \right] - 4A_1h(x^2 - a^2)^2(3y^2 - b^2), \\
 N_y &= 0.
 \end{aligned}$$

Obciążenie krawędzi tarczy siłami  $N_x$  i  $N_y$  sprowadza się zatem do pierwotnego, nieliniowo zmiennego rozkładu sił przyłożonych jedynie do krawędzi  $x = \pm a$  (rys. 1). Natomiast po utracie stateczności, gdy wartość liczbowa parametru  $K_0$ , obciążenia tych krawędzi, przekroczy wartość krytyczną, stan obciążenia wszystkich krawędzi tarczy ulega zmianie [7].

Składowe  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia w powierzchni środkowej tarczy można wyrazić za pomocą następujących bezwymiarowych współczynników [7]:

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \sigma_x^* &= \sigma_x \frac{a^2}{Eh^2} = \frac{N_x a^2}{Eh^3}, \\
 \sigma_y^* &= \sigma_y \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{N_y b^2}{Eh^3}, \\
 \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{\tau b^2}{Eh^3}.
 \end{aligned}$$

Jeśli ponadto dla parametru obciążenia  $K_0$  przyjąć również bezwymiarowy współczynnik o postaci [7]

$$(3.11) \quad K_0^* = K_0 \frac{a^2}{Eh^2},$$

to bezwymiarowe współczynniki (3.10) błonowego stanu naprężenia będą, przy wykorzystaniu związków (3.8), określone następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^* &= \frac{\pi^2 m^2}{16} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\xi^2 - \xi_0^2) \cos \frac{\pi y}{b} + (\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2) \cos \frac{3\pi y}{b} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left( \cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - 4\lambda^4 (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ \frac{1}{(\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \right\} - K_0^* \left[ \alpha \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \beta \right] - \\
 &\quad - 4A_1 \frac{a^2}{Eh^2} (x^2 - a^2)(3y^2 - b^2), \\
 (3.12) \quad \sigma_y^* &= \frac{n^2 \pi^2}{16} \left\{ \frac{1}{2m^2} \left[ (\xi^2 - \xi_0^2) + 9(\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2) \right] \cos \frac{m\pi x}{a} + \right. \\
 &\quad \left. + m^2 (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ \frac{4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \right\} - \\
 &\quad - 4A_1 \frac{b^2}{Eh^2} (3x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2, \\
 \tau_{xy}^* &= \frac{m^3 \pi^2 \lambda}{8} (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ \frac{2}{(\lambda^2 + m^2)^2} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} + 16A_1 xy \frac{b^2}{Eh^2} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

Momenty gnące  $M_x$  i  $M_y$  oraz moment skręcający  $M_{xy}$ , powstające w wyniku zmiany krzywizny tarczy wywołanej przyłożonym obciążeniem, dadzą się również wyrazić za pomocą wielkości bezwymiarowych o postaci, [7]:

$$(3.13) \quad M_x^* = \frac{M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2; \quad M_y^* = \frac{M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2; \quad M_{xy}^* = \frac{M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2.$$

Na podstawie wzorów (2.10) oraz wyrażeń (2.8), (3.1) i (3.5) powyższe współczynniki określone będą, po wprowadzeniu do nich współczynników zdefiniowanych wyrażeniami (3.5), następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 M_x^* &= \frac{\pi^2}{48(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(m^2 + \nu\lambda^2) \cos \frac{\pi y}{2b} + \right. \\
 &\quad \left. + (\xi \Psi - \xi_0 \Psi_0)(n^2 + 9\nu\lambda^2) \cos \frac{3\pi y}{2b} \right] \cos \frac{m\pi x}{2a}, \\
 (3.14) \quad M_y^* &= \frac{\pi^2}{48(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(\lambda^2 + \nu m^2) \cos \frac{\pi y}{2b} + \right. \\
 &\quad \left. + (\xi \Psi - \xi_0 \Psi_0)(9\lambda^2 + \nu m^2) \cos \frac{3\pi y}{2b} \right] \cos \frac{m\pi x}{2a}, \\
 M_{xy}^* &= -\frac{\pi^2 m}{48(1+\nu)} \lambda \left[ (\xi - \xi_0) \sin \frac{\pi y}{2b} + 3(\xi \Psi - \xi_0 \Psi_0) \sin \frac{3\pi y}{2b} \right] \sin \frac{m\pi x}{2a}.
 \end{aligned}$$



Maksymalne wartości momentów  $M_x$ ,  $M_y$  i  $M_{xy}$ , będących wypadkowymi odpowiednich składowych dodatkowego zgięciowego stanu naprężenia, określone są za pomocą wzorów:

$$(3.15) \quad (\sigma_{xg})_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_{yg})_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (\tau_g)_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Dla powyższych wielkości można również wprowadzić bezwymiarowe współczynniki o postaci, [7]:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{(\sigma_{xg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{(\sigma_{yg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \tau_g^* &= \frac{(\tau_{g\max})}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \end{aligned}$$

które, przy wykorzystaniu wyrażeń (3.13), określone będą następująco, [7]:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{6M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_x^*, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{6M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_y^*, \\ \tau_g^* &= \frac{6M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_{xy}^*. \end{aligned}$$

Wprowadzając współczynniki  $\xi_0$ ,  $\Psi_0$ ,  $\xi$  i  $\Psi$  do wyrażeń (2.8) i (3.1), można funkcje  $w_0$  i  $w$ , zarówno wstępnego, jak i końcowego ugięcia tarczy, wyrazić również bezwymiarowymi współczynnikami postaci, [7]:

$$(3.18) \quad w^* = \frac{w}{h} = \xi \left( \cos \frac{\pi y}{2b} + \Psi \cos \frac{3\pi y}{2b} \right) \cos \frac{m\pi x}{2a},$$

$$(3.19) \quad w_0^* = \frac{w_0}{h} = \xi_0 \left( \cos \frac{\pi y}{2b} + \Psi_0 \cos \frac{3\pi y}{2b} \right) \cos \frac{m\pi x}{2a}.$$

Dla określenia stanu naprężenia i odkształcenia tarczy konieczne jest wyznaczenie bezwymiarowych współczynników  $\Psi$  i  $K_0^*$  w zależności od współczynników wstępnego ugięcia  $\xi_0$  i  $\Psi_0$  — dla różnych wartości współczynnika  $\xi$  ugięcia końcowego tarczy. Wykorzystamy w tym celu równanie (2.14), które rozwiążemy stosując metodę GALERKINA. W rozpatrywanym przypadku muszą być spełnione następujące dwa równania:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-b}^b F(w, w_0, \Phi) \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} dx dy &= 0, \\ \int_{-a}^a \int_{-b}^b F(w, w_0, \Phi) \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} dx dy &= 0, \end{aligned}$$

w których symbolem  $F(w, w_0, \Phi)$  oznaczono wyrażenie

$$(3.21) \quad F(w, w_0, \Phi) = D \cdot \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) - h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Po wstawieniu do równań (3.20) odpowiednich pochodnych funkcji ugięcia  $w_0$  i  $w$  oraz funkcji naprężeń  $\Phi$  i wprowadzeniu do nich bezwymiarowych współczynników  $\xi_0$ ,  $\Psi_0$ ,  $\xi$ ,  $\Psi$  i  $K_0^*$  przyjmą one następującą postać:

$$(3.22) \quad \frac{\pi^2(m^2 + \lambda^2)^2}{24(1 - \nu^2)} (\xi - \xi_0) + \frac{\pi^2 m^4}{32} \xi \left\{ (\xi^2 - \xi_0^2) \left( 1 + \frac{\lambda^4}{m^4} \right) + (\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2) \frac{9\lambda^4}{m^4} + 2(\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ 1 + \frac{4\lambda^4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \right] \right\} - K_0^* \xi \left\{ \frac{m^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{3} (\pi^2 - 6) \alpha - \frac{1}{2} (2\pi^2 \beta + 5\alpha \Psi) \right] - A_1^* \frac{1}{\pi^6 \lambda^2 m^3} \left[ \frac{8}{3} (m^4 \pi^2 + 15) + \frac{49}{2} m^4 \pi^2 \Psi \right] \right\} = 0,$$

$$(3.23) \quad \frac{\pi^2(m^2 + 9\lambda^2)^2}{24(1 - \nu^2)} (\xi \Psi - \xi_0 \Psi_0) + \frac{\pi^2 m^4}{32} \xi \left\{ (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \frac{9\lambda^4}{m^4} + \Psi (\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2) \left( 1 + \frac{81\lambda^4}{m^4} \right) \right\} - K_0^* \xi \left\{ m^2 \left[ \frac{2}{9\pi^2} (3\pi^2 + 2) \alpha \Psi - \frac{1}{\pi^2} (2\pi^2 \beta \Psi + 5\alpha) \right] - \frac{8A_1^*}{\pi^2 \lambda^2} \left[ \frac{49m^2}{2} + \frac{16}{45} \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) \Psi \right] \right\} = 0.$$

Po wyrugowaniu z równań (3.22) i (3.23) bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $K_0^*$  otrzymuje się następujące równanie czwartego stopnia względem współczynnika  $\Psi$ :

$$(3.24) \quad z_1 \Psi^4 + z_2 \Psi^3 + z_3 \Psi^2 + z_4 \Psi + z_5 = 0,$$

gdzie:

$$z_1 = \frac{1}{256\pi^2} \xi^2 m^2 \left( 15876 \lambda^2 A_1^* + 405 \pi^2 \lambda^4 \alpha + 196 A_1^* m^4 \frac{1}{\lambda^2} + 5 \pi^2 m^4 \alpha \right),$$

$$z_2 = \xi^2 \left\{ \frac{81 \lambda^2}{10 m^2 \pi^4} A_1^* (m^4 \pi^2 + 15) - \frac{27}{128} m^2 \lambda^4 (\pi^2 - 6) \alpha + \frac{m^2 A_1^* (m^2 \pi^2 + 15)}{10 \pi^4 \lambda^2} - \frac{m^6}{128} \left[ \frac{1}{3} (\pi^2 - 6) \alpha - \pi^2 \beta \right] - \frac{4}{5} \lambda^2 A_1^* \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \frac{9}{16} \lambda^4 m^2 \pi^2 \beta + \frac{1}{16} \lambda^4 m^2 (3\pi^2 - 2) \alpha \right\},$$

$$\begin{aligned}
 z_3 = & \frac{441}{64} m^2 \lambda^2 \xi^2 A_1^* \frac{1}{\pi^2} + \frac{45}{256} \xi^2 \lambda^4 m^4 \alpha + \frac{49(m^2 + 9\lambda^2)^2}{48(1 - \nu^2)} A_1^* \frac{m^2}{\pi^4 \lambda^2} + \\
 & + \frac{5(m^2 + 9\lambda^2)^2}{192(1 - \nu^2)} m^2 \alpha - \frac{8}{45} \xi^2 A_1^* m^4 \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \\
 & - \frac{1}{8} \pi^2 \beta m^6 \xi^2 \left[ 1 + \frac{4}{\left( 1 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2} \right] + \frac{1}{72} m^6 \xi^2 \left[ 1 + \right. \\
 & \left. + \frac{4}{\left( 1 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2} \right] (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{441}{8} \lambda^2 \xi^2 m^2 A_1^* - \\
 & - \frac{45}{32} \xi^2 \lambda^4 m^2 \alpha - \frac{1}{64} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 \lambda^2 m \left( \frac{405}{4} \alpha \lambda^2 m + 3969 A_1^* \frac{1}{\pi^2} \right), \\
 z_4 = & \frac{9}{10} \xi^2 A_1^* \lambda^2 \frac{(m^4 \pi^2 + 15)}{\pi^4 m^2} - \frac{3}{128} \xi^2 \lambda^4 m^4 (\pi^2 - 6)\alpha + \frac{2}{15} A_1^* \frac{(m^4 \pi^2 + 15)}{\pi^4 \lambda^2 m^2} \frac{(m^2 + 9\lambda^2)^2}{1 - \nu^2} - \\
 & - \frac{m^2(m^2 + 9\lambda^2)}{96(1 - \nu^2)} \left[ \frac{1}{3} (\pi^2 - 6)\alpha - \pi^2 \beta \right] - \frac{49}{4} m^6 \xi^2 A_1^* \left[ 1 + \frac{4}{\left( 1 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2} \right] \frac{1}{\lambda^2} - \\
 & - \frac{5}{16} \xi^2 m^6 \left[ 1 + \frac{4}{\left( 1 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2} \right] \alpha - \frac{4}{15} \xi^2 A_1^* \lambda^2 \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \frac{1}{16} \xi^2 m^2 \lambda^4 \pi^4 \beta + \\
 & + \frac{\lambda^4}{144} \xi^2 m^2 (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{4}{45} \xi^2 A_1^* \frac{m^4}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \frac{1}{16} \xi^2 m^6 \pi^2 \beta + \\
 & + \frac{m^6}{144} \xi^2 (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{16}{135} \frac{(m^2 + \lambda^2)^2}{1 - \nu^2} A_1^* \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \frac{m^2 \pi^2 \beta (m^2 + \lambda^2)^2}{12(1 - \nu^2)} + \\
 & + m^2 (3\pi^2 - 2) \frac{(m^2 + \lambda^2)^2}{108} \alpha + \xi \xi_0 \frac{(m^2 + \lambda^2)^2}{(1 - \nu^2)} \left[ \frac{\pi^2}{12} m^2 \beta - \frac{1}{108} (3\pi^2 - 2)\alpha m^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{16}{135} \frac{A_1^*}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) \right] + \xi^2 \xi_0^2 \left( 1 + \frac{\lambda^4}{m^4} \right) \left[ \frac{\pi^2 m^6}{16} \beta + \frac{4}{45} \frac{A_1^*}{\lambda^2} m^4 \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{m^6}{144} (3\pi^2 - 2)\alpha \right] + \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 \left[ \frac{4}{5} \lambda^2 \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) A_1^* + \frac{9}{16} \pi^2 m^2 \lambda^4 \beta - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{16} m^2 \lambda^4 (3\pi^2 - 2) \right] + \frac{1}{72} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 m^6 [9\pi^2 \beta - (3\pi^2 - 2)\alpha] \left[ 1 + 4 \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \right] + \\
 & + \frac{8}{45} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \left( 1 + \frac{15}{m^2 \pi^2} \right) \frac{m^4}{\lambda^4} (A_1^* + 1) - \frac{m \lambda^2}{256} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \left( 45 m \lambda^2 \alpha + \right. \\
 & \left. + 1764 A_1^* \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{1}{384} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 (m^4 + 81 \lambda^4) m^2 [\alpha (\pi^2 - 6) - 3\pi^2 \beta] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 A_1^* \frac{(m^4 \pi^2 + 15)}{\pi^4} \left( \frac{m^2}{\lambda^2} + 81 \frac{\lambda^2}{m^3} \right) - \\
& -\frac{1}{192} \xi \xi_0 \Psi_0 \frac{(m^2 + 9\lambda^2)^2}{(1-\nu^2)} \left( 5\alpha + 196 A_1^* \frac{m}{\pi^2 \lambda^2} \right), \\
z_5 = & -\frac{49}{8} \xi^2 A_1^* \lambda^2 m^2 - \frac{5}{32} \xi^2 m^2 \lambda^4 \alpha - \frac{49}{8} \xi^2 A_1^* \frac{m^6}{\lambda^2} - \\
& -\frac{5}{32} \xi^2 m^6 \alpha - \frac{49}{6} \frac{(m^2 + \lambda^2)^2}{1-\nu^2} A_1^* m^2 \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5(m^2 + \lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)} m^2 \alpha + \\
& + \left( 5\alpha + \frac{196 A_1^*}{\lambda^2} \right) \left\{ \frac{9}{32} m^2 \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 \lambda^4 + \frac{1}{16} m^6 \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \left[ 1 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{4\lambda^4}{(\lambda^2 + m^2)^2} \right] + \frac{(m^2 + \lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)} m^2 \xi \xi_0 + \frac{m^6}{32} \left( 1 + \frac{\lambda^4}{m^4} \right) \xi^2 \xi_0^2 \right\} + \\
& + \left[ \pi^2 \beta - \frac{(\pi^2 - 6)}{3} \alpha \right] \left[ \frac{(m^2 + 9\lambda^2)^2}{96(1-\nu^2)} m^2 \xi \xi_0 \Psi_0 + \right. \\
& + \left. \frac{9}{128} m^2 \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \lambda^4 \right] + \frac{3}{4} \frac{(m^4 \pi^2 + 15)}{m^3 \pi^4} \lambda^2 \xi_0^2 \xi^2 \Psi_0 A_1^* + \\
& + \frac{1}{9} \frac{(m^2 + 9\lambda^2)^2}{(1-\nu^2)} \frac{(m^4 \pi^2 + 15)}{\pi^4 \lambda^2 m^3} \xi \xi_0 \Psi_0 A_1^*.
\end{aligned}$$

Bezwymiarowy współczynnik obciążenia  $K_0^*$ , w zależności od współczynników bezwymiarowych (3.5), wyraża się następującym wzorem:

$$(3.25) \quad K_0^* = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma_{14}}{\Gamma_{15} - \Gamma_{16}},$$

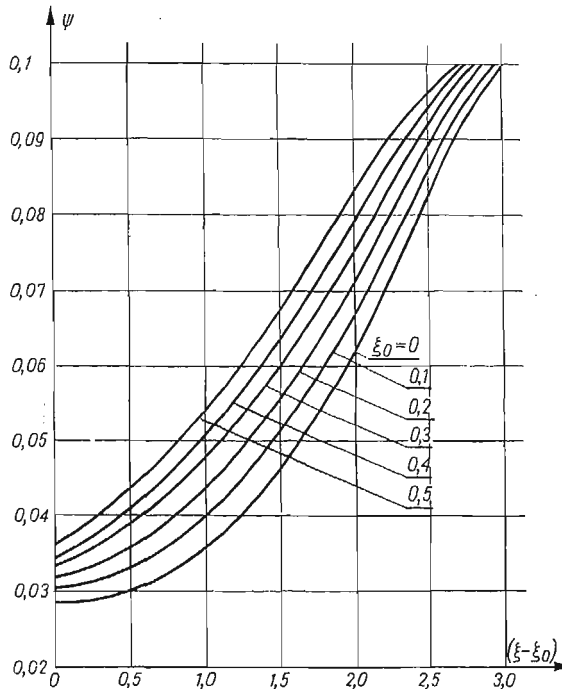
gdzie:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= \frac{\pi^2 (m^2 + \lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)} (\xi - \xi_0), \\
\Gamma_{12} &= \frac{\pi^2 m^4}{32} \xi (\xi^2 - \xi_0^2) \left( 1 + \frac{\lambda^4}{m^4} \right), \\
\Gamma_{13} &= \frac{9\lambda^4 \pi^2}{32} \xi (\xi^2 \Psi^2 - \xi_0^2 \Psi_0^2), \\
\Gamma_{14} &= \frac{\pi^2 m^4}{16} \xi (\xi^2 \Psi - \xi_0^2 \Psi_0) \left[ 1 + \frac{4\lambda^2}{(\lambda^2 + m^2)^2} \right], \\
\Gamma_{15} &= \frac{m^2}{4\pi^2} \xi \left[ \frac{1}{3} (\pi^2 - 6) \alpha - \frac{1}{2} (2\pi^2 \beta + 5\alpha \Psi) \right], \\
\Gamma_{16} &= \frac{1}{\pi^6 \lambda^2 m^3} A_1^* \xi \left[ \frac{8}{3} (m^4 \pi^2 + 15) + \frac{49}{2} m^4 \pi^2 \Psi \right].
\end{aligned}$$

Zakładając w równaniach (3.24) i (3.25)  $\xi_0 = 0$  oraz  $\Psi_0 = 0$  otrzymamy związki, mające zastosowanie dla tarczy obciążonej nieliniowo, lecz pozbawionej wstępnego ugięcia  $w_0$ . Wzory te odpowiadają przypadkowi rozpatrzonemu w pracy [7] dla pierwszego przybliżenia.

#### 4. Obliczenia liczbowe

Szczegółowe obliczenia liczbowe dotyczą tarczy o współczynniku kształtu  $\lambda = a/b = 2$ . Dla materiału tarczy przyjęto liczbę Poissona  $\nu = 0,3$ . Obliczenia przeprowadzono zakładając szereg wartości dla współczynnika  $\xi$  (od  $\xi = 0,1$  do  $3,0$ ), a następnie przyjmując dla każdej z nich kilka kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (od  $\xi_0 = 0,01$  do  $0,5$ ) oraz odpowiadających im wartości współczynnika  $\Psi_0$ .

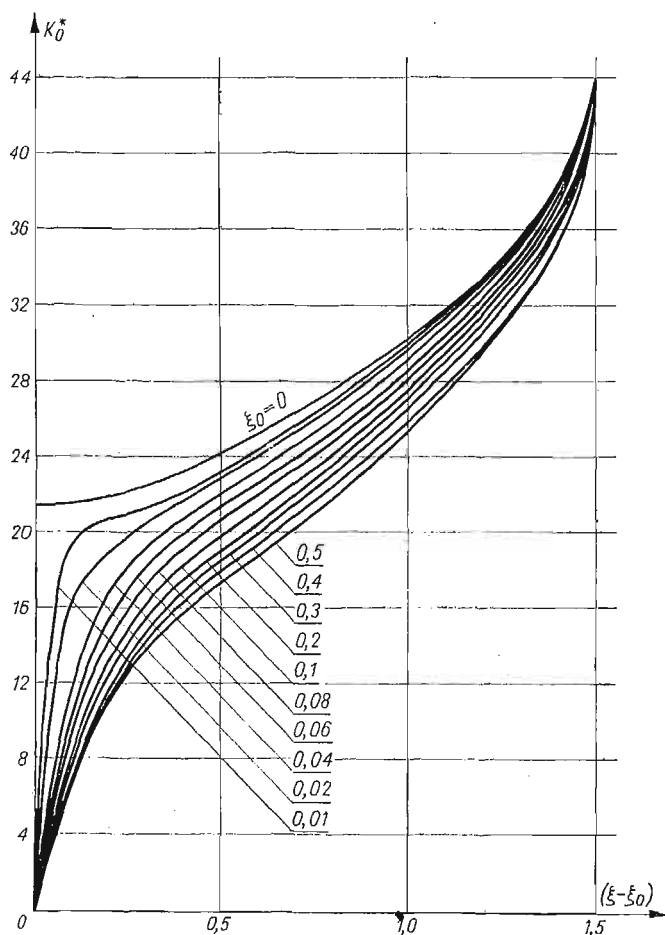


Rys. 3. Wykresy zależności  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia tarczy

Dla przyjmowanych wartości współczynników  $\xi_0$  zachowano warunek  $\xi_0 \leq \xi$ , wartości zaś współczynników  $\Psi_0$  wyznaczono z równania (3.26) odpowiadającego przypadkowi tarczy bez ugięcia wstępnego. Przyjęto zatem, że  $\Psi_0 = (\Psi)_{\substack{\xi_0=0 \\ \Psi_0=0}}$ . Takie przyjęcie odpowiada najniekorzystniejszemu przypadkowi, w którym wstępne ugięcie powierzchni środkowej tarczy ma taką postać, jaką początkowo płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności. Wartości liczbowe współczynników  $\Psi$ , w zależności od założonych wartości współczynnika  $\xi$ , wyznaczone zostały na podstawie równania (3.24) dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Następnie w taki sam sposób wyznaczono wartości

bezwymiarowego współczynnika  $K_0^*$  na podstawie równania (3.25). Obliczenia liczbowe wykonane zostały na EMC Odra — 1204, a wyniki przedstawiono na wykresach.

Na rys. 3 podano wykresy funkcji  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Dla każdej wartości tej odciętej rzędne krzywych rosną wraz ze wzrostem współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia tarczy, podobnie jak w [3]. Oznacza to, że im większe jest wstępne ugięcie tarczy, tym odpowiednio większa jest amplituda trzech półfal sinusoidy nałożonych na ugiętą powierzchnię środkową tarczy wzdłuż osi  $O_y$ , reprezentowanych drugim członem wyrażenia (3.1). Amplituda ta jest najmniejsza wówczas, gdy tarcza jest początkowo płaska. Przebieg krzywych  $K_0^* = K_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego przedstawiono na rys. 4. Krzywa górna przedstawia krytyczne wartości współczynnika obciążenia  $(K_0^*)_{\xi_0=0}$  odpowiadające tarczy bez ugięcia wstępnego. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0 = 0,01, \dots, 0,5$ , odbiegają znacznie od siebie aż do wartości odciętej  $(\xi - \xi_0) =$



Rys. 4. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $K_0^* = K_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia tarczy

= 1, 2. Powyżej tej wartości wszystkie krzywe asymptotycznie dążą do krzywej  $\xi_0 = 0$ . Wynika stąd, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy całkowite ugięcie tarczy wynosi około 1,6 grubości tarczy.

##### 5. Analiza porównawcza z tarczą o wstępnym jednostronnym wybrzuszeniu

W celu porównania otrzymanych wyników rozpatrzono przypadek tarczy podpartej i obciążonej identycznie, jak tarcza dotychczas rozpatrywana, dla której założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej w postaci jednostronnego wybrzuszenia, najczęściej występującego w praktyce. Dla tego przypadku ugiętą wstępnie powierzchnię środkową tarczy można opisać wyrażeniem przedstawiającym nałożenie się jednej półfali cosinusoidy zarówno wzdłuż osi  $x$ , jak i osi  $y$  przyjętego (rys. 1) układu współrzędnych. Funkcję  $w_0$ , określającą kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy przed jej obciążeniem, można zapisać w postaci

$$(5.1) \quad w_0 = w_0^{(0)} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b},$$

gdzie  $w_0^{(0)}$  jest parametrem równym wstępnemu wychyleniu środka tarczy z płaszczyzny  $xy$ . Funkcja ta ma postać identyczną z wyrażeniem (2.8) po przyjęciu  $w_{m,3}^{(0)} = 0$ .

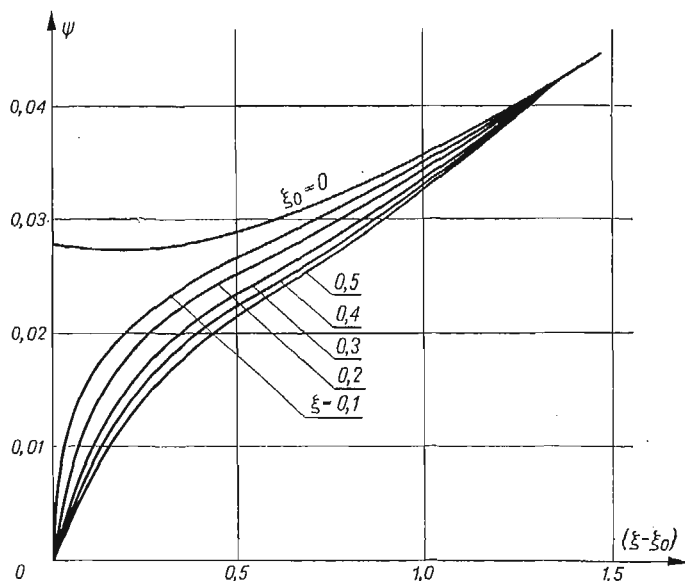
Do dalszych rozważań przyjęto, że pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa tarczy przyjmie kształt opisany równaniem (3.1). Wówczas odpowiednie związki równania dla rozważanego obecnie przypadku można uzyskać z odpowiadających związków i równań, otrzymanych dla przypadku poprzednio rozpatzonego, przyjmując w nich, że parametr  $w_{m,3}^{(0)}$  lub odpowiadający mu współczynnik bezwymiarowy  $\Psi_0 = w_{m,3}^{(0)}/w_{m,1}^{(0)}$  są równe zeru.

Obliczenia liczbowe przeprowadzono zakładając te same jak poprzednio wartości współczynnika kształtu tarczy  $\lambda$  oraz liczby Poissona  $\nu$ . Dla bezwymiarowego współczynnika ugięcia wstępnego  $\xi_0$  przyjęto wartości zmieniające się w granicach od  $\xi_0 = 0,1$  do  $0,5$ . Dla współczynnika  $\xi$  końcowego ugięcia tarczy przyjęto wartości  $\xi = 0,1, \dots, 2,5$ .

Obliczenia przeprowadzono przy zachowaniu warunku  $\xi_0 \leq \xi$ . Otrzymane wyniki zilustrowano na następujących dwóch wykresach: pierwszy z nich, podany na rys. 5, przedstawia zależność współczynnika  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$ . Górna krzywa, dla  $\xi_0 = 0$ , odpowiada wstępnie płaskiej postaci tarczy. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (dla  $\xi_0 = 0,1, \dots, 0,5$ ), przebiegają poniżej tej krzywej. Wynika stąd, że w przeciwieństwie do poprzedniego rozpatrywanego przypadku — gdy tarcza ma ugięcie wstępne w postaci jednostronnego wybrzuszenia — amplituda trzech półfal cosinusoidy określonych drugim członem funkcji (3.1) końcowego ugięcia tarczy jest mniejsza niż w tym przypadku, gdy tarcza jest początkowo idealnie płaska.

Wszystkie omawiane krzywe dla  $\xi_0 \neq 0$  zbliżają się asymptotycznie do krzywej dla  $\xi_0 = 0$ , przy czym różnice rzędnych między nimi praktycznie znikają począwszy od wartości  $(\xi - \xi_0) \approx 1,2$ .

Na rys. 6 przedstawiono przebieg zmian bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $K_0^*$  w zależności od przyrostu ugięcia  $(\xi - \xi_0)$  dla kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (linie przerywane). Krzywe te przebiegają podobnie, jak krzywe  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$  na rys. 5. Przy małych wartościach przyrostu ugięcia tarczy różnice rzędnych między tymi krzywymi a krzywą górną są znaczne. Ze wzrostem zaś ugięcia tarczy różnice te maleją, a wszystkie krzywe zbliżają się do krzywej górnej. Dla mniej więcej tej samej wartości odciętej, co na wykresie poprzednim dla funkcji  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$ , różnice rząd-



Rys. 5. Wykres zależności  $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi$  i dla przypadku tarczy z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

nych między wszystkimi krzywymi  $K_0^* = K_0^*(\xi - \xi_0)$  stają się pomijalnie małe. Stąd wynika, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego wpływ tego ugięcia również i w rozpatrywanym przypadku zanika mniej więcej dla tej samej wartości całkowitego ugięcia tarczy, co w przypadku poprzednio rozpatrzonym.

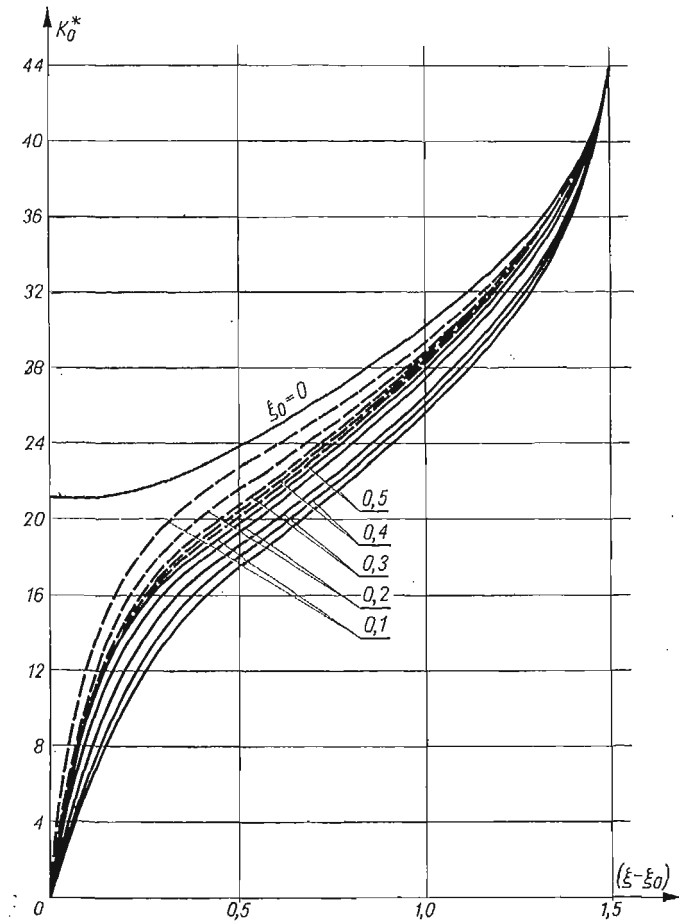
Dla zilustrowania powyższego faktu na rys. 6 naniesiono dodatkowe krzywe  $K_0^* = K_0^*(\xi - \xi_0)$  z rys. 4 (linie ciągłe). Jak widać, wszystkie krzywe ciągłe leżą poniżej odpowiadających im krzywych przerywanych (dla tych samych wartości  $\xi_0$ ). A zatem osiągnięcie określonego ugięcia końcowego tarczy następuje przy mniejszej wartości obciążenia wówczas, gdy postać wstępnego ugięcia powierzchni środkowej tarczy jest bliższa tej postaci, jaką pierwotnie płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można wnioskować, że w zakresie zbadanych wartości ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy końcowe ugięcie tarczy wynosi około 1,7 jej grubości. Wówczas stan naprężenia i odkształcenia różni się pomijalnie mało od stanu, jaki (przy danym obciążeniu) panuje w tarczy początkowo-płaskiej. W praktyce początkowe ugięcie tarczy wynika na ogół z przypadkowego, mniej



lub więcej nieregularnego pofalowania powierzchni. Temu pofalowaniu mogą odpowiadać zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości współczynnika  $\Psi_0$ .

Z punktu widzenia pracy tarczy w warunkach obciążenia ponadkrytycznego najbardziej niekorzystne są takie przypadki, gdy pofalowanie związane jest z jednostronnym wybrzuszeniem powierzchni środkowej tarczy; zachodzi to dla  $\Psi_0 \geq 0$ . Taki rzeczywisty kształt wstępnego ugięcia tarczy jednakże tylko w pewnym przybliżeniu odpowiada omówionym w pracy przypadkom. Z tego też względu wydaje się właściwe, by stan naprężenia odkształcenia tarczy, przy uwzględnieniu jej wstępnego ugięcia, określać na podstawie wzorów odpowiadających przypadkowi najbardziej niekorzystnemu.



Rys. 6. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $K_0^* = K_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  i dla przypadku tarczy z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, należy zatem preferować wzory mające zastosowanie w przypadku, gdy kształt ugiętej wstępnie powierzchni środkowej tarczy odpowiada postaci, jaką tarcza przyjmuje po utracie stateczności.

## Literatura cytowana w tekście

1. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościemnych*, Warszawa 1961.
2. А. Ц. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
3. W. WALCZAK, *Wpływ wstępnych ugięć na pracę płyty prostokątnej, zginanej w swej płaszczyźnie*, Mech. Teoret. Stos., 3, 11 (1973).
4. M. КМЕСИК, *Wpływ odkształceń wstępnych na wytrzymałość osiowo-ściskanych płyt prostokątnych* (praca doktorska), Politechnika Gdańska, 1970.
5. А. Ц. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, ГИТТЛ, Москва 1956.
6. S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company, 1961.
7. T. SIEGMÜLLER, *Analiza stateczności i stanu nadkrytycznego tarczy prostokątnej poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń*, (w druku, Arch. Bud. Masz.).

## Резюме

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА НА РАБОТУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИСКА  
ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

В работе приводится теоретический анализ влияния начального прогиба на напряженное состояние и деформацию после потери устойчивости прямоугольного диска свободно опертого по контуру и подверженного нагрузке с нелинейным распределением. Рассуждения ведутся с применением функции напряжений Эри  $\Phi(x, y)$ . Принимаются удовлетворяющие краевым условиям задачи представления функций прогиба серединной поверхности диска — исходного  $w_0(x, y)$  и конечного  $w(x, y)$ .

Для определения этих функций использовалось дифференциальное уравнение Кармана нелинейной теории пластинок, а неизвестные параметры содержащиеся в принятых функциях прогиба находились с применением метода Галеркина.

Полученные выражения для напряжений и деформаций в закритическом состоянии были выражены посредством безразмерных величин. Численные примеры решены для двух видов исходного прогиба серединной поверхности диска, для этих случаев найдены условия при которых можно пренебречь влиянием исходного прогиба.

## Summary

INFLUENCE OF INITIAL DEFLECTIONS ON THE WORK OF A RECTANGULAR PLATE  
SUBJECT TO THE NON-LINEAR LOAD

This paper presents a theoretical analysis of the influence of initial deflections on the state of stress and strain in an isotropic, rectangular plate simply supported along the edges and subject to the non-linear load — after the stability loss. The Airy stress function  $\Phi(x, y)$  is introduced, and the form of initial deflection  $w_0(x, y)$  and final deflection  $w(x, y)$  is assumed to satisfy the boundary conditions.

These functions are then determined by means of the Kármán equations of the non-linear plate theory, the unknown parameters appearing in the function of deflection being found by means of the Galerkin method.

The final formulas determining the stresses and strains in the post-critical state of the plate are written in terms of dimensionless coefficients.

Numerical calculations are performed for two different forms of the initial deflection of the middle surface of the plate; conditions are also derived under which the influence of initial deflections may be disregarded.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 grudnia 1974 r.*