

EKSTRAPOLACYJNA METODA OPISU PRÓB PEŁZANIA PRZY OBCIĄŻENIACH WIELOSTOPNIOWYCH

ZDZISŁAW KUROWSKI, STANISŁAW OCHELSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Metoda ekstrapolacji danych z prób pełzania przy obciążeniu stacjonarnym na próby przy obciążeniach wielostopniowych jest, obok metody reprezentacji całkowych, najczęściej spotykaną w literaturze dotyczącej opisu pełzania materiałów.

Różne metody ekstrapolacyjne stosowano głównie do opisu efektów pełzania tworzyw sztucznych [1, 2]. W poprzedniej pracy [3] zbadano możliwość zastosowania znanych metod ekstrapolacyjnych do opisu pełzania metali. Autorzy stwierdzili konieczność dalszej analizy metod ekstrapolacyjnych, gdyż dotychczasowe metody dały na ogół wyniki niezadowalające.

Alternatywną metodą opisu pełzania metali jest teoria parametru umocnienia RABOTNOVA, NAMIESTNIKOWA i innych [4, 5].

Niniejsza praca przedstawi propozycję nowej metody ekstrapolacyjnej. Metodę tę zastosowano do opisu pełzania niektórych materiałów: ortotropowego tworzywa poliestrowo-szklanego, poliamidu i stali, uzyskując dobry opis prób pełzania przy obciążeniu jedno-stopniowym. W omawianej metodzie wykorzystuje się funkcję pamięci materiału, określającą wrażliwość materiału na wartości naprężeń i czasy, w których następują skoki naprężeń dla złożonej, skokowej historii obciążenia. Opisano sposób wyznaczania tej funkcji dla prób pełzania przy jedno-stopniowym obciążeniu oraz przedstawiono ją dla kilku materiałów.

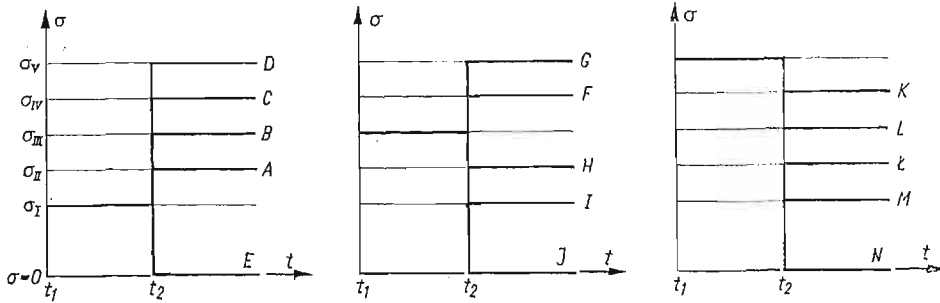
2. Opis doświadczeń i wyniki badań

Przeprowadzone izotermiczne badania doświadczalne jednoosiowego rozciągania przy danej historii naprężenia dotyczyły tworzywa warstwowego poliestrowo-szklanego, poliamidu T27 i stali 50H21G9N4.

Tworzywo warstwowe otrzymano z żywicy poliestrowej Polimal-109 i tkaniny szklanej rovingowej marki 19-S4. Tworzywo wykonano w postaci płyt w taki sposób, by kierunki osnowy wszystkich warstw tkanin w tworzywie pokrywały się. Z płyty wycięto próbki w kształcie wiosełek, których osie pokrywały się z kierunkiem osnowy ($\varphi = 0^\circ$) i drugą serię próbek, których kąt zawarty między osią próbki a kierunkiem osnowy wynosił 45° ($\varphi = 45^\circ$). Długość części pomiarowej próbki wynosiła 70 mm, a jej przekrój 10×3 mm.

Próbki z poliamidu o kształcie wiosełek, otrzymane metodą wtryskową, posiadały długość pomiarową 60 mm i przekrój 10×4 mm. Badania tworzywa warstwowego i polia-

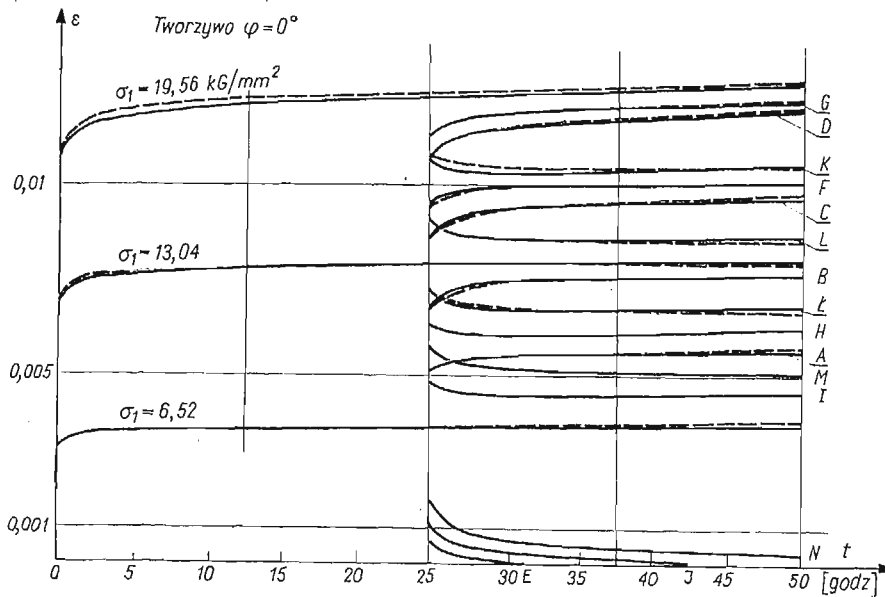
midu przeprowadzono na pełzarce, której budowę opisano w pracy [6]. Wydłużenia próbek mierzono za pomocą tensometru zegarowego Schoppera o bazie pomiarowej 50 mm i działce elementarnej 1/100 mm. Badania przeprowadzono w temperaturze $23 \pm 0,2^\circ\text{C}$ i względnej wilgotności powietrza (40 - 52%).



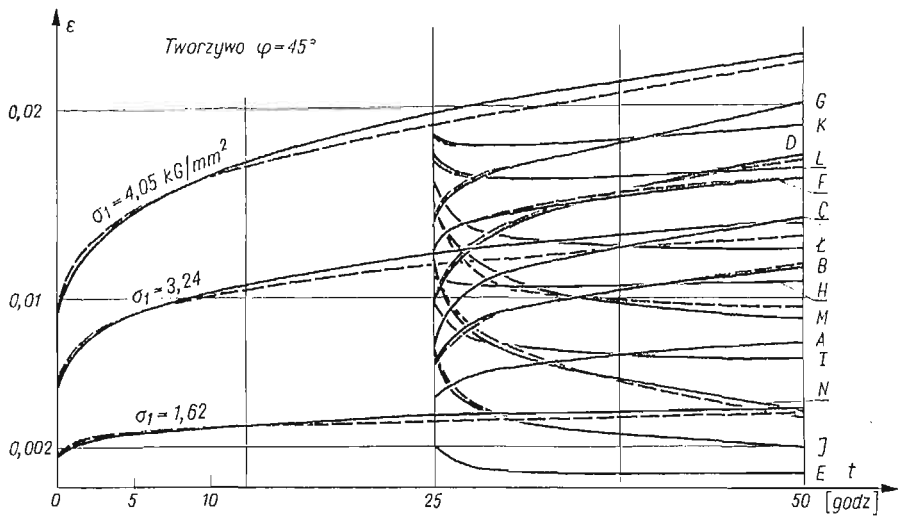
Rys. 1. Jednostopniowe programy obciążenia

Badania próbek ze stali 50H21G9N4 przeprowadzono na pełzarkach typu DST-5000 firmy L. Schopper w temperaturze 700°C . Próbki posiadały kształt znormalizowany. Dokładność utrzymania temperatury w piecu wynosiła $\pm 3^\circ\text{C}$, a wydłużenie przy pełzaniu mierzono z dokładnością 0,002 mm.

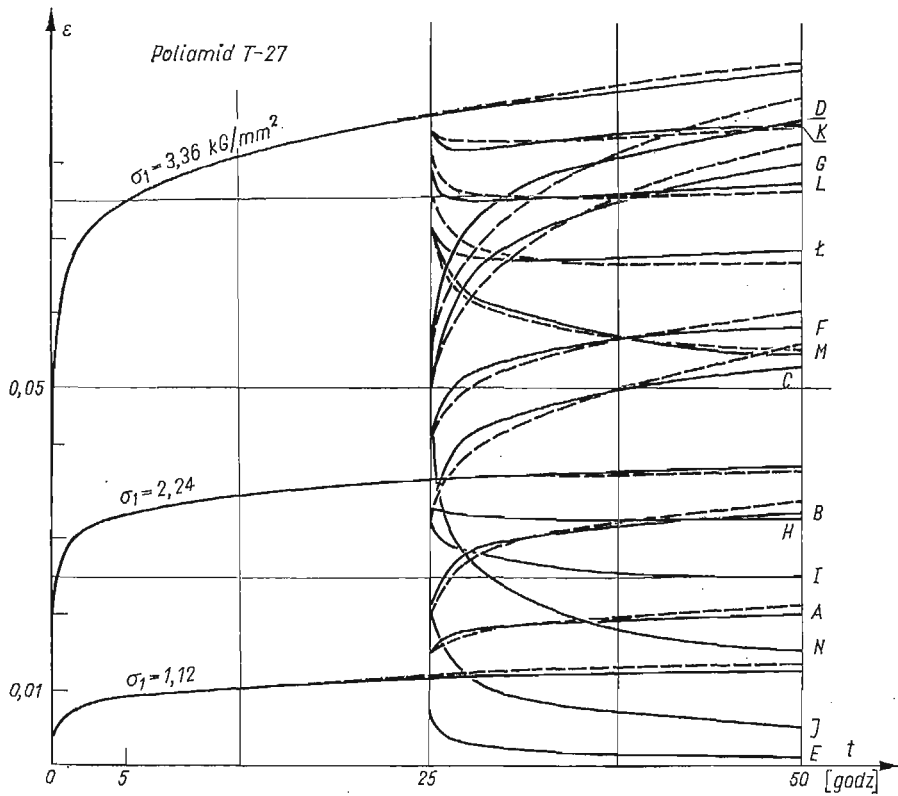
Złożone programy obciążenia obejmowały próby przy obciążeniach stacjonarnych dla trzech stałych naprężeń i piętnaście jednostopniowych programów obciążenia przedstawionych na rys. 1. Zmiany obciążenia w programach dwustopniowych dokonywano po czasie $t_2 = 2,5; 25$ i 100 godzin. Maksymalne naprężenia w badaniach przyjęto równe



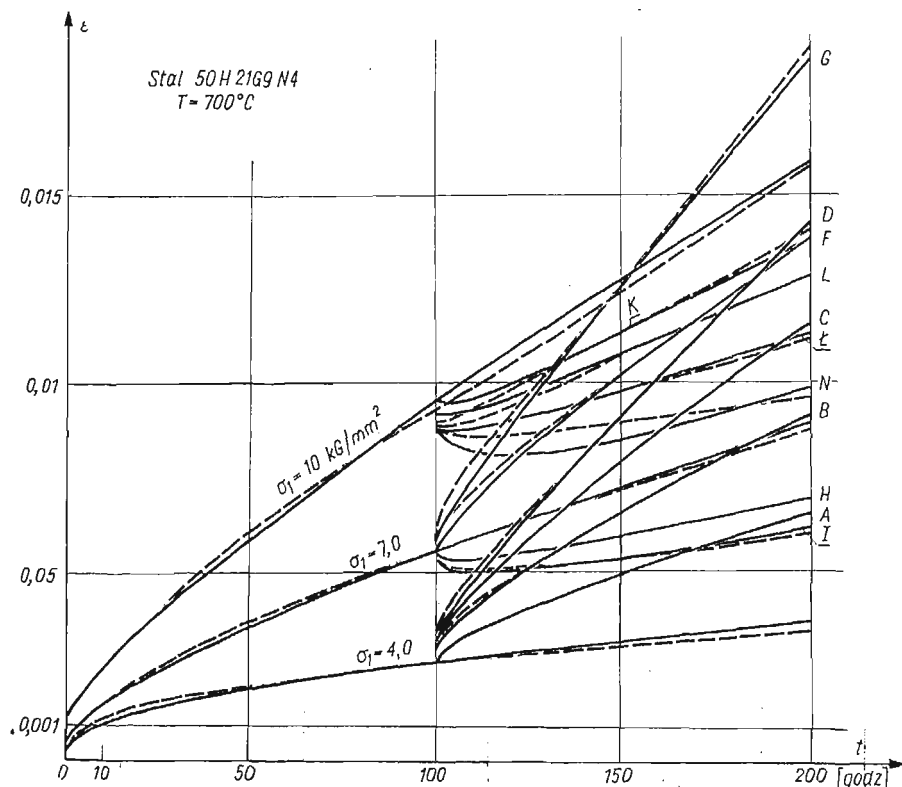
Rys. 2. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla tworzywa warstwowego $\varphi = 0^\circ$



Rys. 3. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla tworzywa warstwowego $\varphi = 45^\circ$



Rys. 4. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla poliamidu



Rys. 5. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla stali

60% wartości naprężeń niszczących przy rozciąganiu. Zmiany naprężenia odbywały się między wartościami naprężeń równymi: $\sigma_I = 6,52$; $\sigma_{II} = 9,78$; $\sigma_{III} = 13,04$; $\sigma_{IV} = 16,3$; $\sigma_V = 19,56$ kG/mm² dla tworzywa warstwowego $\varphi = 0^\circ$, i analogicznie 1,62; 2,43; 3,24; 3,645; 4,05 dla tworzywa warstwowego $\varphi = 45^\circ$; 1,12; 1,68; 2,24; 2,8; 3,36 dla poliamidu oraz dla stali 4,0; 5,5; 7,0; 8,5 i 10 kG/mm².

Średnie wartości wydłużeń względnych uzyskane z 3 - 5 prób posłużyły do zbudowania wykresów pełzania, otrzymanych z realizacji poszczególnych programów badań. Na rys. 2 przedstawiono przykładowo linią przerywaną zależności pełzania dla czasu zmiany obciążenia $t_2 = 25$ godz. uzyskane z badań tworzywa warstwowego $\varphi = 0^\circ$, na rys. 3 — tworzywa warstwowego $\varphi = 45^\circ$, na rys. 4 — poliamidu i na rys. 5 — stali. Wyniki badań doświadczalnych wykazały, że badane tworzywa zachowują się nieliniowo w zależności od wartości i historii naprężenia.

3. Opis prób pełzania przy obciążeniach stacjonarnych

Do opisu prób pełzania przy obciążeniach stacjonarnych zastosowano następującą zależność między naprężeniami i odształceniami, wielokrotnie stosowaną przez różnych autorów m. in. [7, 8] do opisu pełzania różnorodnych materiałów,

$$(1) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + a(\sigma)t^{m(\sigma)}.$$

Wartości funkcji $a(\sigma)$ i $m(\sigma)$ wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów w sposób opisany przez autorów w [3]. Wartości tych funkcji dla stali przyjęto z tej samej pracy. Metoda ta pozwoliła na dobre opisanie pelzania przy obciążeniu stacjonarnym. Maksymalne wartości błędów w stosunku do wartości doświadczalnych odkształcenia całkowitego wynosiły: dla tworzywa poliestrowo-szklanego (próbki wycięte pod kątem 0° do kierunku osnowy): $-5,77\%$ i $+6,25\%$; dla tworzywa poliestrowo-szklanego (próbki wycięte pod kątem 45° do kierunku osnowy): $-1,69\%$ i $+2,11\%$; dla poliamidu: $-4,16\%$ i $+3\%$. Dla kilku prób osiągnięto bardzo dobre wyniki, gdyż błąd wyniósł mniej niż 1% .

Wartości funkcji $a(\sigma)$ i $m(\sigma)$ podano w tablicy 1.

Tablica 1

Tworzywo poliestrowo-szklane $\varphi = 45^\circ$	σ [kG/mm ²]	1,62	2,44	3,24	3,65	4,05	
	$a \cdot 10^5$	82,353	225,0	388,625	500,0	694,347	
	m	0,313	0,28	0,267	0,26	0,259	
Tworzywo poliestrowo-szklane $\varphi = 0^\circ$	σ [kG/mm ²]	6,52	9,78	13,04	16,3	19,56	22,82
	$a \cdot 10^5$	13,089	44,0	84,159	119,0	153,605	217,441
	m	0,278	0,13	0,109	0,105	0,128	0,122
Poliamid	σ [kG/mm ²]	1,12	1,68	2,24	2,8	3,36	
	$a \cdot 10^5$	327,892	950,0	2144,951	3200,0	5344,929	
	m	0,2496	0,09	0,0993	0,099	0,0986	
Stal 50H21G9N4	σ [kG/mm ²]	3	4	5,5	7	8,5	10
	$a \cdot 10^5$	10,756	13,332	12,411	16,243	16,945	17,227
	m	0,577	0,605	0,713	0,732	0,786	0,844

4. Proponowana metoda ekstrapolacyjna

Przedstawioną w niniejszej pracy metodę ekstrapolacyjną otrzymuje się jako szczególny przypadek ogólnego równania konstytutywnego dla tzw. materiałów lepkich. W pracy [9] przedstawiono propozycję uściślenia pojęcia lepkości oraz zaproponowano sposób podziału materiałów wrażliwych na zamiany dróg deformacji na szereg grup drogą analizy postaci funkcjonu konstytutywnego przy narzuceniu jego niezmienniczości względem pewnych klas zamian dróg deformacji. Jedną z takich grup stanowią materiały zupełnie lepkie. Materiały te w przypadku skokowych historii odkształcenia (próba relaksacji) zapamiętują pełną informację o tej historii, tzn. wartości kolejnych gradientów odkształcenia oraz chwile czasowe, w których nastąpiły skoki gradientów odkształcenia.

Korzystając z wyników tej pracy i dokonując — jak to się często stosuje w praktyce w teorii pełzania — formalnej zamiany naprężeń z odkształceniami, możemy ogólne prawo stanu dla materiału całkowicie lepkiego dla $(n-1)$ -stopniowej historii obciążenia

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_{i-1}) H(t - t_i),$$

gdzie $\sigma_0 = 0$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$, zapisać w postaci (dla procesów izotermicznych):

$$(2) \quad \varepsilon_p(t) = C_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; t_1, t_2, \dots, t_n; t),$$

gdzie ε_p — odkształcenie czystego pełzania, C_n — funkcjonal konstytuacyjny.

Zakładamy, że odkształcenie natychmiastowe jest liniowo sprężyste. Materiał o prawie stanu (2) zapamiętuje pełną informację o skokowej historii naprężenia.

Poniżej przedstawiono propozycję metody ekstrapolacyjnej. Opiera się ona na następującym postulatcie, który był przyjmowany przez PIPKINA i ROGERSA w [2].

Jeśli

$$\begin{aligned} \sigma_{j_1} &= \sigma_{j_1-1}, \dots, \sigma_{j_k} = \sigma_{j_k-1}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < n, \quad 1 < k \leq n, \end{aligned}$$

to wówczas

$$(3) \quad C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n; t_1, \dots, t_n; t) \equiv C_{n-k}(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{n-k}}; t_{i_1}, \dots, t_{i_{n-k}}; t),$$

gdzie w ciągu i_1, i_2, \dots, i_{n-k} znajdują się liczby $1, 2, \dots, n$ z pominięciem j_1, \dots, j_k .

Postulat powyższy można spełnić przyjmując następującą postać równania konstytuacyjnego:

$$(4) \quad C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n; t_1, \dots, t_n; t) \equiv \sum_{i=1}^n w_i C_1(\sigma_i; t_i; t),$$

gdzie w ogólnym przypadku

$$(5) \quad w_i = w_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i; t_1, t_2, \dots, t_i),$$

przy czym

$$(6) \quad w_1 \equiv 1.$$

Jeśli zachodzi $\sigma_{k-1} = \sigma_k$ ($1 < k \leq i$), to musi być

$$(7) \quad w_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}, t_k) \equiv 0$$

oraz dla $k < j \leq i$

$$(8) \quad \begin{aligned} w_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_j; t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_j) \equiv \\ \equiv w_{j-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_j; t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j). \end{aligned}$$

Funkcje w_i spełniające warunki (5), (6), (7) i (8) są funkcjami pamięci materiału, określającymi jego wrażliwość na wartości i czasy skoków naprężenia.

Przyjmując konkretne prawo pełzania dla danego materiału otrzymamy dla niego odpowiednią postać wzoru (4).

Ograniczmy się obecnie do prób pęzania przy obciążeniu jednostopniowym i przyjmie-
my prawo pęzania dane wzorem (1), tzn. przyjmie my

$$C_1(\sigma; t_1; t) = a(\sigma)(t-t_1)^{m(\sigma)}.$$

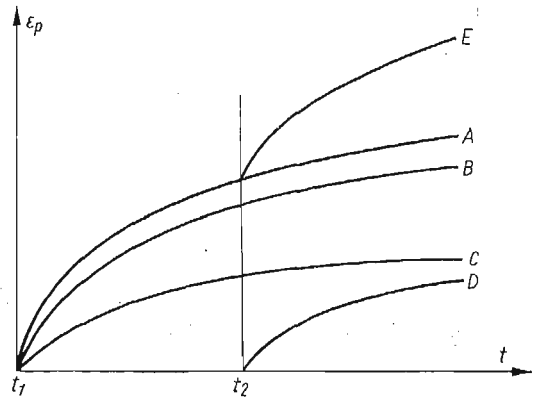
Wzór (4) przyjmie postać

$$(9) \quad \varepsilon_p(t) = \sum_{i=1}^n w_i a(\sigma_i) (t-t_i)^{m(\sigma_i)}.$$

Dla próby przy obciążeniu jednostopniowym wzór ten przedstawia się (przyjmując $t_1 = 0$)

$$(10) \quad \varepsilon_p(t) = a(\sigma_1)t^{m(\sigma_1)} + w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2) a(\sigma_2) (t-t_2)^{m(\sigma_2)}.$$

Przedstawioną powyżej metodę ekstrapolacyjną można zilustrować graficznie w sposób
przedstawiony na rys. 6. Dla próby $\sigma(t) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)H(t-t_2)$ bierzemy krzywe pęzania



Rys. 6. Graficzna interpretacja proponowanej
metody ekstrapolacji

odpowiadające σ_1 (krzywa A) i σ_2 (krzywa B). Rzędne punktów krzywej B mnożymy przez $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$ otrzymując krzywą C, którą przesuujemy następnie równolegle po osi t , tak aby jej początek znajdował się w t_2 (krzywa D). Następnie dla czasów $t > t_2$ superponujemy krzywe A i D otrzymując ostateczną krzywą E.

Przedstawiona powyżej metoda lepiej opisała wyniki doświadczalne pęzania stali przy obciążeniu jednostopniowym niż metody ekstrapolacyjne zaproponowane w [1, 2].

Na rys. 2 - 5 linią ciągłą zaznaczono krzywe pęzania obliczone ze wzoru (10), a linią przerywaną — wartości doświadczalne. Dla przedstawionych prób maksymalne błędy opisu wyników doświadczalnych wynosiły (w %): tworzywo $\varphi = 0^\circ$: -1,3 do +4,1; tworzywo $\varphi = 45^\circ$: -6,3 do +8,9; poliamid: -12,8 do +16,8; stal -8,3 do +6,0.

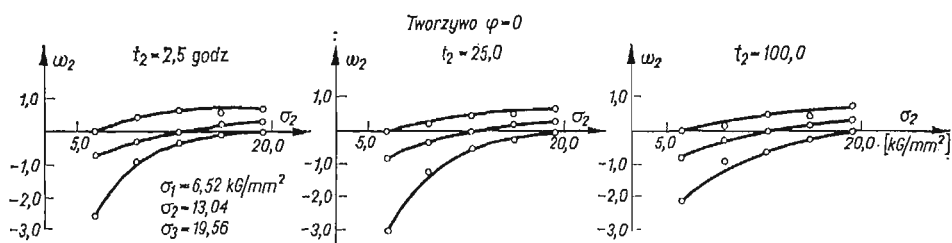
5. Wyznaczanie i własności funkcji pamięci w_2

Funkcję $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$ dla przedziału naprężeń $[\sigma_p, \sigma_k]$ i przedziału czasowego $[t_p, t_k]$ wyznaczamy w następujący sposób. Przyjmujemy trzy wartości naprężeń $\sigma_p < \sigma_s < \sigma_k$ i czasu $t_p < t_s < t_k$. Dla każdej wartości czasu t_p, t_s i t_k wystarczy przeprowadzić 9 prób pęzania przy obciążeniu jednostopniowym. Znając wartości doświadczalne odkształcenia w n chwilach czasu τ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), $t_2 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n \leq t_k$, wartość

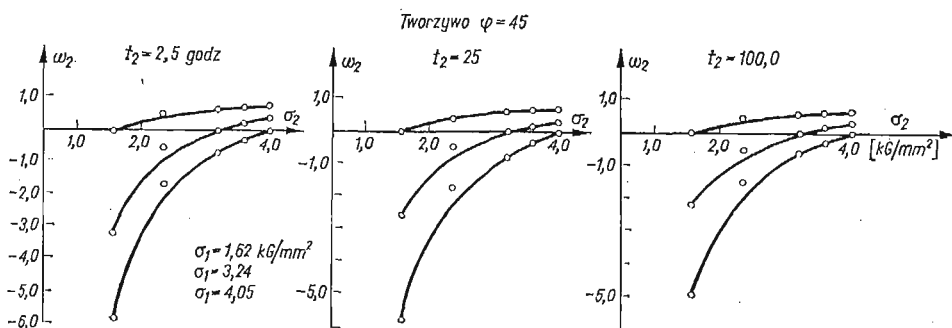
funkcji wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Funkcję w_2 opisano następnie przy pomocy funkcji kwadratowej

$$w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2) = a_2(\sigma_1, t_2)\sigma_2^2 + a_1(\sigma_1, t_2)\sigma_2 + a_0(\sigma_1, t_2).$$

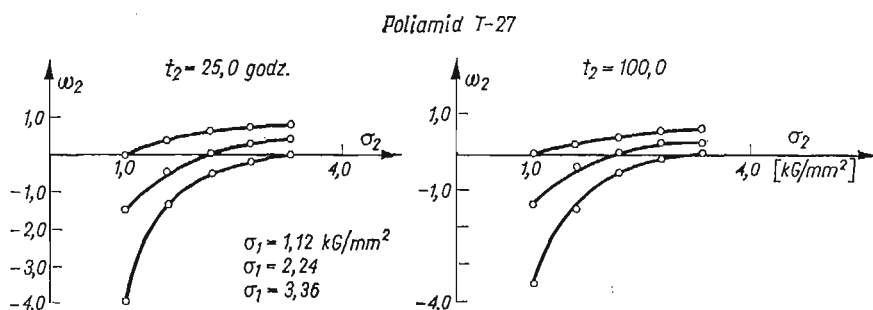
Współczynniki a_2 , a_1 i a_0 wyznaczono z warunku, aby krzywa w_2 przechodziła przez 3 punkty doświadczalne. Stwierdzono wyraźną zmienność wartości tych współczynników, w zależności od obu ich argumentów. Na rys. 7 - 10 przedstawiono wykresy funkcji $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$ dla różnych materiałów i różnych wartości argumentów σ_1 i t_2 . Znajomość wartości $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$ dla trzech wartości t_2 z przedziału $[t_p, t_k]$ i trzech wartości naprężeń σ_1 z przedziału $[\sigma_p, \sigma_k]$ pozwala opisywać dowolne próby pełzania przy obciążeniu jedno-



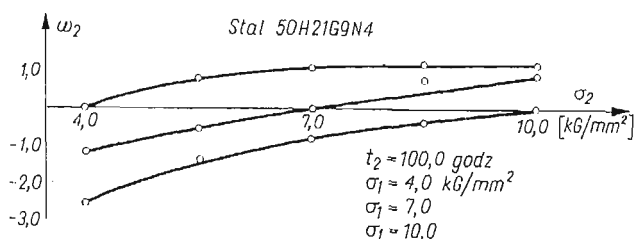
Rys. 7. Wykresy funkcji pamięci materiału w_2 dla tworzywa warstwowego $\varphi = 0^\circ$



Rys. 8. Wykresy funkcji pamięci materiału w_2 dla tworzywa warstwowego $\varphi = 45^\circ$



Rys. 9. Wykresy funkcji pamięci materiału w_2 dla poliamidu

Rys. 10. Wykresy funkcji pamięci materiału w_2 dla stali

stopniowym, w których wartości naprężeń oraz chwila skoku znajdują się w powyższych przedziałach. Wartości funkcji można otrzymać poprzez interpolację wartości podanych na wykresach.

Porównując wykresy funkcji pamięci materiału w_2 na rysunkach (7 - 10), można spostrzec ich jakościowe podobieństwo dla różnych materiałów. Obserwuje się znacznie większe (co do wartości bezwzględnej) wartości funkcji w_2 przy odciążeniu niż przy dociążeniu. Stwierdzono niezbyt dużą zmienność funkcji w_2 względem parametru czasowego t_2 . Zmienność ta jest wyraźna jedynie przy dużych zmianach naprężenia. W większości przypadków zmienność ta jest nieznaczna i z dobrym przybliżeniem do celów praktycznych można przyjmować $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$ jako niezależne od t_2 . Powyższe stwierdzenie dotyczy zakresów przyjętych w badaniach przedziałów czasu t_2 i naprężeń.

6. Wnioski końcowe

1. Zastosowanie metody ekstrapolacyjnej opartej na funkcji pamięci materiału, przy prostym opisie matematycznym, pozwoliło na dobre opisanie prób pełzania różnych materiałów przy obciążeniu jednostopniowym.

2. Do wyznaczenia funkcji pamięci, dla wymienionych w pracy materiałów w określonym przedziale czasu i naprężeń, okazuje się wystarczające przeprowadzenie maksymalnie 27 prób pełzania przy obciążeniu jednostopniowym.

3. Dalszym kierunkiem badań nad przedstawioną metodą ekstrapolacyjną powinna być analiza opisu prób więcej niż jednostopniowych. Zastosowanie przedstawionej metody do kilku prób przy obciążeniu dwustopniowym pozwoliło zauważyć, że metoda ta daje opis równie dobry jak dla prób przy obciążeniu jednostopniowym.

Literatura cytowana w tekście

1. R. O. STAFFORD, *On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 17 (1969).
2. A. C. PIPKIN, T. G. ROGERS, *A non-linear integral representation for viscoelastic behaviour*, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968).
3. Z. KUROWSKI, S. OCHELSKI, *Zastosowanie metod reprezentacji całkowych i ekstrapolacji do matematycznego opisu pełzania metali*, Biul. WAT, 3, 23 (1974).
4. В. С. НАМЕСТНИКОВ, Ю. Н. РАБОТНОВ, *О гипотезе уравнения состояния при ползучести*, ПМТФ, 3 (1961).

5. Ju. N. RABOTNOW, *Redistribution of Reactions at Transient Power — Law Creep, Creep in Structures*, Springer, 1972.
6. S. OCHELSKI, *Analiza pełzania ortotropowego tworzywa warstwowego w jednoosiowym stanie naprężenia*, Biul. WAT, 1, 18 (1969).
7. J. de LACOMBE, *Une mode de représentation des courbes des fluages*, Rev, mét., 36 (1939).
8. I. FINNIE, W. R. HELLER, *Pełzanie materiałów konstrukcyjnych*, Warszawa 1962.
9. J. RYCHLEWSKI, *Niewrażliwość materiałów na zamiany dróg deformacji*, Prace IPPT PAN, 1973.

Р е з ю м е

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ИСПЫТАНИЙ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЗКАХ

В работе предложен экстраполяционный метод описания многоступенчатых изотермических испытаний некоторых материалов на ползучесть. При описании с помощью этого метода многоступенчатых испытаний на ползучесть используются лишь: закон ползучести при постоянной нагрузке и, определенные в работе, функции памяти материала. Предложенный метод проверен экспериментально для одноступенчатой ползучести полиэфирного стеклопластика, полиамида и стали. Получено хорошее описание экспериментальных кривых.

S u m m a r y

EXTRAPOLATION METHOD OF DESCRIPTION OF CREEP TESTS AT MULTI-STEP LOADINGS

An extrapolation method for the description isothermal creeping of several materials under multi-step loads is proposed in this paper. For the description of multistep creeping, the method makes use only of the one-step creep law, and the material memory functions defined in the paper. The method proposed was verified experimentally for two-step creeping of fibre-reinforced polyester resin, polyamide and steel, providing a good description of experimental curves.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1974 r.
