

O PEWNYCH MOŻLIWOŚCIACH ZASTOSOWANIA
TARCZ ŚCISKANYCH W BADANIACH MATERIAŁOWYCH

HANNA O LESIAK, ANDRZEJ P. WILCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W niektórych przypadkach badania własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych stosowanie ogólnie znanych metod pomiarowych jest bardzo utrudnione i niewygodne. Dotyczy to szczególnie badań statycznych tworzyw sztucznych, gdzie czas pomiaru i warunki otoczenia ingerują w sposób o wiele bardziej wyraźny niż w przypadku metali. Pociąga to za sobą konieczność zamykania układów pomiarowych w komorach klimatycznych i związane z tym dążenie do miniaturyzacji próbek i stanowisk. Z tego powodu rozważymy możliwość zastosowania prostej metody pomiarowej, pozwalającej na wyznaczenie dwóch stałych materiałowych. Dodatkowym wymaganiam, rzadko dającym się spełnić w praktyce, jest użycie jednego i tego samego urządzenia pomiarowego do wyznaczania obu stałych sprężystości materiałów izotropowych. Wykażemy, że wymaganie to może być uwzględnione przy proponowanej metodzie pomiarowej. Dla dostatecznie długiego, w porównaniu z czasem przykładania obciążenia, okresu próby, obciążenie można przyjąć w postaci $P = P_0 H(t)$ (gdzie $H(t)$ jest funkcją Heavinde'a) i stosując transformację Laplace'a-Carsona wykorzystać istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej pozwalającej bezpośrednio użyć rozwiązanie do wyznaczenia funkcji pełzania $\varphi(t) = \frac{1}{E(t)}$.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważamy izotropową tarczę sprężystą o promieniu R i grubości b ściskaną siłą P , między dwoma nieodkształcalnymi płytkami. Wielkościami, które nas interesują są zmiany średnic tarczy z otworem (promień otworu $r = a$), oraz tarczy pełnej. Podamy rozwiązanie dla tarczy z otworem, drugi przypadek otrzymamy przez przejście graniczne.

W celu uproszczenia rozwiązania przyjmujemy na powierzchni styku eliptyczny rozkład nacisków dla zagadnienia kontaktu sprężystego walca z nieodkształcalną płaszczyzną, znane jako zadanie Hertza (rys. 1).

Rozkład ten można przedstawić w postaci

$$(1) \quad p(\varphi) = p_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}, \quad \varphi \leq \alpha,$$

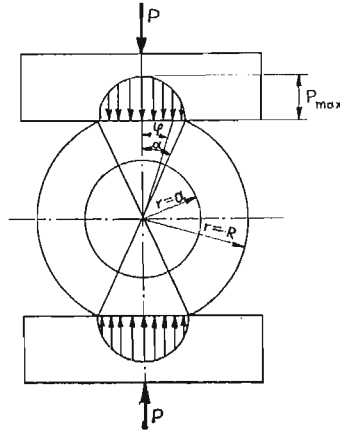
gdzie α jest kątem ograniczającym obszar styku tarczy z płytą i zgodnie z rozwiązaniem

zadania Hertza wynosi

$$\alpha = \sqrt{\frac{4P}{\pi b R E}},$$

$$P_{\max} = \frac{2P}{\pi \alpha R b},$$

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\varphi) b R d\varphi.$$



Rys. 1

Do dalszych rozważań wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe

$$(2) \quad x = \frac{r}{R}, \quad f = \left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Funkcja naprężeń dla rozpatrywanego przypadku ma postać [1]

$$(3) \quad \Phi = R^2 \left\{ A_0 x^2 + B_0 \ln x + \sum_{246}^{\infty} [A x^n + B x^{-n} + C x^{n+2} + D x^{-n+2}] \cos n\varphi \right\},$$

gdzie A, B, C, D, A_0, B_0 oznaczają stałe dowolne. Prowadzi to do następujących wyrażen na naprężenie i przemieszczenie:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2A_0 + B_0 x^{-2} - \sum_{2,4}^{\infty} [n(n-1)Ax^{n-2} + n(n+1)Bx^{-n-2} + \\ &\quad + (n+1)(n-2)Cx^n + (n-1)(n+2)Dx^{-n}] \cos n\varphi, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2A_0 - B_0 x^{-2} + \sum [n(n-1)Ax^{n-2} + n(n+1)Bx^{-n-2} + \\ &\quad + (n+1)(n+2)Cx^n + (n+1)(n-2)Dx^{-n}] \cos n\varphi, \\ u_r &= \sum_{2,4,\dots}^{\infty} n[(n-1)Ax^{n-2} + (n+1)Cx^n - (n+1)Bx^{-n-2} - (n-1)Dx^{-n}] \sin n\varphi, \\ u_r &= \frac{R}{E} \left\{ 2(1-\nu)A_0 x - (1+\nu)B_0 x^{-1} + \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \left[4x^{n+1}(C + Dx^{-2n}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\nu)[nAx^{-2} - nBx^{-2n-2} + (n+2)C - (n-2)Dx^{-2n}]x^{n+1} \right] \cos n\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Wartości stałych wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{ri}(a, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{ri}(R, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{rr}(R, \varphi) &= P_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2} \quad \text{dla} \quad \begin{cases} -\alpha < \varphi < \alpha \\ \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha \end{cases}, \\ \sigma_{rr}(R, \varphi) & \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \alpha < \varphi < \pi - \alpha \\ \pi + \alpha < \varphi < 2\pi - \alpha \end{cases}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Rozkład nacisków na powierzchni zewnętrznej $r = R$ realizujemy przedstawiając obciążenie w postaci szeregu Fouriera

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= - \left[\frac{1}{2} P_{\max} \alpha + 2p_{\max} \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} J_1(n\alpha) \cos n\varphi \right] = \\ &= - \left[\frac{1}{4} E\alpha^2 + E\alpha \sum_{2,4}^{\infty} \frac{1}{n} J_1(n\alpha) \cos n\varphi \right], \end{aligned}$$

gdzie $J_1(n\alpha)$ jest funkcją Besela pierwszego rodzaju.

Powyższa postać obciążenia spełnia warunki (5). Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy układ równań pozwalający na wyznaczenie niezbędnych stałych:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2A_0 + B_0 f^{-1} &= 0, \\ 2A_0 + B_0 &= -\frac{1}{4} E\alpha^2, \\ (n-1)A - (n+1)B + (n+1)C - (n-1)D &= 0, \\ (n-1)A f^{n-1} - (n+1)B f^{-1} + (n+1)C f^n - (n-1)D &= 0, \\ n(n-1)A f^{n-1} + n(n+1)B f^{-1} + (n-2)(n+1)C f^n + (n-1)(n+2)D &= 0, \\ n(n-1)A + n(n+1)B + (n-1)(n+1)C + (n-1)(n+2)D &= E\alpha \frac{1}{n} I_1(n\alpha). \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenia określające stałe całkowania:

$$(8) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n f^n (1-f)}{[(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2]}, \\ B &= \frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n(1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2} f^n, \\ C &= -\frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n f^{n-1} (1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2}, \\ D &= -\frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{f(1-f^n) + n(1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2} f^{n-1}, \\ A_0 &= -\frac{\alpha^2}{8} \frac{1}{1-f} E, \quad B_0 = \frac{\alpha}{4} \frac{f}{1-f} E. \end{aligned}$$

Interesujące nas zmiany długości średnic dla $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ przyjmują postać:

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= 2u_r(R, 0) = R[A_1(\alpha) + (1+\nu)B_1(\alpha)], \\ \delta_2 &= 2u_r\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = R[A_2(\alpha) + (1+\nu)B_2(\alpha)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(10) \quad \begin{aligned} A_1(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{1-f} + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)} F(f), \\ B_1(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ A_2(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{1-f} + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)} F(f), \\ B_2(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ F(f) &= \frac{2n^2f^{n-1}(1-f) + n(1-f^{2n}) - (1-f^n)^2}{(1-f^n)^2 - n^2f^{n-1}(1-f)^2}. \end{aligned}$$

Stosując przejście graniczne $f = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \rightarrow 0$ otrzymujemy rozwiązanie dla tarczy pełnej

$$(11) \quad \begin{aligned} \delta'_1 &= R[A'_1(\alpha) + (1+\nu)B_1(\alpha)], \\ \delta'_2 &= R[A'_2(\alpha) + (1+\nu)B'_2(\alpha)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(12) \quad \begin{aligned} A'_1(\alpha) &= \alpha^2 + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)}, \\ B'_1(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ A'_2(\alpha) &= \alpha^2 + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)}, \\ B'_2(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia stałych materiałowych będziemy rozpatrywać zwiększenie średnicy prostopadłej do kierunku działania obciążenia $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. W tym przypadku wielkości A_2 i B_2 są tego samego rzędu. Rozważanie zbliżenia powierzchni styku nie prowadzi do celu ze względu na zbyt duże stosunki wartości A_1 i B_1 dochodzące do 10^4 oraz niekorzystny na dokładność pomiaru wpływ koncentracji naprężeń w miejscu kontaktu.

Obliczenia numeryczne zestawione w tabelicy 1 wskazują, że otrzymane wyniki ze wzorów (10) i (12) są identyczne (lub pomijalnie różniące się dla większych wartości α) z wynikami dla tarczy obciążonej siłą skupioną [2, 3], które można zapisać w postaci

$$(13) \quad \delta = R[A_2(\alpha, f) + (1+\nu)B_2(\alpha)],$$

gdzie

$$A_2(\alpha, f) = \frac{\alpha}{1-f} + 2\alpha^2 \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{F(f)}{n^2-1},$$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha^2 \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n^2-1},$$

$$F(f) = \frac{2n^2 f^{n-1}(1-f) + n(1-f^{2n}) - (1-f^n)^2}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1}(1-f)^2}.$$

Związki (13) można uzyskać także przez przejście graniczne $\alpha \rightarrow 0$ we wzorach (12). Przyjmując

$$I_1(n\alpha) = \frac{1}{2}n\alpha$$

można sprawdzić, że wyrażenie A'_1 układu (12) traci sens, jednak pozostałe wyrażenia pozostają w mocy. W dalszych rozważaniach będziemy więc korzystać z tych wzorów.

3. Możliwości zastosowań

Zapisując wyrażenie (13) w postaci

$$\delta = \alpha^2 R \left[\frac{A_2(\alpha, f)}{\alpha^2} + (1+\nu) \frac{B_2(\alpha)}{\alpha^2} \right],$$

a następnie przekształcając pierwszy wyraz w nawiasie

$$\frac{A_2(\alpha, f)}{\alpha^2} = \frac{A_2(\alpha, 0)}{\alpha^2} \left[\frac{A_2(\alpha, f)}{A_2(\alpha, 0)} + 1 - 1 \right]$$

i oznaczając

$$\frac{B_2(\alpha)}{\alpha^2} = B, \quad \frac{A_2(\alpha, 0)}{\alpha^2} = A, \quad \left[\frac{A_2(\alpha, f)}{A_2(\alpha, 0)} + 1 \right] = \beta(f)$$

otrzymamy

$$\delta = \alpha^2 R \{ A[\beta(f) - 1] + (1+\nu)B \},$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{4P}{\pi R b E}, \\ f &= \left(\frac{a}{R}\right)^2, \\ A &= 0,570796, \\ B &= -0,785398, \end{aligned}$$

zauważmy, że dla $\beta(f) = 1$ wielkość δ zależy od stosunku $(1+\nu)/E$. Stan ten można otrzymać przez odpowiednie dobranie stosunku promieni a/R .

Przeprowadzone obliczenia numeryczne wykazują, że przypadek $\beta(f) = 1$ zachodzi dla

$$(15) \quad f = 0,065556,$$

czyli

$$\frac{a}{R} = 0,25604.$$

Badanie próbki o takim stosunku promieni pozwala na bezpośrednie wyznaczenie modułu Kirchhoffa. Podobnie możemy wyznaczyć moduł Younga odejmując od wydłużenia średnicy tarczy pełnej wydłużenie średnicy tarczy z otworem, co ze względu na te same współczynniki przy wyrażeniu $(1+\nu)$ sprowadza się do:

$$(16) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\delta'_1 - \delta_1}{R} = A'_1 - A_1, \\ C_2 &= \frac{\delta'_2 - \delta_2}{R} = A'_2 - A_2. \end{aligned}$$

Wartości liczbowe stałych A, B, C jako funkcji α i $F = f^{1/2}$ podano w tablicy 1.

Do celów praktycznych dla stosunku $a/R = 0,256$ końcowe wzory na wyznaczenie stałych materiałowych można zapisać w postaci:

$$(17) \quad \begin{aligned} E &= 2,2832 \frac{P}{\pi b (\delta - \delta')}, \\ G &= 1,5708 \frac{P}{\pi b \delta} \end{aligned}$$

lub

$$(18) \quad \begin{aligned} E &= 2,2832 \frac{P}{\pi b (\delta - \delta')}, \\ \nu &= 0,7268 \frac{\delta}{\delta - \delta'} - 1 \end{aligned}$$

w zależności od aktualnych potrzeb, gdzie δ i δ' oznaczają powiększenie średnicy tarczy z otworem i tarczy pełnej.

W celu skontrolowania podanej metody przeprowadzono badania na próbkach wykonanych z technicznego metaplexu (polimetakrylanu metylu), o stosunku $a/R = 0,25604$ (średnica zewnętrzna 29,3 mm) oraz dla tarczy pełnej o tej samej średnicy. Próbkę ścisano siłą $P = 90$ kG i 140 kG. Otrzymane wyniki podane są w tablicy 1.

Tablica 1

| P[kG] | $\delta\mu$ | | | |
|-------|------------------|----------------------|--------------|-----------------------|
| | tarcza z otworem | | tarcza pełna | |
| 90 | 27 | $\delta_{sr} = 22,8$ | 11 | $\delta_{sr} = 12,2$ |
| | 29 | | 11 | |
| | 30 | | 10 | |
| | 28 | | 11 | |
| 140 | 44 | $\delta_{sr} = 44,8$ | 18 | $\delta_{sr} = 19,04$ |
| | 47 | | 21 | |
| | 44 | | 19 | |
| | 45 | | 22 | |

Do wyznaczenia średnich przemieszczeń zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Korzystając ze wzoru (14) dla tarczy z otworem oraz pełnej wyznaczono stałe materiałowe

$$E = 39,4978 \cdot 10^3 \cong 39\,400 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\nu = 0,2639297 \cong 0,264.$$

Otrzymane wyniki są zgodne, z dokładnością do kilkunastu procent, z danymi literaturowymi dla tego typu materiałów.

Zagadnienie kontaktowe tarczy

$$F = \frac{a}{R} = 0,00$$

| α | A_1 | B_1 | C_1 | A_2 | B_2 | C_2 |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,0010 | 0,779235E-05 | -,333419E-09 | 0,000000E+00 | 0,570796E-06 | -,785398E-06 | 0,000000E+00 |
| 0,0020 | 0,283995E-04 | -,266735E-08 | 0,000000E+00 | 0,228319E-05 | -,314159E-05 | 0,000000E+00 |
| 0,0030 | 0,602895E-04 | -,399887E-08 | 0,000000E+00 | 0,513717E-05 | -,706858E-05 | 0,000000E+00 |
| 0,0040 | 0,102589E-03 | -,213306E-07 | 0,000000E+00 | 0,913276E-05 | -,125663E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0050 | 0,154733E-03 | -,416614E-07 | 0,000000E+00 | 0,142699E-04 | -,196349E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0060 | 0,216276E-03 | -,719908E-07 | 0,000000E+00 | 0,205487E-04 | -,282742E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0070 | 0,286855E-03 | -,114319E-06 | 0,000000E+00 | 0,279692E-04 | -,384843E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0080 | 0,366163E-03 | -,170645E-06 | 0,000000E+00 | 0,365312E-04 | -,502651E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0090 | 0,453938E-03 | -,242968E-06 | 0,000000E+00 | 0,462348E-04 | -,636166E-04 | 0,000000E+00 |
| 0,0100 | 0,549947E-03 | -,333289E-06 | 0,000000E+00 | 0,570801E-04 | -,785388E-04 | 0,000000E-00 |

$$F = \frac{a}{R} = 0,25$$

| α | A_1 | B_1 | C_1 | A_2 | B_2 | C_2 |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,0010 | 0,846901E-05 | -,333419E-09 | 0,676662E-06 | 0,322205E-07 | -,785398E-06 | -,538576E-06 |
| 0,0020 | 0,311061E-04 | -,266735E-08 | 0,270661E-05 | 0,128886E-06 | -,314159E-05 | -,215430E-05 |
| 0,0030 | 0,663455E-04 | -,900231E-08 | 0,605602E-05 | 0,290009E-06 | -,706858E-05 | -,484716E-05 |
| 0,0040 | 0,113355E-03 | -,213388E-07 | 0,107662E-04 | 0,515614E-06 | -,125663E-04 | -,861715E-05 |
| 0,0050 | 0,171650E-03 | -,416614E-07 | 0,169166E-04 | 0,805721E-06 | -,196349E-04 | -,134642E-04 |
| 0,0060 | 0,240635E-03 | -,719908E-07 | 0,243594E-04 | 0,116039E-05 | -,282742E-04 | -,193883E-04 |
| 0,0070 | 0,320010E-03 | -,114319E-06 | 0,331551E-04 | 0,157964E-05 | -,384843E-04 | -,263896E-04 |
| 0,0080 | 0,409468E-03 | -,170645E-06 | 0,433051E-04 | 0,206352E-05 | -,502651E-04 | -,344677E-04 |
| 0,0090 | 0,508745E-03 | -,242968E-06 | 0,548072E-04 | 0,261212E-05 | -,636166E-04 | -,436227E-04 |
| 0,0100 | 0,617609E-03 | -,333289E-06 | 0,676623E-04 | 0,322551E-05 | -,785388E-04 | -,538546E-04 |

$$F = \frac{a}{R} = 0,50$$

| α | A_1 | B_1 | C_1 | A_2 | B_2 | C_2 |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,0010 | 0,131046E-04 | -,333419E-09 | 0,531224E-05 | -,381411E-05 | -,785398E-06 | -,438491E-05 |
| 0,0020 | 0,496484E-04 | -,266735E-08 | 0,212489E-04 | -,152564E-04 | -,314159E-05 | -,175396E-04 |
| 0,0030 | 0,108066E-03 | -,900231E-08 | 0,477760E-04 | -,343268E-04 | -,706858E-05 | -,394640E-04 |
| 0,0040 | 0,187524E-03 | -,213388E-07 | 0,849348E-04 | -,610252E-04 | -,125663E-04 | -,701580E-04 |
| 0,0050 | 0,287443E-03 | -,416773E-07 | 0,132710E-03 | -,953514E-04 | -,196349E-04 | -,109621E-03 |
| 0,0060 | 0,407377E-03 | -,720183E-07 | 0,191101E-03 | -,137305E-03 | -,282742E-04 | -,157854E-03 |
| 0,0070 | 0,546963E-03 | -,114362E-06 | 0,260108E-03 | -,186886E-03 | -,384843E-04 | -,214855E-03 |
| 0,0080 | 0,705894E-03 | -,170710E-06 | 0,339731E-03 | -,244094E-03 | -,502651E-04 | -,280625E-03 |
| 0,0090 | 0,883906E-03 | -,243061E-06 | 0,429968E-03 | -,308928E-03 | -,636166E-04 | -,355163E-03 |
| 0,0100 | 0,108077E-02 | -,333417E-06 | 0,530819E-03 | -,381389E-03 | -,785388E-04 | -,438469E-03 |

$$F = \frac{a}{R} = 0,75$$

| α | A_1 | B_1 | C_1 | A_2 | B_2 | C_2 |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,0010 | 0,715136E-04 | -,333419E-09 | 0,637213E-04 | -,554460E-04 | -,785398E-06 | -,560168E-04 |
| 0,0020 | 0,283284E-03 | -,266735E-08 | 0,254885E-03 | -,221784E-03 | -,314159E-05 | -,224067E-03 |
| 0,0030 | 0,633744E-03 | -,900231E-08 | 0,573455E-03 | -,499012E-03 | -,706858E-05 | -,504149E-03 |
| 0,0040 | 0,112206E-02 | -,213388E-07 | 0,101947E-02 | -,887129E-03 | -,125663E-04 | -,896262E-03 |
| 0,0050 | 0,174765E-02 | -,416773E-07 | 0,159291E-02 | -,128613E-02 | -,196349E-04 | -,140040E-02 |
| 0,0060 | 0,251006E-02 | -,720183E-07 | 0,229378E-02 | -,199602E-02 | -,282742E-04 | -,201657E-02 |
| 0,0070 | 0,340892E-02 | -,114362E-06 | 0,312207E-02 | -,271679E-02 | -,384843E-04 | -,274476E-02 |
| 0,0080 | 0,444393E-02 | -,170710E-06 | 0,407777E-02 | -,354844E-02 | -,502651E-04 | -,358497E-02 |
| 0,0090 | 0,561481E-02 | -,243061E-06 | 0,516087E-02 | -,449095E-02 | -,636166E-04 | -,453719E-02 |
| 0,0100 | 0,692132E-02 | -,333417E-06 | 0,637137E-02 | -,554434E-02 | -,785388E-04 | -,560142E-02 |

4. Wnioski

Obliczenia numeryczne wskazują, że zgodnie ze wzorami Hertza zbliżenie dwóch ciał ściskanych z dużą dokładnością nie zależy od dwóch lecz od jednej stałej materiałowej. Sytuacja zmienia się, gdy pomiarowi podlega zwiększenie średnicy ściskanej tarczy. Tak mierzona wielkość tylko w jednym szczególnym przypadku wyraża się przez jedną ze stałych materiałowych. To zjawisko umożliwia dokonanie pomiaru wartości dwóch stałych materiałowych w jednym i tym samym urządzeniu, mierząc powiększenie średnicy tarczy i tarczy z otworem. Szczególnie wygodny jest przypadek, gdy stosunek wymiarów $a/R = 0,25604$.

Można też zauważyć, że z błędem rzędu $1^\circ/\infty$ rozwiązanie dokładne można zastąpić przez rozwiązanie przyjmujące obciążenie siłą skupioną w miejsce rzeczywistego rozkładu nacisków. Wynika to z analizy danych tablicy 1 i w pewien sposób potwierdza stosowność w tym przypadku zasady de Saint Venanta.

Literatura cytowana w tekście

1. K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Atkady, 1957.
2. П. Ф. Папкович, *Теория упругости*, Оборонгиз, Москва 1939.
3. В. Г. Рекач, *Руководство и решения задач по теории упругости*, Москва 1966.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ДИСКОВ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТАНТ МАТЕРИАЛА

В работе приводится простой метод определения материальных констант синтетических материалов. Рассуждения проводятся для упругого материала а с целью определения функций используется упруго-вязкоупругая аналогия. Рассматривается модельная задача для круглого диска сжимаемого двумя жесткими плитами. Определено изменение диаметров сплошного и полого дисков. С целью определения материальных констант рассмотрено увеличение перпендикулярного к направлению действия силы диаметра (в обоих случаях). Проводилась экспериментальная проверка метода с использованием образцов из органического стекла (метаплекса).

Summary

ON POSSIBILITIES OF APPLICATIONS OF COMPRESSED DISCS IN MATERIAL TESTING

A simple method enabling to determine the material constants of plastics has been given. The discussion refers to an elastic material while the elastic-visco-elastic analogy can be employed in order to determine the creep function.

An elastic disc compressed by two rigid plates serves as a model for discussion. The changes of diameters of that disc and of a hollow disc have been determined. To obtain material constants, increase of the diameter perpendicular to the direction of loading has been considered in both cases. In order to verify the method, tests have been performed on specimens made of metaplex [poly-(methyl metacrylate)].

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1974 r.; w wersji ostatecznej — 5 stycznia 1975 r.