MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH Z CYLINDRAMI W UKŁADZIE *V*

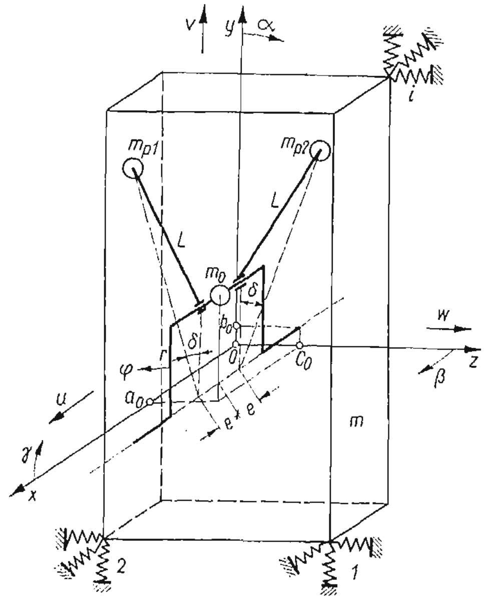
JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Elastyczne posadowienie silników tłokowych stosuje się w celu zmniejszenia poziomu drgań i hałasów przenoszonych drogą strukturalną na fundament i dalsze elementy konstrukcji. W wyniku drgań elastycznie posadowionych silników powstają w nich dodatkowe siły i momenty masowe, powodujące obciążenie poszczególnych elementów silnika, a także samego silnika, jako nieidealnego źródła energii. Jak wykazały badania PFLAUMA [1] i szacunkowe obliczenia HEMPELA [2], siły i momenty te nie są duże, jednakże celowe byłoby ich uwzględnianie, przede wszystkim w przypadkach, gdy pożądana jest dokładniejsza analiza drgań i skuteczniejsza z nimi walka. Jest to szczególnie istotne z punktu widzenia ochrony zdrowia człowieka, zwłaszcza wobec obserwowanego w ostatnich latach wzrostu mocy z cylindra, pociągającego za sobą wzrost sił i momentów wymuszających drgania. Jest to istotne także z powodu strat energetycznych wynikających z elastycznego posadowienia, zwłaszcza wobec znacznego wzrostu cen paliwa na światowych rynkach. Minimalizacja tych strat mogłaby być w uzasadnionych przypadkach stosowana jako dodatkowe kryterium doboru systemu amortyzacji. Dokładniejszą analizę drgań i wyznaczenie dodatkowych sił i momentów masowych oraz strat energetycznych umożliwia uwzględnienie nieidealnego źródła energii i potraktowanie prędkości kątowej silnika jako wielkości zmiennej. Wpływ nieidealnego źródła energii i jego sprzężenie z układem drgającym były po raz pierwszy analizowane przez ROCARDA [3] (dla przypadku wirującej masy niewyrównoważonej, napędzanej silnikiem elektrycznym), a później także przez KONONIENKĘ [4] i GOŁOSKOKOWA [5]. Zagadnienia te były rozpatrywane przez autora dla przypadków układu wibracyjno-uderzeniowego [6] oraz silników tłokowych o pionowym układzie cylindrów [7]. Niniejsza praca dotyczy silników tłokowych z cylindrami w układzie *V*.

2. Zależności kinematyczne

Rozpatrywać będziemy układ dyskretny; elementy silnika i odbiornika mocy, sprzęgło i fundament, na którym elastycznie posadowiony jest silnik wraz z odbiornikiem mocy, potraktujemy jako sztywne. Schemat obliczeniowy układu przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Wprowadzimy oznaczenia:

a_0, b_0, c_0; a_1, b_0, c_0; ... a_n, b_0, c_0; ... a_{c-1}, b_0, c_0 — współrzędne punktów przecięcia z osią wału prostych prostopadłych do osi wału, poprowadzonych ze środków ciężkości kolejnych mas m_0, w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

c — ilość wykorbień,

c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} — współczynniki sztywności i-tej podkładki elastycznej przy ugięciach w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

e — odległość osi korbowodu od środka ciężkości masy m_0,

g — przyspieszenie ziemskie,

h_{xi}, h_{yi}, h_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i-tej podkładki elastycznej przy obrotach jej poprzecznych przekrojów względem osi $0'x', 0'y'$ i $0'z'$,

k_{xi}, k_{yi}, k_{zi} — współczynniki sztywności i-tej podk.adki elastycznej przy obrotach, jak wyżej,

l_{xi}, l_{yi}, l_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i-tej podkładki elastycznej przy ugięciach w kierunkach osi $0x$, $0y$ i $0z$,

L — długość korbowodu,

m — łączna masa układu drgającego,

m_0 — masa niewyrównoważona, odpowiadająca jednemu wykorbieniu i skupiona na osi czopa korbowego,

$m_{p1/2}$ — masa niewyrównoważona w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadająca jednemu cylindrowi i skupiona na osi sworznia tłokowego,

O — położenie środka ciężkości układu w położeniu spoczynkowym układu drgającego i przy $\varphi = 0$,

r — długość ramienia korby,

u, v, w przemieszczenia środka ciężkości układu drgającego w kierunkach osi $0x, 0y, 0z$,

u_i, v_i, w_i przemieszczenia punktów zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

$0x, 0y, 0z$ nieruchome osie, pokrywające się z głównymi osiami bezwładności $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$ układu drgającego w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

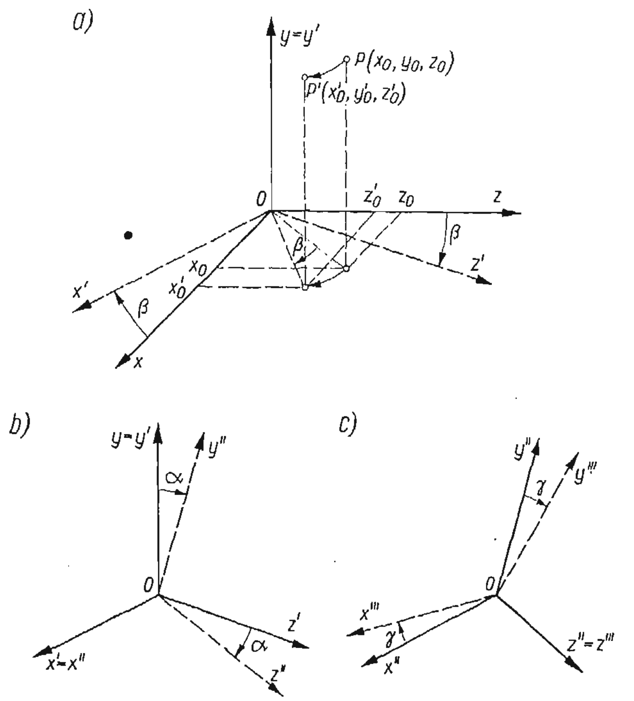
x_i, y_i, z_i współrzędne punktu zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

α, β, γ kąty obrotu układu drgającego wokół osi $0'x'$, $0'y'$ i $0'z'$,

2δ kąt pomiędzy płaszczyznami dwóch rzędów cylindrowych,

ξ, η, ζ przemieszczenia mas niewyrównoważonych w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

$\varphi, \varphi+d_1\pi, \varphi+2d_2\pi, \ldots \varphi+nd_n\pi, \ldots \varphi+(c-1)d_{c-1}\pi$ kąty obrotu kolejnych wykorbień.



Rys. 2

W celu wyznaczenia przemieszczeń poszczególnych punktów układu przy jego drganiach rozpatrzymy przemieszczenia względem nieruchomego układu współrzędnych x, y, z punktu P ciała obracającego się o kąty α, β i γ wokół trzech wzajemnie prostopadłych osi, związanych z tym ciałem (rys. 2). Niech osie związane z ciałem pokrywają się w stanie spoczynku z osiami x, y, z, a współrzędne punktu P w układzie x, y, z w stanie spoczynku będą x_0, y_0, z_0. Po dokonaniu obrotu ciała o kąt β wokół osi y (rys. 2a) osie związane z ciałem zajmą położenia $x', y' = y, z'$, a punkt P zajmie położenie P' o współrzędnych w układzie x, y, z:

$$x_0' = x_0\cos\beta + z_0\sin\beta, \quad y_0' = y_0, \quad z_0' = z_0\cos\beta - x_0\sin\beta. \tag{2.1}$$

W układzie x', y', z' punkt P' ma współrzędne x_0, y_0, z_0, zatem po obrocie ciała o kąt α względem osi x' (rys. 2b) punkt P' zajmie położenie o współrzędnych w układzie x', y', z':

$$x_0, \quad y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha, \quad z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha. \tag{2.2}$$

Jeśli punkt o współrzędnych x_0, y_0, z_0 w układzie x', y', z' ma względem układu x, y, z współrzędne (2.1), to punkt o współrzędnych (2.2) ma względem układu x, y, z współrzędne:

$$\begin{aligned} x_0'' &= x_0\cos\beta + (z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\sin\beta,\\ y_0'' &= y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha,\\ z_0'' &= (z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\cos\beta - x_0\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analogicznie po obrocie ciała o kąt γ wokół osi z'' (rys. 2c) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_0''' &= (x_0\cos\gamma - y_0\sin\gamma)\cos\beta + [z_0\cos\alpha + (y_0\cos\gamma + x_0\sin\gamma)\sin\alpha]\sin\beta,\\ y_0''' &= (y_0\cos\gamma + x_0\sin\gamma)\cos\alpha - z_0\sin\alpha,\\ z_0''' &= [z_0\cos\alpha + (y_0\cos\gamma - x_0\sin\gamma)\sin\alpha]\cos\beta - (x_0\cos\gamma - y_0\sin\gamma)\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wyznaczymy teraz odpowiednie przemieszczenia poszczególnych punktów silnika. Dla $\delta = 0$ przemieszczenia mas m_{p1} i m_{p2} wywołane obrotem korby o kąt φ wynoszą [8]

$$(\eta)_{m_{p1/2}} = -r\left(1 - \cos\varphi + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2\varphi + \frac{3}{64}\lambda^3 + \ldots\right), \quad \lambda = \frac{r}{L}. \tag{2.5}$$

Dla $\delta > 0$ przemieszczenia mas m_{p1} i m_{p2} w kierunkach osi cylindrów odpowiadających tym masom, wywołane obrotem korby o kąt φ, wyniosą z pominięciem członów zawierających λ w potęgach trzeciej i wyższych

$$(\eta)^0_{m_{p1/2}} = -r\left[1 - \cos(\varphi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(\varphi \mp \delta)\right]. \tag{2.6}$$

W wyrażeniu tym i następnych w przypadkach podwójnych znaków „+" i „−" górny znak dotyczy masy m_{p1}, a dolny — m_{p2}.

Współrzędne niewyrównoważonych mas odpowiadających n-temu wykorbieniu w położeniu spoczynkowym układu dla $\varphi = 0$ wynoszą:

$$\begin{aligned} (x_n)_{m_{p1/2}} &= a_n \pm e,\\ (y_n)_{m_{p1/2}} &= b_1 - r\left[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right]\cos\delta,\\ (z_n)_{m_{p1/2}} &= c_1 \pm r\left[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right]\sin\delta,\\ (x_n)_{m_0} &= a_n, \quad (y_n)_{m_0} = b_0 + r\cos nd_n\pi, \quad (z_n)_{m_0} = c_0 - r\sin nd_n\pi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie oznaczono:

$$b_1 = b_0 + (r+L)\cos\delta, \quad c_1 = c_0 \mp (r+L)\sin\delta.$$

Na skutek przemieszczeń u, v, w i odchyleń silnika o kąty β, α, γ niewyrównoważone masy n-tego wykorbienia osiągają przy $\varphi = 0$ zgodnie z (2.4) i (2.7) położenia o współrzędnych:

$$
\begin{aligned}
(x_n)_{m_{p1/2}} &= u + \Bigg[(a_n \pm e)\cos\gamma - \Big\{ b_1 - r\Big[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \\
&\quad - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\Big]\cos\delta \Big\}\sin\gamma \Bigg]\cos\beta + \Bigg[\Big\{ c_1 \pm r\Big[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp\delta)\Big]\sin\delta\Big\}\cos\alpha + \Big\{ b_1 - r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\cos\delta\Big\}\sin\alpha\cos\gamma + (a_n \pm e)\sin\alpha\sin\gamma\Bigg]\sin\beta, \\
(y_n)_{m_{p1/2}} &= v + \Bigg[\Big\{ b_1 - r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\cos\delta\Big\} \times \\
&\quad \times \cos\gamma + (a_n \pm e)\sin\gamma\Bigg]\cos\alpha - \Big\{ c_1 \pm r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) \pm \frac{1}{4}\lambda - \\
&\quad - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\sin\delta\Big\}\sin\alpha, \\
(z_n)_{m_{p1/2}} &= w + \Bigg[\Big\{ c_1 \pm r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\sin\delta\Big\} \times \\
&\quad \times \cos\alpha + \Big\{ b_1 - r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\cos\delta\Big\} \times \\
&\quad \times \cos\gamma\sin\alpha - (a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\Bigg]\cos\beta - \Bigg[(a_n\pm e)\cos\gamma - \Big\{ b_1 - \\
&\quad - r\Big[1 - \cos(nd_n\pi\mp\delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Big]\cos\delta\Big\}\sin\gamma\Bigg]\sin\beta, \\
(x_n)_{m_0} &= u + [a_n\cos\gamma - (b_0 + r\cos nd_n\pi)\sin\gamma]\cos\beta + \{(c_0 - r\sin nd_n\pi)\cos\alpha + \\
&\quad + [(b_0 + r\cos nd_n\pi)\cos\gamma + a_n\sin\gamma]\sin\alpha\}\sin\beta, \\
(y_n)_{m_0} &= v + [(b_0 + r\cos nd_n\pi)\cos\gamma + a_n\sin\gamma]\cos\alpha - (c_0 - r\sin nd_n\pi)\sin\alpha, \\
(z_n)_{m_0} &= w + \{(c_0 - r\sin nd_n\pi)\cos\alpha + [(b_0 + r\cos nd_n\pi)\cos\gamma - \\
&\quad - a_n\sin\gamma]\sin\alpha\}\cos\beta - [a_n\cos\gamma - (b_0 + r\cos nd_n\pi)\sin\gamma]\sin\beta.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Różnica współrzędnych (2.8) i (2.7) stanowi przemieszczenia niewyrównoważonych mas w kierunkach osi $0x$, $0y$ i $0z$ na skutek ruchów silnika przy $\varphi = 0$.

Współrzędne niewyrównoważonych mas w położeniu spoczynkowym układu przy $\varphi \neq 0$ są:

$$
\begin{aligned}
&(x_n)_{m_{p1/2}} = a_n \pm e, \quad (y_n)_{m_{p1/2}} = b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta, \\
&\qquad\qquad (z_n)_{m_{p1/2}} = c_1 \pm r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\sin\delta, \\
&(x_n)_{m_0} = a_n, \quad (y_n)_{m_0} = b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi), \quad (z_n)_{m_0} = c_0 - r\sin(\varphi + nd_n\pi),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

gdzie

$$f_1 = \cos(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda\cos 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta).$$

W wyniku ruchów silnika niewyrównoważone masy zajmą przy $\varphi \neq 0$ położenia o współrzędnych:

$$(x_n)_{m_{p1/2}} = u + \left\{(a_n \pm e)\cos\gamma - \left[b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\cos\beta -$$
$$- \left\{\left[c_1 \pm r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha + \left[b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta\right] \times\right.$$
$$\left. \times \cos\gamma\sin\alpha + (a_n \pm e)\sin\gamma\sin\alpha\right\}\sin\beta,$$

$$(y_n)_{m_{p1/2}} = v + \left\{\left[b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta\right]\cos\gamma + (a_n \pm e)\sin\gamma\right\}\cos\alpha -$$
$$- \left[c_1 \pm r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\sin\delta\right]\sin\alpha,$$

$$(2.10) \quad (z_n)_{m_{p1/2}} = w + \left\{\left[c_1 \pm r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha + \left[b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right) \times\right.\right.$$
$$\left.\times \cos\delta\right]\cos\gamma\sin\alpha - (a_n \pm e)\sin\alpha\sin\gamma\Big\}\cos\beta - \left\{(a_n \pm e)\cos\gamma -\right.$$
$$\left. - \left[b_1 - r\left(1 + \frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\sin\beta,$$

$$(x_n)_{m_0} = u + \{a_n\cos\gamma - [b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi)]\sin\gamma\}\cos\beta + [[c_0 - r\sin(\varphi +$$
$$+ nd_n\pi)]\cos\alpha + \{[b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi)]\cos\gamma + a_n\sin\gamma\}\sin\alpha]\sin\beta,$$
$$(y_n)_{m_0} = v + \{[b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi)]\cos\gamma + a_n\sin\gamma\}\cos\alpha -$$
$$- [c_0 - r\sin(\varphi + nd_n\pi)]\sin\alpha,$$
$$(z_n)_{m_0} = w + [[c_0 - r\sin(\varphi + nd_n\pi)]\cos\alpha + \{[b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi)]\cos\gamma -$$
$$- a_n\sin\gamma\}\sin\alpha]\cos\beta - \{a_n\cos\gamma - [b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi)]\sin\gamma\}\sin\beta.$$

Różnica współrzędnych (2.10) i (2.8) stanowi przemieszczenia niewyrównoważonych mas n-tego wykorbienia wywołane obrotem wału o kąt φ:

$$(\xi_n^\varphi)_{m_{p1/2}} = r\left[f_1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right](\cos\delta\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma -$$
$$- \cos\delta\cos\beta\sin\gamma \mp \sin\delta\cos\alpha\sin\beta),$$

$$(2.11) \quad (\eta_n^\varphi)_{m_{p1/2}} = r\left[f_1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right](\cos\delta\cos\alpha\cos\gamma \mp$$
$$\mp \sin\delta\sin\alpha),$$

$$(\zeta_n^\varphi)_{m_{p1/2}} = r\left[f_1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right](\cos\delta\sin\beta\sin\gamma +$$
$$+ \cos\delta\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma \mp \sin\delta\cos\alpha\cos\beta),$$

$$(2.11)\ [\text{c.d.}]\quad \begin{aligned}(\xi_n^\varphi)_{m_0} &= r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi](\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\\ &\quad +r[\sin nd_n\pi-\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\sin\beta,\\ (\eta_n^\varphi)_{m_0} &= r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi]\cos\alpha\cos\gamma+r[\sin(\varphi+nd_n\pi)-\sin nd_n\pi]\sin\alpha.\\ (\zeta_n^\varphi)_{m_0} &= r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi](\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)-\\ &\quad -r[\sin(\varphi+nd_n\pi)-\sin nd_n\pi]\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Wypadkowe przemieszczenia niewyrównoważonych mas n-tego wykorbienia są sumą przemieszczeń wynikających z różnicy współrzędnych (2.8) i (2.7) oraz przemieszczeń (2.11):

$$\begin{aligned}(\xi_n)_{m_{p1/2}} &= u+(a_n\mp e)(\cos\beta\cos\gamma-1)-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\cos\beta\sin\gamma+\\ &\quad +\left\{\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\times\right.\\ &\quad \left.\times\sin\alpha\cos\gamma+(a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\right\}\sin\beta,\\ (\eta_n)_{m_{p1/2}} &= v+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right](\cos\alpha\cos\gamma-1)+(a_n\pm e)\cos\alpha\sin\gamma-\\ &\quad -\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\sin\alpha+r\left[f_1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\right.\\ &\quad \left.-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right]\cos\delta\cos\alpha\cos\gamma,\end{aligned}$$

$$(2.12)\quad \begin{aligned}(\zeta_n)_{m_{p1/2}} &= w\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right](\cos\alpha\cos\beta-1)+\\ &\quad +\left\{\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\cos\gamma\sin\alpha-(a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\right\}\cos\beta-\\ &\quad -\left\{(a_n\pm e)\cos\gamma-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\sin\beta\mp r\left[f_1-\right.\\ &\quad \left.-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right]\sin\delta\cos\alpha\cos\beta,\\ (\xi_n)_{m_0} &= u+a_n(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma-1)+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\times\\ &\quad \times(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\sin\beta,\\ (\eta_n)_{m_0} &= v+a_n\cos\alpha\sin\gamma+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\cos\gamma-(b_0+r\cos nd_n\pi)-\\ &\quad -[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\sin\alpha,\\ (\zeta_n)_{m_0} &= w-a_n(\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma)+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)](\sin\alpha\cos\beta\times\\ &\quad \times\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)+[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\cos\beta-(c_0-r\sin nd_n\pi).\end{aligned}$$

Przemieszczenia punktu zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego wyniosą na podstawie (2.4):

$$(2.13)\quad \begin{aligned}u_i &= u-x_i+(x_i\cos\gamma-y_i\sin\gamma)\cos\beta+[z_i\cos\alpha+(y_i\cos\gamma+x_i\sin\gamma)\sin\alpha]\sin\beta,\\ v_i &= v-y_i+(y_i\cos\gamma+x_i\sin\gamma)\cos\alpha-z_i\sin\alpha,\\ w_i &= w-z_i+[z_i\cos\alpha+(y_i\cos\gamma-x_i\sin\gamma)\sin\alpha]\cos\beta-(x_i\cos\gamma-y_i\sin\gamma)\sin\beta.\end{aligned}$$

Energię kinetyczną układu drgającego wyrazić można następująco:

$$(2.14)\quad T_0 = \frac{1}{2}[m-c(m_{p1}+m_{p2}+m_0)](\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)+\frac{1}{2}I'_x\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}I'_y\dot{\beta}^2+\frac{1}{2}I'_z\dot{\gamma}^2+$$

$$+\frac{1}{2}I'\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{c-1}\{m_{p1}[(\dot{\xi}_n)^2_{mp1}+(\dot{\eta}_n)^2_{mp1}+(\dot{\zeta}_n)^2_{mp1}]+m_{p2}[(\dot{\xi}_n)^2_{mp2}+(\dot{\eta}_n)^2_{mp2}+$$

$$+(\dot{\zeta}_n)^2_{mp2}]+m_0[(\dot{\xi}_n)^2_{m0}+(\dot{\eta}_n)^2_{m0}+(\dot{\zeta}_n)^2_{m0}]\},$$

gdzie I'_x, I'_y, I'_z oznaczają główne momenty bezwładności układu drgającego bez mas niewyrównoważonych, I' — moment bezwładności wirujących mas wyrównoważonych względem osi wału.

Przyjmiemy, że w położeniu spoczynkowym i przy $\varphi = 0$ energia potencjalna układu drgającego jest równa zeru. W czasie drgań układu energię potencjalną określimy jako sumę przyrostu energii potencjalnej podkładek elastycznych na skutek ich odkształceń i przyrostu energii potencjalnej niewyrównoważonych mas wynikającego z pionowych przemieszczeń tych mas na skutek obrotu wału korbowego

$$(2.15)\quad V = \frac{1}{2}\sum_i (c_{xi}u_i^2+c_{yi}v_i^2+c_{zi}w_i^2+k_{xi}\alpha^2+k_{yi}\beta^2+k_{zi}\gamma^2)+$$

$$+g\sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(\eta_n^{\varphi})_{mp1}+m_{p2}(\eta_n^{\varphi})_{mp2}+m_0(\eta_n^{\varphi})_{m0}].$$

Opór tłumienia przy obracaniu wału korbowego możemy zastąpić równoważnym oporem wiskotycznym o współczynniku h i przedstawić funkcję rozproszenia energii (Rayleigha) w postaci

$$(2.16)\quad D = \frac{1}{2}\sum_i (l_{xi}\dot{u}_i^2+l_{yi}\dot{v}^2+l_{zi}\dot{w}_i^2+h_{xi}\dot{\alpha}^2+h_{yi}\dot{\beta}^2+h_{zi}\dot{\gamma}^2)+\frac{1}{2}h\dot{\varphi}^2.$$

Powyższe zależności mogą być wykorzystane do analizy układów drgających z silnikami o dowolnej ilości cylindrów i stopni swobody oraz o dowolnych układach wykorbień i podkładek elastycznych, przy czym zestawione na ich podstawie równania ruchu zawierają dokładne zależności określające wszystkie siły i momenty działające na silnik.

3. Analiza pionowych drgań silnika dwucylindrowego

Moment napędowy silnika od sił gazowych wyrazić można w postaci [8]

$$(3.1)\quad M_s = crT+\sum_k C_k^{(c)}\sin(\xi k\varphi+\vartheta_k^{(c)}),$$

gdzie T oznacza średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorbienia na promieniu r, będącą nieliniową funkcją prędkości kątowej o postaci [9]: $T = A_0+A_1\dot{\varphi}+A_2\dot{\varphi}^2+A_3\dot{\varphi}^3+\ldots$, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — stałe; $C_k^{(c)}$, $\vartheta_k^{(c)}$ — amplitudę i fazę k-tej harmonicznej silnika o c wykorbieniach, traktowane w pierwszym przybliżeniu jako stałe i odpowiadające średniej prędkości kątowej; ξ — ilość cykli pracy przypadającą na jeden obrót wału, tj. $\xi = 1/2$ dla 4-suwów i $\xi = 1$ dla 2-suwów.

Analogicznie przedstawimy moment oporowy odbiornika mocy

$$M_B = B + \sum_l B_l \sin(\eta l\varphi + \sigma_l). \tag{3.2}$$

Analizując drgania pionowe silnika przyjmiemy jako współrzędne uogólnione v i φ. Na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju i zależności wyprowadzonych w rozdziale 2 otrzymujemy następujące równania ruchu dla silnika o c wykorbieniach:

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + \dot{v}\sum_i l_{yi} + v\sum_i c_{yi} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & m_{p1} r\dot{\varphi}^2[\cos(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + \\ & + nd_n\pi - \delta)]\cos\delta + m_{p1} r\ddot{\varphi}\left[\sin(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi - \delta)\right]\cos\delta + \\ & + m_{p2} r\dot{\varphi}^2[\cos(\varphi + nd_n\pi + \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)]\cos\delta + m_{p2} r\ddot{\varphi}\Big[\sin(\varphi + \\ & + nd_n\pi + \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)\Big]\cos\delta + m_0 r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi + nd_n\pi) + \\ & + m_0 r\ddot{\varphi}\sin(\varphi + nd_n\pi)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$I\ddot{\varphi} + \Delta M - m_{p1}(K_1 + L_1) - m_{p2}(K_2 + L_2) - m_0 Q_0 = R_0^{(c)}, \tag{3.4}$$

gdzie:

$$I = I' + cr^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda^2\right)(m_{p1} + m_{p2}) + cm_0 r^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta M = -r\ddot{v}\sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & m_{p1}\cos\delta\left[\sin(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi - \delta)\right] + \\ & + m_{p2}\cos\delta\left[\sin(\varphi + nd_n\pi + \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)\right] + m_0\sin(\varphi + nd_n\pi)\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1/2} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}^2\Big[\frac{1}{2}\lambda\sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) - \sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) - \frac{3}{2}\lambda\sin 3(\varphi + \\ & + nd_n\pi \mp \delta) - \frac{1}{2}\lambda^2\sin 4(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big] + gr\Big[\sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \\ & + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big]\cos\delta\Big\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} L_{1/2} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & \frac{1}{2} r^2\ddot{\varphi}\Big[-\lambda\cos(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \cos 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \\ & + \lambda\cos 3(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 4(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{c-1} gr\sin(\varphi + nd_n\pi),$$

(3.5) [c.d.]

$$R_0^{(c)} = crT - B + \sum_k C_k^{(c)} \sin(\xi k\varphi + \nu_k^{(c)}) - \sum_l B_l \sin(\eta l\varphi + \sigma_l) - h\dot{\varphi}.$$

Występujący w równaniu (3.4) człon ΔM nazwiemy dodatkowym momentem oporowym. W równaniu momentów na wale silnika w przypadku sztywnego posadowienia człon ten jest równy zeru.

Dla silnika dwucylindrowego ($c = 1$, $n = 0$) równania (3.3) i (3.4) przyjmują, dla $m_{p1} = m_{p2} = m_p$ i przy oznaczeniach $\sum_i l_{yi} = l_y$, $\sum_i c_{yi} = c_y$, postać:

$$m\ddot{v} + l_y\dot{v} + c_y v = 2m_p r\Big[\dot{\varphi}^2(\cos\varphi\cos^2\delta + \lambda\cos 2\delta\cos\delta) + \tag{3.6}$$

$$+\ddot{\varphi}\Big(\sin\varphi\cos^2\delta + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\cos\delta\Big)\Big] + m_0 r(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi),$$

$$I\ddot{\varphi} - r\ddot{v}\Big[2m_p\Big(\sin\varphi\cos\delta + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\Big) + m_0\sin\varphi\Big] - \tag{3.7}$$

$$-m_p r\Big[r\dot{\varphi}^2\Big(\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi\cos\delta - \sin 2\varphi\cos 2\delta - \frac{3}{2}\lambda\sin 3\varphi\cos 3\delta -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2\sin 4\varphi\cos 4\delta\Big) + 2g\Big(\sin\varphi\cos\delta + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\Big) + r\ddot{\varphi}\Big(-\lambda\cos\varphi\cos\delta +$$

$$+\cos 2\varphi\cos 2\delta + \lambda\cos 3\varphi\cos 3\delta + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 4\varphi\cos 4\delta\Big)\Big] - m_0 gr\sin\varphi = R_0^{(1)}.$$

Uwzględniając, że niewyrównoważenie silnika i tłumienie w układzie amortyzacji mają w praktyce małe wartości, możemy do rozwiązania równań typu (3.3) i (3.4) zastosować asymptotyczną metodę KRYŁOWA-BOGOLUBOWA-MITROPOLSKIEGO [10, 11]. W celu umożliwienia analizowania zachowania się drgającego układu także w obszarze rezonansowym, w którym różnica faz pomiędzy drganiami własnymi i wymuszeniem okazuje istotny wpływ na zmiany amplitudy i fazy drgań, poszukiwać będziemy rozwiązań równań (3.6) i (3.7) w pierwszym przybliżeniu w postaci

$$\begin{aligned} v &= a\cos(\varphi+\psi) + \varepsilon u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega), \\ \dot{\varphi} &= \omega, \end{aligned} \tag{3.8}$$

gdzie ε oznacza mały parametr, u_1 jest małą funkcją okresową, natomiast a, ψ i ω są płynnie zmieniającymi się wielkościami, określonymi równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a, \psi, \omega), \\ \dot{\psi} &= b - \omega + \varepsilon B_1(a, \psi, \omega), \qquad b^2 = \frac{c_y}{m}, \\ \dot{\omega} &= \varepsilon D_1(a, \psi, \omega). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Z dokładnością do członów pierwszego rzędu małości możemy z uwzględnieniem zależności (3.8) i (3.9) napisać:

$$\dot{v} = -ab\sin(\varphi+\psi)+\varepsilon\left[A_1\cos(\varphi+\psi)-aB_1\sin(\varphi+\psi)+b\frac{\partial u_1}{\partial(\varphi+\psi)}+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right],$$

$$\ddot{v} = -ab^2\cos(\varphi+\psi)+\varepsilon\left\{\left[(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2abB_1\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2bA_1\right]\sin(\varphi+\psi)+b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2}+2b\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)\partial\varphi}+\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{3.10}$$

Po wprowadzeniu do równań (3.6) i (3.7) małego parametru i po podstawieniu zależności (3.10) otrzymujemy równania:

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+2b\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)\partial\varphi}+b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2}+b^2u_1-\left[2bA_1+a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right]\times$$
$$\times\sin(\varphi+\psi)-\left[2abB_1-(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\right]\cos(\varphi+\psi) = \frac{1}{m}[abl_y\sin(\varphi+\psi)+$$
$$+2m_pr\omega^2(\cos\varphi\cos^2\delta+\lambda\cos2\varphi\cos2\delta\cos\delta)+m_0r\omega^2\cos\varphi], \tag{3.11}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I}\left\{R_0^{(1)}-ab^2r\cos(\varphi+\psi)\left[2m_p\left(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin2\varphi\cos2\delta\right)+m_0\sin\varphi\right]+\right.$$
$$+m_pr^2\omega^2\left(\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi\cos\delta-\sin2\varphi\cos2\delta-\frac{3}{2}\lambda\sin3\varphi\cos3\delta-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\lambda^2\sin4\varphi\cos4\delta\right)+2m_pgr\left(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin2\varphi\cos2\delta\right)+m_0gr\sin\varphi\right\}. \tag{3.12}$$

Z równania (3.11) można wyznaczyć funkcje u_1, A_1 i B_1, przy czym w celu jednoznacznego ich wyznaczenia postawimy warunek, aby a była pełną amplitudą pierwszej harmoniki zmiennej $(\varphi+\psi)$, tzn. poszukiwać będziemy rozwiązań na u_1 w postaci

$$u_1 = \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{g_{n_1,n_2}\cos[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]+h_{n_1,n_2}\sin[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]\},\qquad n_1+n_2\neq\pm1. \tag{3.13}$$

W wyniku otrzymujemy:

$$u_1 = \frac{2m_pr\lambda\omega^2}{m(b^2-4\omega^2)}\cos2\delta\cos\delta\cos2\varphi. \tag{3.14}$$

Porównując współczynniki stojące przed funkcjami $\sin(\varphi+\psi)$ i $\cos(\varphi+\psi)$ po obu stronach równania (3.11) z uwzględnieniem (3.14) otrzymujemy równania:

$$2bA_1+a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi} = -\frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2\sin\psi-\frac{1}{m}abl_y,$$

$$2abB_1-(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} = -\frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2\cos\psi,$$

skąd

$$(3.15)\qquad A_1 = -\frac{2m_p\cos^2\delta+m_0}{m(\omega+b)}r\omega^2\sin\psi-\frac{1}{2m}al_y,\quad B_1 = -\frac{2m_p\cos^2\delta+m_0}{am(\omega+b)}r\omega^2\cos\psi.$$

Funkcję D_1 wyznaczamy z równania (3.12) przez uśrednienie prawej strony tego równania po $(\varphi+\psi)$ w okresie 2π

$$(3.16)\qquad D_1 = \frac{1}{I}\left[rT-B-h\omega+\frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta+m_0)ab^2r\sin\psi\right].$$

Na podstawie równań (3.9) i zależności (3.15), (3.16) wyznaczyć można wielkości a, ψ i ω. W stanach nieustalonych posłużyć się można metodą Eulera, zgodnie z którą proces rozpoczynający się w chwili t_0 od wartości a_0, ψ_0 i ω_0 określa się z zależności:

$$a_{t=t_0+\Delta t} = a_0+\Delta t(\dot{a})_{t=t_0},\quad a_{t=t_0+2\Delta t} = a_{t=t_0+\Delta t}+\Delta t(\dot{a})_{t=t_0+\Delta t},\ \ldots$$

i z analogicznych zależności dla wielkości ψ i ω.

Dla stanów ustalonych równania (3.9) mają rozwiązania:

$$(3.17)\qquad a = \frac{(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2}{m(\omega+b)\sqrt{(b-\omega)^2+\left(\frac{l_y}{2m}\right)^2}},\qquad \psi = \operatorname{arctg}\left[\frac{l_y}{2m(\omega-b)}\right],$$

a ω spełnia równanie:

$$(3.18)\qquad rT-B-h\omega-\frac{1}{4\omega^2}a^2b^2l_y(\omega+b) = 0,$$

w którym człon

$$(3.19)\qquad (\Delta M)_0 = \frac{1}{4\omega^2}a^2b^2l_y(\omega+b)$$

stanowi stały, w stanach ustalonych, składnik dodatkowego momentu oporowego, powodujący spadek prędkości kątowej silnika $\Delta\omega = \omega_0-\omega$ i stratę mocy w porównaniu ze sztywnym posadowieniem

$$(3.20)\qquad (\Delta N)_0 = (\Delta M)_0\omega,$$

gdzie ω_0 spełnia równanie:

$$(3.21)\qquad rT-B-h\omega_0 = 0.$$

Z uwzględnieniem zależności (3.17) otrzymujemy:

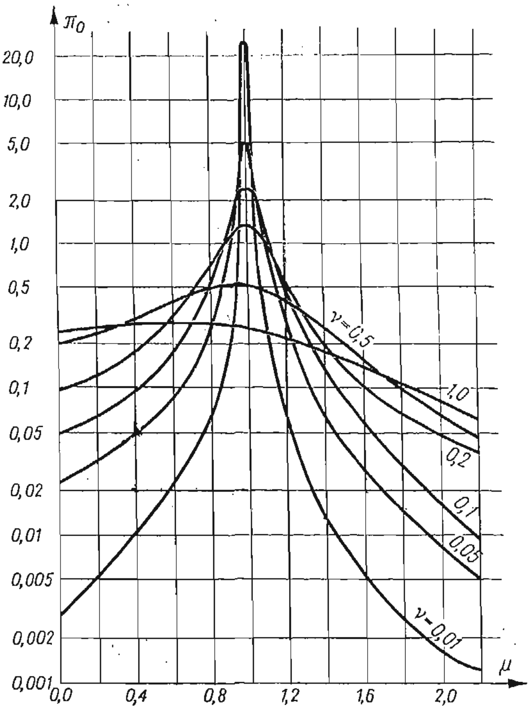
$$(3.22)\qquad (\Delta M)_0 = M_0\pi_0,\quad (\Delta N)_0 = M_0\pi_0\omega,$$

gdzie

$$(3.23)\qquad M_0 = \frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)^2r^2\omega^2,\quad \pi_0 = \frac{\nu}{2(\mu+1)[(1-\mu)^2+\nu^2]},$$

$$\nu = \frac{l_y}{2mb},\quad \mu = \frac{\omega}{b}.$$

Zależność wartości π_0 od wartości stosunku częstości μ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika ν przedstawiono wykreślnie na rys. 3. Zależność ta umożliwia dobór systemu amortyzacji zapewniającego odpowiednio małe straty energetyczne. Wynika



Rys. 3

z niej, że w obszarze rezonansowym korzystne są duże współczynniki tłumienia podkładek elastycznych, a w warunkach nierezonansowych — małe.

4. Nieliniowe drgania silników wielocylindrowych o 6 stopniach swobody

Rozpatrzymy przypadek drgań silników wielocylindrowych o 6 stopniach swobody, przy czym uwzględnimy, że amlitudy drgań obrotowych α, β i γ są w praktyce małe i w rozkładach funkcji trygonometrycznych tych kątów w szeregi potęgowe zachowamy tylko pierwsze wyrazy. Ograniczymy się do analizy stanów ustalonych oraz bliskich ustalonym, w których $\ddot{\varphi}$ jest małą wielkością i pominiemy człony proporcjonalne do iloczynów $m_{p1/2}\ddot{\varphi}$ i $m_0\ddot{\varphi}$ jako człony drugiego rzędu małości. Otrzymujemy wtedy na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju oraz zależności (2.11)—(2.16) i (3.1), (3.2) następujące równania ruchu:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{u}+c_x u-U_y\gamma+U_z\beta = R_1+m_{p1}(F_1)_1+m_{p2}(F_1)_2+m_0Q_1,\\
(4.1)\qquad &m\ddot{v}+c_y v-V_z\alpha+V_x\gamma = R_2+m_{p1}(F_2)_1+m_{p2}(F_2)_2+m_0Q_2,\\
&m\ddot{w}+c_z w-W_x\beta+W_y\alpha = R_3+m_{p1}(F_3)_1+m_{p2}(F_3)_2+m_0Q_3,
\end{aligned}
$$

(4.1) [c.d.]
$$I_x\ddot{\alpha}+c_{xx}\alpha-V_z v+W_y w-c_{zx}\gamma-c_{xy}\beta-crT(\omega_0) = R_4+m_{p1}(F_4)_1+m_{p2}(F_4)_2+m_0Q_4,$$
$$I_y\ddot{\beta}+c_{yy}\beta-W_x w-U_z u+c_{xy}\alpha-c_{yz}\gamma = R_5+m_{p1}(F_5)_1+m_{p2}(F_5)_2+m_0Q_5,$$
$$I_z\ddot{\gamma}+c_{zz}\gamma-U_y u+V_x v-c_{yz}\beta-c_{zx}\alpha = R_6+m_{p1}(F_6)_1+m_{p2}(F_6)_2+m_0Q_6,$$
$$I\ddot{\varphi} = R_0^{(c)}+m_{p1}(F_7)_1+m_{p2}(F_7)_2+m_0Q_7,$$

gdzie:

$$c_x = \sum_i c_{xi},\quad c_y = \sum_i c_{yi},\quad c_z = \sum_i c_{zi},\quad U_y = \sum_i c_{xi}y_i,\quad V_z = \sum_i c_{yi}z_i,$$
$$W_x = \sum_i c_{zi}x_i,\quad V_x = \sum_i c_{yi}x_i,$$

$$W_y = \sum_i c_{zi}y_i,\quad U_z = \sum_i c_{xi}z_i,\quad c_{xx} = \sum_i (k_{xi}+c_{yi}z_i^2+c_{zi}y_i^2),$$
$$c_{yy} = \sum_i (k_{yi}+c_{xi}z_i^2+c_{zi}x_i^2),$$

$$c_{zz} = \sum_i (k_{zi}+c_{xi}y_i^2+c_{yi}x_i^2),\quad c_{xy} = c_{yx} = \sum_i c_{zi}x_iy_i,\quad c_{yz} = c_{zy} = \sum_i c_{xi}y_iz_i,$$
$$c_{zx} = c_{xz} = \sum_i c_{yi}z_ix_i,$$

$$l_x = \sum_i l_{xi},\quad l_y = \sum_i l_{yi},\quad l_z = \sum_i l_{zi},\quad U'_y = \sum_i l_{xi}y_i,\quad V'_z = \sum_i l_{yi}z_i,$$
$$W'_x = \sum_i l_{zi}x_i,\quad V'_x = \sum_i l_{yi}x_i,$$

$$W'_y = \sum_i l_{zi}y_i,\quad U'_z = \sum_i l_{xi}z_i,\quad l_{xx} = \sum_i (h_{xi}+l_{yi}z_i^2+l_{zi}y_i^2),\quad l_{yy} = \sum_i (h_{yi}+l_{xi}z_i^2+l_{zi}x_i^2),$$

$$l_{zz} = \sum_i (h_{zi}+l_{xi}y_i^2+l_{yi}x_i^2),\quad l_{xy} = l_{yx} = \sum_i l_{zi}x_iy_i,\quad l_{yz} = l_{zy} = \sum_i l_{xi}y_iz_i,$$
$$l_{zx} = l_{xz} = \sum_i l_{yi}z_ix_i,$$

$$R_1 = -l_x\dot{u}+U'_y\dot{\gamma}-U'_z\dot{\beta},\quad R_2 = -l_y\dot{v}+V'_z\dot{\alpha}-V'_x\dot{\gamma},\quad R_3 = -l_z\dot{w}+W'_x\dot{\beta}-W'_y\dot{\alpha},$$

$$R_4 = \sum_k C_k^{(c)}\sin(\xi k\varphi+\vartheta_k^{(c)})+\tau(\dot{\varphi})-l_{xx}\dot{\alpha}+V'_z\dot{v}-W'_y\dot{w}+l_{zx}\dot{\gamma}+l_{xy}\dot{\beta},$$
$$crT(\omega_0) = crT(\dot{\varphi})-\tau(\dot{\varphi}),$$

$$R_5 = -l_{yy}\dot{\beta}+W'_x\dot{w}-U'_z\dot{u}+l_{xy}\dot{\alpha}+l_{yz}\dot{\gamma},\quad R_6 = -l_{zz}\dot{\gamma}+U'_y\dot{u}-V'_x\dot{v}+l_{yz}\dot{\beta}+l_{zx}\dot{\alpha},$$

$$I_x = I'_x+cm_{p1}\left[c_0-\left(L-\frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2 cm_{p2}\left[c_0+\left(L-\frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2+$$
$$c(m_{p1}+m_{p2})\left[b_1^2+r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\right]+cm_0(b_0^2+c_0^2+r^2),$$

$$I_y = I'_y + cm_{p1}\left[c_0 - \left(L - \frac{1}{4} r\lambda\right)\sin\delta\right]^2 + cm_{p2}\left[c_0 + \left(L - \frac{1}{4} r\lambda\right)\sin\delta\right]^2 +$$

$$+ cr^2(m_{p1}+m_{p2})\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\lambda^2\right)\sin^2\delta + cm_0\left(c_0^2 + \frac{1}{2}r^2\right) + \sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(a_n+e)^2 +$$

$$+ m_{p2}(a_n-e)^2 + m_0 a_n^2],$$

$$I_z = I'_z + c(m_{p1}+m_{p2})\left[b_1^2 + r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\lambda^2\right)\cos^2\delta\right] + cm_0\left(b_0^2 + \frac{1}{2}r^2\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(a_n+e)^2 + m_{p2}(a_n-e)^2 + m_0 a_n^2],$$

$$(F_1)_{1/2} = -\frac{1}{2}\left\{-2cb_1\ddot{\gamma} + 2cc_1\ddot{\beta} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2rf_1(\ddot{\gamma}\cos\delta \pm \ddot{\beta}\sin\delta) +\right.$$

$$\left. + 4rf_3(\dot{\gamma}\cos\delta \pm \dot{\beta}\sin\delta)\dot{\varphi} + 2rf_2(\gamma\cos\delta \pm \beta\sin\delta)\dot{\varphi}^2]\right\},$$

$$f_2 = \cos(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta), \qquad f_3 = \sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta),$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\left\{-2cb_0\ddot{\gamma} + 2cc_0\ddot{\beta} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2r\ddot{\gamma}\cos(\varphi + nd_n\pi) + 4r\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi + nd_n\pi) +\right.$$

$$+ 2r\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi + nd_n\pi) - 2r\ddot{\beta}\sin(\varphi + nd_n\pi) - 4r\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi + nd_n\pi) +$$

$$\left. + 2r\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi + nd_n\pi)]\right\},$$

$$(F_2)_{1/2} = -\frac{1}{2}\left\{-2cc_1\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[2(a_n \pm e)\ddot{\gamma} \pm 2rf_1\ddot{\alpha}\sin\delta \mp 4rf_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta \mp\right.$$

$$\left. \mp 2rf_2(\alpha\sin\delta \pm \cos\delta)\dot{\varphi}^2]\right\},$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}\left\{-2cc_0\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[2a_n\ddot{\gamma} + 2r\ddot{\alpha}\sin(\varphi + nd_n\pi - \alpha) -\right.$$

$$\left. - 2r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})^2\cos(\varphi + nd_n\pi - \alpha)]\right\},$$

$$(F_3)_{1/2} = -\frac{1}{2}\left\{2cb_1\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2\ddot{\beta}(a_n \pm e) + 2rf_1\ddot{\alpha}\cos\delta - 4rf_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta -\right.$$

$$\left. - 2rf_2(\alpha\cos\delta \mp \sin\delta)\dot{\varphi}^2]\right\},$$

$$Q_3 = -\frac{1}{2}\left\{2cb_0\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2a_n\ddot{\beta} + 2r\ddot{\alpha}\cos(\varphi + nd_n\pi - \alpha) +\right.$$

$$\left. + 2r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})^2\sin(\varphi + nd_n\pi - \alpha)]\right\},$$

$$
\begin{aligned}
(F_4)_{1/2} = & -\frac{1}{2}\Bigg[-2cc_1\ddot{v}+2cb_1\ddot{w}+\sum_{n=0}^{c-1}\Bigg\{2r^2\ddot{\alpha}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\\
&+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]-\\
&-2r^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\\
&\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\pm 2rf_1\ddot{v}\sin\delta-2c_1(a_n\pm e)\ddot{\gamma}\pm 2rf_1(a_n\pm e)\ddot{\gamma}\sin\delta\mp\\
&\mp 4rc_1f_1\ddot{\alpha}\sin\delta\pm 2rc_1f_2(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\dot{\varphi}^2-2r^2f_1f_2\alpha\dot{\varphi}^2+2rf_1\ddot{w}\cos\delta-\\
&-2b_1(a_n\pm e)\ddot{\beta}-2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\beta}\cos\delta+4rb_1f_1\ddot{\alpha}\cos\delta-4rb_1f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta-\\
&-2rb_1f_2(\alpha\cos\mp\sin\delta)\dot{\varphi}^2\pm 2gr\Bigg[f_1-\cos nd_n\pi-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\sin\delta\pm\\
&\pm 4rc_1f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_4 = & -\frac{1}{2}\Bigg\{-2cc_0\ddot{v}+2cb_0\ddot{w}+\sum_{n=0}^{c-1}[2r\ddot{v}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2a_nc_0\ddot{\gamma}-\\
&-4rc_0\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2rc_0(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+\\
&+2a_nr\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2r\ddot{w}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2a_nb_0\ddot{\beta}-\\
&-2ra_n\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+4b_0r\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+\\
&+2b_0r(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2gr\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(F_5)_{1/2} = & -\frac{1}{2}\Bigg[2cc_1\ddot{u}\pm cr^2\ddot{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\sin 2\delta+cr^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)(2\ddot{\beta}\sin^2\delta\pm\\
&\pm\ddot{\gamma}\sin 2\delta)-2cb_1c_1\ddot{\gamma}+\sum_{n=0}^{c-1}\Bigg\{-2\ddot{w}(a_n\pm e)-2b_1(a_n\pm e)\ddot{\alpha}-r^2\dot{\varphi}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+\\
&+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\\
&+\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg](2\dot{\beta}\sin^2\delta\pm\dot{\gamma}\sin 2\delta)+r^2\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\\
&+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\times\\
&\times(2\ddot{\beta}\sin^2\delta\pm\ddot{\gamma}\sin 2\delta)\mp 2rf_1\ddot{u}\sin\delta\pm 2rb_1f_1\ddot{\gamma}\sin\delta+4rc_1f_3\dot{\varphi}(\dot{\gamma}\cos\delta\pm\dot{\beta}\sin\delta)-\\
&-2rc_1f_1(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm 2\ddot{\beta}\sin\delta)+2rc_1f_2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\dot{\varphi}^2\pm 2r^2f_3^2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\\
&\pm\beta\sin\delta)\sin\delta\mp 2r^2f_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\sin\delta+4r(a_n\pm e)f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta-\\
&-2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\alpha}\cos\delta+2r(a_n\pm e)f_2\dot{\varphi}^2(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-r^2f_3^2(2\beta\sin^2\delta\pm\gamma\sin 2\delta)\dot{\varphi}^2\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_5 = -\frac{1}{2}\Big\{ & -cr^2\beta\dot{\varphi}^2+2cc_0\ddot{u}+2cb_0c_0\ddot{\gamma}-2cr^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}+\sum_{n=0}^{c-1}[-r^2\ddot{\beta}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+\\
& +2r^2\dot{\beta}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{u}\sin(\varphi+nd_n\pi)+2rb_0\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -2c_0r\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)+4c_0r\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi+nd_n\pi)+2c_0r\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -4c_0r\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)-4c_0r\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi+nd_n\pi)+2a_n\ddot{w}+2c_0r\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+nd_n\pi)+\\
& +r^2\ddot{\gamma}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-2a_nb_0\ddot{\alpha}-r^2\gamma\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+\\
& +r^2\beta\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-2ra_n\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-\\
& -2ra_n(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(F_6)_{1\,2} = -\frac{1}{2}\Bigg[& \pm cr^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\ddot{\beta}\sin 2\delta-2cb_1\ddot{u}-2cb_1c_1\ddot{\beta}+\sum_{n=0}^{c-1}\Big\{2(a_n\pm e)\ddot{v}-\\
& -2(a_n\pm e)c_1\ddot{\alpha}-r^2\dot{\varphi}\left[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\right.\\
& \left.+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](2\dot{\gamma}\cos^2\delta\pm\dot{\beta}\sin 2\delta)+\\
& +r^2\left[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\right.\\
& \left.+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](2\ddot{\gamma}\cos^2\delta\pm\ddot{\beta}\sin 2\delta)-2rf_1\ddot{u}\cos\delta-\\
& -4rb_1f_3\dot{\varphi}(\dot{\gamma}\cos\delta\pm\dot{\beta}\sin\delta)+2rb_1f_1\ddot{\gamma}\cos\delta-2rb_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-\\
& -2rc_1f_1\ddot{\beta}\cos\delta+2r^2\dot{\varphi}^2f_3^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\cos\delta-2r^2f_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\cos\delta+\\
& +2rb_1f_1(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm\ddot{\beta}\sin\delta)\mp 4r(a_n\pm e)f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta\pm 2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\alpha}\sin\delta\mp\\
& 2r(a_n\pm e)f_2\dot{\varphi}^2(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)-r^2f_3^2(2\gamma\cos^2\delta\pm\beta\sin 2\delta)\dot{\varphi}^2\Big\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_6 = -\frac{1}{2}\Big\{ & -cr^2\gamma\dot{\varphi}^2-2cb_0\ddot{u}-2cb_0c_0\ddot{\beta}+2cr^2\dot{\beta}\dot{\varphi}+\sum_{n=0}^{c-1}[r^2\ddot{\gamma}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -2r^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{u}\cos(\varphi+nd_n\pi)+4rb_0\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -4rb_0\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi+nd_n\pi)+2rb_0\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)+\\
& +4rb_0\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+nd_n\pi)-2c_0r\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -r^2\gamma\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\ddot{\beta}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-\\
& -r^2\beta\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2a_n\ddot{v}-2a_nc_0\ddot{\alpha}+2a_nr\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-\\
& -2a_nr(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$(F_7)_{1/2} = -\frac{1}{2}\left[4cr^2\alpha\dot{\alpha}\dot{\varphi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda^2\right)+\sum_{n=0}^{c-1}\left\{2r^2f_2f_3\dot{\varphi}^2(\gamma^2\cos^2\delta\pm\beta\gamma\sin 2\delta+\beta^2\sin^2\delta)+\right.\right.$$
$$+2r^2f_3^2\dot{\varphi}(2\gamma\dot{\gamma}\cos^2\delta\pm\dot{\beta}\gamma\sin 2\delta\pm\beta\dot{\gamma}\sin 2\delta+2\beta\dot{\beta}\sin^2\delta)+2rf_3\ddot{u}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-$$
$$-2rb_1f_3\ddot{\gamma}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)+2rc_1f_3\ddot{\beta}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-2r^2f_1f_3(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm\ddot{\beta}\sin\delta)\times$$
$$\times(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-r^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{1}{2}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](\alpha^2+1)+4r^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\left[\frac{1}{2}\lambda\cos(\varphi+\right.$$
$$+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{8}\lambda^2\cos 4(\varphi+$$
$$\left.+nd_n\pi\mp\delta)\right]\alpha\mp 2rf_3\ddot{v}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\mp 2r(a_n\pm e)f_3\ddot{\gamma}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\pm$$
$$\pm 2rc_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)-2r^2f_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\sin\delta-2rf_3\ddot{w}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)+$$
$$+2r(a_n\pm e)f_3\ddot{\beta}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-2rb_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-2r^2f_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\cos\delta\mp$$
$$\left.\left.\mp\sin\delta)\cos\delta-2grf_3(\cos\delta\pm\alpha\sin\delta)\right\}\right],$$

$$Q_7 = -\frac{1}{2}\left\{2cr^2\gamma\dot{\gamma}\dot{\varphi}+2cr^2\beta\dot{\beta}\dot{\varphi}-2cr^2\ddot{\alpha}+cr^2\beta\ddot{\gamma}-cr^2\ddot{\beta}\gamma+\sum_{n=0}^{c-1}\left[-2r^2\gamma\dot{\gamma}\dot{\varphi}\cos 2\times\right.\right.$$
$$\times(\varphi+nd_n\pi)+r^2\gamma^2\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\beta\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-r^2\beta^2\dot{\varphi}^2\sin 2\times$$
$$\times(\varphi+nd_n\pi)+2r\gamma\ddot{u}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2r\beta\ddot{u}\cos(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\gamma\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi)+$$
$$+2rb_0\beta\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)+2rc_0\gamma\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2c_0r\beta\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi)-$$
$$-r^2\gamma\ddot{\gamma}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\beta\ddot{\gamma}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\gamma\ddot{\beta}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-$$
$$-2r^2\gamma\dot{\beta}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r^2\beta\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r^2\beta\gamma\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+$$
$$+r^2\beta\ddot{\beta}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{v}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2c_0r\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$
$$-2a_nr\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2r\ddot{w}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2ra_n\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$
$$\left.\left.-2b_0r\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2gr\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)\right]\right\}.$$

Człony zgrupowane na prawych stronach równań (4.1) mają w praktyce małe wartości. Gdy prawe strony równań (4.1) są równe zeru, mamy do czynienia z drganiami własnymi o rozwiązaniach:

$$(4.2)\qquad u = u_0+\varrho_1,\quad v = v_0+\varrho_2,\quad w = w_0+\varrho_3,\quad \alpha = \alpha_0+\varrho_4,\quad \beta = \beta_0+\varrho_5,$$
$$\gamma = \gamma_0+\varrho_6,\quad \dot{\varphi} = \text{const}.$$

W rozwiązaniach tych $u_0, \ldots, \gamma_0$ są stałymi składnikami wywołanymi stałą składową momentu reakcyjnego $crT(\omega_0)$, a $\varrho_s (s = 1, \ldots, 6)$ są sumą składników o postaci

$$(4.3)\qquad \varrho_s^{(k)} = \varphi_s^{(k)} a_k\cos(\lambda_k t+\delta_k),\quad s, k = 1, \ldots, 6,$$

gdzie: a_k, δ_k oznaczają stałe określane z warunków początkowych, λ_k są częstościami drgań własnych określanymi z równania charakterystycznego układu, zaś $\varphi_s^{(k)}$ są stałymi spełniającymi równania:

$$\sum_{s=1}^{6}(c_{js}-a_{js}\lambda_k^2)\varphi_s^{(k)}=0,\quad j,k=1,\dots,6 \tag{4.4}$$

i warunki ortogonalności:

$$\sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}a_{sj}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(l)}=0,\quad \sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}c_{js}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(l)}=0,\quad k\neq l; \tag{4.5}$$

$$[a_{js}]=\begin{bmatrix} m&0&0&0&0&0\\ 0&m&0&0&0&0\\ 0&0&m&0&0&0\\ 0&0&0&I_x&0&0\\ 0&0&0&0&I_y&0\\ 0&0&0&0&0&I_z\end{bmatrix},\quad [c_{js}]=\begin{bmatrix} c_x&0&0&0&U_z&-U_y\\ 0&c_y&0&-V_z&0&V_x\\ 0&0&c_z&W_y&-W_x&0\\ 0&-V_z&W_y&c_{xx}&-c_{xy}&-c_{zx}\\ U_z&0&-W_x&-c_{xy}&c_{yy}&-c_{yz}\\ U_y&V_x&0&-c_{zx}&-c_{yz}&c_{zz}\end{bmatrix}.$$

W niniejszej pracy podamy rozwiązania równań (4.1) w pierwszym przybliżeniu. Wykorzystamy tu tę właściwość analizowanego układu, że na skutek istnienia tłumienia i wymuszeń związanych z obrotem wału korbowego ustalą się drgania określone przez częstość wymuszeń i tę spośród częstości drgań własnych, której wartość jest najbardziej zbliżona do wartości częstości wymuszeń. Drgania z innymi częstościami własnymi bądź wygasną, bądź mogą nie być rozpatrywane w pierwszym przybliżeniu [10, 11]. Założymy przy tym, że nie występuje rezonans wewnętrzny.

Po podstawieniu (4.2) do równań (4.1) i wprowadzeniu współrzędnych quasi-normalnych za pomocą podstawienia

$$\varrho_s(t)=\sum_{k=1}^{6}\varphi_s^{(k)}q_k(t),\quad s=1,\dots,6 \tag{4.6}$$

otrzymujemy równania:

$$\ddot{q}_k+\lambda_k^2q_k=\frac{1}{M_k}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(k)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j],\quad k=1,\dots,6, \tag{4.7}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{1}{J}[R_0^{(c)}+m_{p1}(F_7)_1+m_{p2}(F_7)_2+m_0Q_7],\quad M_k=\sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}a_{sj}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(k)}. \tag{4.8}$$

Dla wyznaczenia drgań układu w pierwszym przybliżeniu wystarczy ograniczyć się do analizy dwóch równań: równania (4.8) uwzględniającego źródło energii i jednego z równań (4.7). Wybór jednego z równań (4.7) zależy od częstości λ_k, dla której wartość różnicy $|\lambda_k-\dot{\varphi}|$ jest najmniejsza. Jeśli taką częstością jest λ_m, należy rozpatrywać układ równań:

$$\ddot{q}_m+\lambda_m^2q_m=\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q],\tag{4.9}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{1}{J}[R_0^{(c)}+m_{p1}(F_7)_1+m_{p2}(F_7)_2+m_0Q_7].\tag{4.10}$$

Dla równań (4.9) i (4.10) przewidujemy w pierwszym przybliżeniu rozwiązanie w postaci:

$$\begin{aligned} q_m &= a\cos(\varphi+\psi)+\varepsilon u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega), \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \varepsilon D(a, \psi, \omega), \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdzie a i ψ są funkcjami czasu i opisują się równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A(\psi, a, \omega), \\ \dot{\psi} &= \lambda_m-\omega+\varepsilon B(a, \psi, \omega). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podobnie jak w przypadku równania (3.6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\lambda_m^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2} + 2\lambda_m\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi\partial(\varphi+\psi)} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2} + \lambda_m^2 u_1 + \\ &+ \left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi} - 2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi) - \left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi} + 2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi) = \\ &= \frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0 Q_j]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

W celu wyznaczenia wielkości A, B i u_1 przedstawimy prawą stronę równania (4.13) oraz u_1 w postaci podwójnych szeregów Fouriera:

$$\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0 Q_j] = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}, \tag{4.14}$$

$$u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega) = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} u_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}, \tag{4.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_{n_1, n_2}(a, \omega) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+ \\ + m_0 Q_j]e^{-i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}d\varphi d(\varphi+\psi), \end{aligned} \tag{4.16}$$

i jest jednością urojoną.

Aby a była pełną amplitudą pierwszej harmoniki kąta $(\varphi+\psi)$ powinno zachodzić $u_{n1,n2}(a, \omega) \equiv 0$ dla wszystkich n_1 i n_2 spełniających równość $n_1+n_2 = \pm 1$. Z uwzględnieniem tego warunku otrzymujemy na podstawie (4.13) - (4.16)

$$u_{n_1, n_2}(a, \omega) = \frac{F_{n_1, n_2}(a, \omega)}{\lambda_m^2 - (n_1\omega+n_2\lambda_m)^2}, \quad n_1+n_2 \neq \pm 1, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} &\left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi} - 2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi) - \left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi} + 2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi) = \\ &= \sum_{\substack{n_1, n_2=-\infty \\ n_1+n_2=\pm 1}}^{\infty} F_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Z zależności (4.15) - (4.17) otrzymujemy

$$(4.19)\qquad u_1(a,\varphi,\varphi+\psi,\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n_1,n_2=-\infty\\ n_1+n_2\neq\pm 1}}^{\infty}\frac{e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}}{\lambda_m^2-(n_1\omega+n_2\lambda_m)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+$$
$$+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}d\varphi\, d(\varphi+\psi).$$

W celu otrzymania równań do wyznaczenia funkcji A i B porównamy współczynniki stojące przy $\sin(\varphi+\psi)$ i $\cos(\varphi+\psi)$ w równaniu (4.18). Oznaczając $n_1 = -p, n_2 = p\pm 1$ otrzymujemy:

$$\left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi}-2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi}+2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}[\cos(\varphi+\psi)\pm i\sin(\varphi+\psi)]\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+$$
$$+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}[\cos(\varphi+\psi)\mp i\sin(\varphi+\psi)]d\varphi\, d(\varphi+\psi),$$

skąd

$$(4.20)\qquad \begin{aligned} 2A\lambda_m+a(\lambda_m-\omega)\frac{\partial B}{\partial\psi} &= -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+\\ &\quad +m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\sin(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi),\\ 2aB\lambda_m-(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi} &= -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+\\ &\quad +m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\cos(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi).\end{aligned}$$

Rozwiązań układu (4.20) poszukujemy w postaci szeregów:

$$(4.21)\qquad A(a,\psi,\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}C_p(a,\omega)e^{ip\psi},\qquad B(a,\psi,\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}G_p(a,\omega)e^{ip\psi}.$$

Po podstawieniu (4.21) do (4.20) otrzymujemy rozwiązania:

$$(4.22)\qquad A(a,\psi,\omega) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip\psi}}{4\lambda_m^2-p^2(\lambda_m-\omega)^2}\Big\{(\lambda_m-\omega)ip\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}\times$$
$$\times[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\cos(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi)-$$
$$-2\lambda_m\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]\times$$
$$\times e^{-ip\psi}\sin(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi)\Big\},$$

$$B(a, \psi, \omega) = \frac{1}{2\pi^2 a} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip\psi}}{4\lambda_m^2 - p^2(\lambda_m - \omega)^2} \Big\{ (\omega - \lambda) ip \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{M_m} \sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(m)} \times$$
$$\times [R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j] e^{-ip\psi} \sin(\varphi+\psi) d\varphi d(\varphi+\psi) -$$
$$-2\lambda_m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{M_m} \sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(m)} [R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j] \times$$
$$\times e^{-ip\psi} \cos(\varphi+\psi) d\varphi d(\varphi+\psi) \Big\}. \tag{4.22 [c.d.]}$$

Funkcję D wyznaczymy z równania (4.10) przez uśrednienie prawej strony tego równania po $(\varphi+\psi)$ w okresie 2π

$$D(a, \psi, \omega) = \frac{1}{2\pi J} \int_0^{2\pi} [R_0^{(c)} + m_{p1}(F_7)_1 + m_{p2}(F_7)_2 + m_0 Q_7] d(\varphi+\psi). \tag{4.23}$$

Na podstawie (4.11), (4.12), (4.22), (4.23) wyznaczyć można wielkości a, ψ i ω oraz z uwzględnieniem (4.2), (4.6) i (4.19) drgania układu:

$$u = u_0 + \phi_1^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi) + u_1], \quad v = v_0 + \phi_2^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi) + u_1], \ \dots,$$
$$\gamma = \gamma_0 + \phi_6^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi) + u_1]. \tag{4.24}$$

Z równania (4.10) wyznaczyć można wywołany drganiami silnika dodatkowy moment oporowy, jako sumę momentów na wale silnika, z jakimi oddziaływują masy $m_{p1/2}$ i m_0 przy drganiach $u, \dots, \gamma$

$$\Delta M = -\{m_{p1}[(F_7)_1 - K_1] + m_{p2}[(F_7)_2 - K_2] + m_0(Q_7 - Q_0)\}, \tag{4.25}$$

którego stały, w stanach ustalonych, składnik $(\Delta M)_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta M d(\varphi+\psi)$ powoduje trwały spadek prędkości kątowej silnika i stratę mocy $(\Delta N)_0 \doteq (\Delta M)_0 \omega$, związaną z tłumieniem w podkładkach elastycznych.

Powyższe zależności pozwalają dokonać analizy drgań i obciążeń silnika oraz doboru układu amortyzacji, spełniającego wymogi stawiane elastycznemu posadowieniu i zapewniającego odpowiednio małe straty energetyczne, przy uwzględnieniu nieliniowych zjawisk i nieidealnego źródła energii. Przez podstawienie $\delta = 0$ lub $\delta = \pi/2$ zależności te mogą być wykorzystane także do analizy silników o pionowym układzie cylindrów lub silników typu bokser.

Literatura cytowana w tekście

1. W. PFLAUM, W. HEMPEL, *Untersuchung ueber den Verschleiss bei Motoren mit elastlscher Lagerung*, MTZ, 23, 11 (1962).
2. W. HEMPEL, *Zusatzkraefte im Triebwerk von Kolbenmaschinen bei elastischer Lagerung und im Seegang*, Forschungsh., Schiffstechnik, April 1966.
3. Y. ROCARD, *Dinamique generale des vibrations*, Masson, Paris 1949.

4. В. О. Кононенко, *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*, Изд. Наука, Москва 1964.
5. Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов, *Нестационарные колебания механических систем*, Наукова Думка, Киев 1966.
6. J. Kolenda, *Analiza wibracyjno-uderzeniowego układu z bezwładnościowym wzbudnikiem drgań.* Praca przyjęta do druku przez Redakcję Zeszytów Naukowych Politechniki Gdańskiej « Mechanika ».
7. J. Kolenda, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z mimoosiowymi mechanizmami korbowymi z uwzględnieniem nieidealnego źródła energii.* Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej « Budownictwo Okrętowe », (w druku).
8. J. Jędrzejowski, *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*, WKŁ, Warszawa 1965.
9. M. Cichy, S. Wojciechowski, *Interpolacja charakterystyk silnikowych za pomocą wielomianów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 189, Mechanika XVI, 1972.
10. Ю. А. Митропольский, *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*, Изд. АН УССР, Киев 1955.
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва 1963.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АМОРТИЗИРОВАННЫХ *V*-ОБРАЗНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С НЕИДЕАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

В работе рассматриваются колебания амортизированных *V*-образных двигателей с неуравновешенными массами и с возвратно-поступательным и вращательным движениями. Учитывается неидеальность источника энергии и угловая скорость двигателя принимается переменной. Поведение рассматриваемых систем описывается с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются с применением метода Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Summary

NON-LINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED *V*-TYPE PISTON ENGINES WITH NON-IDEAL POWER SOURCE

The paper deals with vibrations of elastically mounted *V*-type engines with reciprocating and rotating unweighted masses. The non-ideal power source and variable rotating speed of engine are taken into account. The behaviour of analysed systems is described by non-linear differential equations which are solved by means of the asymptotic method of Krylov-Bogolubov-Mitropolsky.

INSTYTUT OKRĘTOWY POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1975.