

DRGANIA MASZYN O KORPUSACH ODKSZTAŁCALNYCH PODPARTYCH  
ELASTYCZNIE NA PODATNEJ KONSTRUKCJI

WIESŁAW WODZICKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Znajomość drgań układu złożonego z maszyny mocowanej elastycznie na fundamencie lub konstrukcji podpierającej, przed zmontowaniem całości układu, posiada ważne znaczenie praktyczne. Umożliwia to osiągnięcie wymaganych coraz to wyższych parametrów technicznych i technologicznych takich układów, zwiększenie ich trwałości i niezawodności, poprawę warunków pracy i bezpieczeństwa obsługi oraz stosowanie czulej aparatury kontrolno-pomiarowej.

Dynamika maszyn o korpusach sztywnych pracujących na sztywnym fundamencie znalazła już dość pełne opracowanie w takich pracach, jak [1, 2, 3]. Natomiast uwzględnienie podatności konstrukcji podpierającej ma miejsce w opracowaniach [4, 5, 6, 7, 8].

W wielu jednak przypadkach ważne znaczenie poznawcze, jak i praktyczne ma uwzględnienie podatności korpusu samej maszyny, gdyż dla maszyn szybkobieżnych lub o dużej mocy jednostkowej dynamika układu w równej mierze zależy od odkształcalności korpusu maszyny, co i podatności konstrukcji wsporczej lub podłoża.

Dlatego też celem tej pracy, która stanowi część pracy [9], było opracowanie wystarczająco dokładnej i możliwie ogólnej metody wyznaczania drgań układu złożonego z maszyny o korpusie odkształcalnym podpartej za pośrednictwem elementów elastycznych na podatnej konstrukcji, gdy drgania wywołuje wymuszenie generowane przez pracującą maszynę.

Postawiony cel wymagał opracowania:

- a) metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej dowolnej maszyny o podatnym korpusie, traktowanej jako swobodna w przestrzeni,
- b) metody wyznaczania charakterystyki dynamicznej dowolnej konstrukcji podpierającej maszynę,
- c) metody uwzględniania dowolnego złożonego układu wymuszenia, jaki generuje podczas swej pracy maszyna,
- d) metody analizy drgań rozpatrywanego układu.

Dla scharakteryzowania pod względem dynamicznym liniowego układu mechanicznego służą tzw. współczynniki podatności dynamicznej zwane inaczej receptancjami, które definiują się jako stosunek uogólnionego przemieszczenia dowolnego punktu układu do uogólnionego wymuszenia, które wywołało to przemieszczenie. Używając do zapisu liczb zespolonych można wyrazić to wzorem

$$(1.1) \quad \bar{a}_{x_j y_k} = \frac{\bar{x}_j}{\bar{P}_{y_k}} = \frac{X_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}}{P_{y_k} e^{i\omega t}} = \frac{X_j}{P_{y_k}} e^{i\varphi_{kj}},$$

gdzie  $\omega$  — oznacza częstość wymuszenia,  $P_{yk}$  — amplitudę wymuszenia,  $X_j$  — amplitudę przemieszczenia,  $\varphi_{kj}$  — kąt przesunięcia fazowego.

W przypadku działania wymuszeń na  $N$  punktów układu wiąże się w oparciu o zasadę superpozycji przemieszczenia z wymuszeniami za pomocą układu równań, który w postaci macierzowej można zapisać:

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{12} & \dots & \bar{\alpha}_{1N} \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & \dots & \bar{\alpha}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{N1} & \bar{\alpha}_{N2} & \dots & \bar{\alpha}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_N \end{bmatrix}$$

lub w zapisie symbolicznym

$$(1.3) \quad \{\bar{x}_j\} = [\bar{\alpha}_{jk}] \{\bar{P}_k\},$$

gdzie  $[\bar{\alpha}_{jk}]$  jest macierzą podatności dynamicznej, inaczej receptancji i stanowi charakterystykę dynamiczną układu.

Często przy analizie korzystniej jest wprowadzić wymuszenia jako funkcje przemieszczeń. Uzyskuje się to z przekształcenia (1.3) do postaci

$$(1.4) \quad \{\bar{P}_j\} = [\bar{\alpha}_{jk}]^{-1} \{\bar{x}_k\}.$$

Macierz  $[\bar{\alpha}_{jk}]^{-1}$  nazywa się macierzą sztywności dynamicznej lub inaczej macierzą impedancji i oznaczono ją dalej symbolem  $[\bar{a}_{jk}]$ . Należy zaznaczyć, że jedynie dla układu o jednym stopniu swobody impedancja jest odwrotnością receptancji i można ją wyznaczyć doświadczalnie, natomiast dla układów o wielu stopniach swobody doświadczalnie wyznacza się macierz receptancji i na jej podstawie oblicza się macierz impedancji, stosując zależność

$$(1.5) \quad [\bar{a}_{jk}] = [\bar{\alpha}_{jk}]^{-1}.$$

## 2. Analiza teoretyczna

Przystępując do analizy teoretycznej przyjęto ogólny model zagadnienia odpowiadający właściwościom układu: maszyna o korpusie odkształcalnym — elementy elastyczne — podatna konstrukcja podpierająca, którego schemat funkcjonalny pokazuje rys. 1. Na rysunku tym zaznaczono poszczególne możliwości ruchu oraz odpowiadające im sztywności i tłumienie elementów elastycznych.

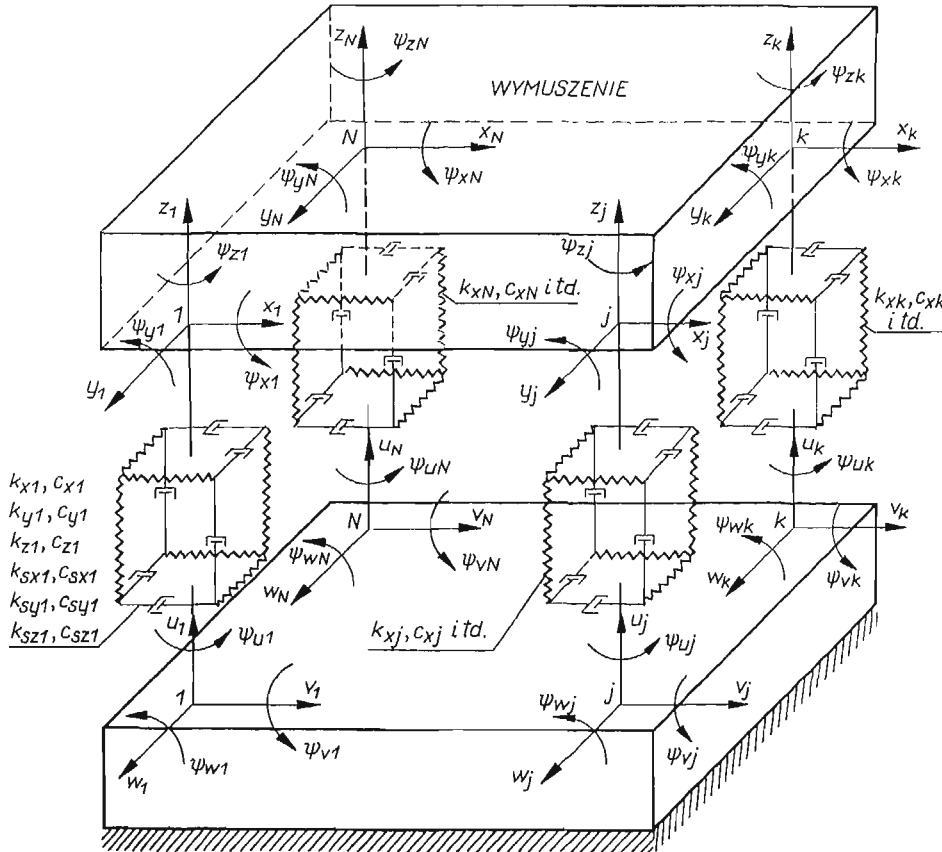
Model ten posiada następujące cechy:

— korpus maszyny oraz konstrukcja podpierająca traktowane są jako układy liniowe odkształcalne o ciągłym rozkładzie masy, sztywności i tłumienia,

— korpus maszyny podparty jest na konstrukcji w dowolnych  $N$  punktach liniowymi bezmasowymi elementami pośredniczymi, charakteryzującymi się sztywnością i tłumieniem. Dla elementów tych przyjęto model Voigta,

— zamocowanie elementów pośredniczych z korpusem maszyny, jak i z konstrukcją podpierającą zapewnia trzy możliwe przemieszczenia liniowe oraz trzy możliwe obroty,

— na korpus maszyny działa wymuszenie w postaci układu sił i momentów okresowych nieharmonicznych.

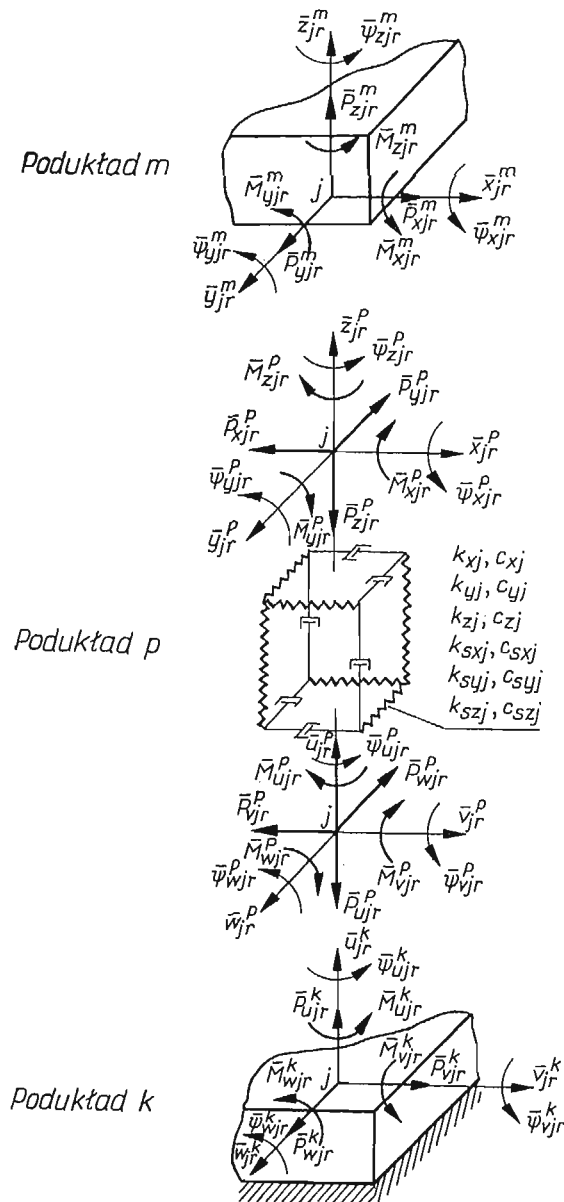


Rys. 1. Schemat funkcjonalny układu: maszyna o korpusie odkształcalnym — elementy elastyczne — podatna konstrukcja podpierająca

Omawiany wyżej model teoretyczny, przy założeniu małych drgań wokół położenia równowagi statycznej oraz niewielkich w tym zakresie odchyłek od liniowości, stanowi odpowiednik spotykanych w praktyce przypadków układów maszynowych, w których maszyna o odkształcalnym korpusie, wykazującym wewnętrzne tłumienie, jest podparta elastycznymi podkładkami lub amortyzatorami specjalnej konstrukcji na odkształcalnej i wykazującej tłumienie konstrukcji podpierającej. Dla układów liniowych, dzięki możliwości stosowania zasady superpozycji, przemieszczenie wywołane wymuszeniem okresowym znajduje się jako sumę przemieszczeń wywołanych kolejnymi składnikami harmo-

nicznymi wymuszenia. Wystarczy więc, aby metoda ogólna rozwiązania zagadnienia pozwalała otrzymać rozwiązanie dla dowolnej  $r$ -tej harmonicznej wymuszenia.

W przypadkach praktycznych bardzo często wystarcza ograniczenie szeregu harmoniczných do dwóch lub trzech składników z uwagi na fakt, że amplitudy wyższych harmoniczných sił lub momentów generowanych przez maszyny są małe w porównaniu z amplitudami pierwszych dwóch lub trzech harmoniczných.



Rys. 2. Rozbicie układu z rys. 1 na podukłady dla  $j$ -tego punktu podparcia

Układ drgający o schemacie funkcjonalnym przedstawionym na rys. 1 można rozbić na trzy podukłady, mianowicie:

- podukład  $m$  — maszyna o korpusie odkształcalnym,
- podukład  $p$  — układ elastycznych elementów podpierających,
- podukład  $k$  — podatna konstrukcja podpierająca.

Należy przy tym uwzględnić wzajemne oddziaływanie na siebie tych podukładów w czasie drgań.

Rysunek 2 pokazuje rozbitcie w  $j$ -tym punkcie z zaznaczeniem poszczególnych możliwości ruchu oraz sił i momentów wzajemnego oddziaływania dla  $r$ -tej harmoniczej wymuszenia. Zachodzą przy tym następujące warunki ciągłości i równowagi:

a) dla  $j$ -tego punktu styku elementu z maszyną:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{jr} &= \bar{x}_{jr}^m = \bar{x}_{jr}^p, \\ \bar{y}_{jr} &= \bar{y}_{jr}^m = \bar{y}_{jr}^p, \\ \bar{z}_{jr} &= \bar{z}_{jr}^m = \bar{z}_{jr}^p, \\ \bar{\psi}_{xjr} &= \bar{\psi}_{xjr}^m = \bar{\psi}_{xjr}^p, \\ \bar{\psi}_{yjr} &= \bar{\psi}_{yjr}^m = \bar{\psi}_{yjr}^p, \\ \bar{\psi}_{zjr} &= \bar{\psi}_{zjr}^m = \bar{\psi}_{zjr}^p; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{xjr}^m &= -\bar{P}_{xjr}^p, \\ \bar{P}_{yjr}^m &= -\bar{P}_{yjr}^p, \\ \bar{P}_{zjr}^m &= -\bar{P}_{zjr}^p, \\ \bar{M}_{xjr}^m &= -\bar{M}_{xjr}^p, \\ \bar{M}_{yjr}^m &= -\bar{M}_{yjr}^p, \\ \bar{M}_{zjr}^m &= -\bar{M}_{zjr}^p; \end{aligned}$$

b) dla  $j$ -tego punktu styku elementu z konstrukcją podpierającą:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{v}_{jr} &= \bar{v}_{jr}^k = \bar{v}_{jr}^p, \\ \bar{w}_{jr} &= \bar{w}_{jr}^k = \bar{w}_{jr}^p, \\ \bar{u}_{jr} &= \bar{u}_{jr}^k = \bar{u}_{jr}^p, \\ \bar{\psi}_{vjr} &= \bar{\psi}_{vjr}^k = \bar{\psi}_{vjr}^p, \\ \bar{\psi}_{wjr} &= \bar{\psi}_{wjr}^k = \bar{\psi}_{wjr}^p, \\ \bar{\psi}_{ujr} &= \bar{\psi}_{ujr}^k = \bar{\psi}_{ujr}^p; \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{vjr}^k &= -\bar{P}_{vjr}^p, \\ \bar{P}_{wjr}^k &= -\bar{P}_{wjr}^p, \\ \bar{P}_{zjr}^k &= -\bar{P}_{zjr}^p, \\ \bar{M}_{vjr}^k &= -\bar{M}_{vjr}^p, \\ \bar{M}_{wjr}^k &= -\bar{M}_{wjr}^p, \\ \bar{M}_{ujr}^k &= -\bar{M}_{ujr}^p. \end{aligned}$$

Przemieszczenia  $j$ -tego punktu podukładu  $m$  (maszyna) można wyrazić wzorami (2.5).

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{xJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{x}_{wJr}, \\
\bar{y}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{yJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{y}_{wJr}, \\
\bar{z}_{Jr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{zJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{z}_{wJr}, \\
\bar{\psi}_{xJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi xJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wxJr}, \\
\bar{\psi}_{yJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi yJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wyJr}, \\
\bar{\psi}_{zJr}^m &= \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPxkr} \bar{P}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPykr} \bar{P}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJPzkr} \bar{P}_{zkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMxkr} \bar{M}_{xkr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMykr} \bar{M}_{ykr}^m + \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{\psi zJMzkr} \bar{M}_{zkr}^m + \bar{\psi}_{wzJr}.
\end{aligned}$$

(2.5)

Symbole  $\bar{\alpha}_{jkr}$  oznaczają odpowiednie receptancje swobodnej maszyny, a symbole  $\bar{x}_{wjkr}$ ,  $\bar{y}_{wjkr}$ ,  $\bar{z}_{wjkr}$ ,  $\bar{\psi}_{wxjkr}$ ,  $\bar{\psi}_{wyjkr}$ ,  $\bar{\psi}_{wzjkr}$  oznaczają odpowiednie przemieszczenia w rozważanych punktach wywołane na swobodnej maszynie działaniem wymuszenia generowanego przez pracującą maszynę.

Z uwagi na identyczny charakter równań układ (2.5), dla uproszczenia zapisu, a także programowania obliczeń na maszynie cyfrowej przedstawiono w zapisie skróconym

$$(2.6) \quad \bar{z}_{jr}^m = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{jkr} \bar{P}_{kr}^m + \bar{z}_{wjkr}, \quad j = 1, \dots, n,$$

gdzie  $n$  jest wielokrotnością liczby punktów podparcia  $N$ .

W najogólniejszym przypadku  $n = 6N$ , gdy w układzie (2.5) rozpatruje się występowanie wszystkich rodzajów przemieszczeń, sił i momentów. Wyrażenie (2.6) w zapisie macierzowym ma postać

$$(2.7) \quad \{\bar{z}_{jr}^m\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^m\} + \{\bar{z}_{wjkr}\},$$

gdzie macierz  $[\bar{\alpha}_{jkr}]$  jest macierzą receptancji maszyny swobodnej. Po uwzględnieniu w (2.7) zależności (2.1) i przekształceniu otrzymuje się

$$(2.8) \quad \{\bar{P}_{kr}^m\} = [\bar{a}_{jkr}] (\{\bar{z}_{jr}^m\} - \{\bar{z}_{wjkr}\}),$$

gdzie macierz  $[\bar{a}_{jkr}]$  jest macierzą impedancji maszyny swobodnej.

Podobnie jak poprzednio, dla maszyny przemieszczenia  $j$ -tego punktu podkładu  $k$  (konstrukcja podpierająca) można wyrazić macierzowo

$$(2.9) \quad \{\bar{u}_{jr}^k\} = [\bar{\beta}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^k\},$$

gdzie macierz  $[\bar{\beta}_{jkr}]$  jest macierzą podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej.

Uwzględniając w (2.9) zależności (2.3) po przekształceniu otrzymuje się

$$(2.10) \quad \{\bar{P}_{kr}^k\} = [\bar{b}_{jkr}] \{\bar{u}_{jr}^k\},$$

gdzie macierz  $[\bar{b}_{jkr}]$  jest macierzą sztywności dynamicznej konstrukcji podpierającej.

Tak więc wzory (2.8) i (2.10) pozwalają wyznaczyć macierze uogólnionych sił występujących w punktach styku maszyny i konstrukcji podpierającej z elementami elastycznymi w zależności od macierzy uogólnionych przemieszczeń tych punktów i macierzy sztywności dynamicznej.

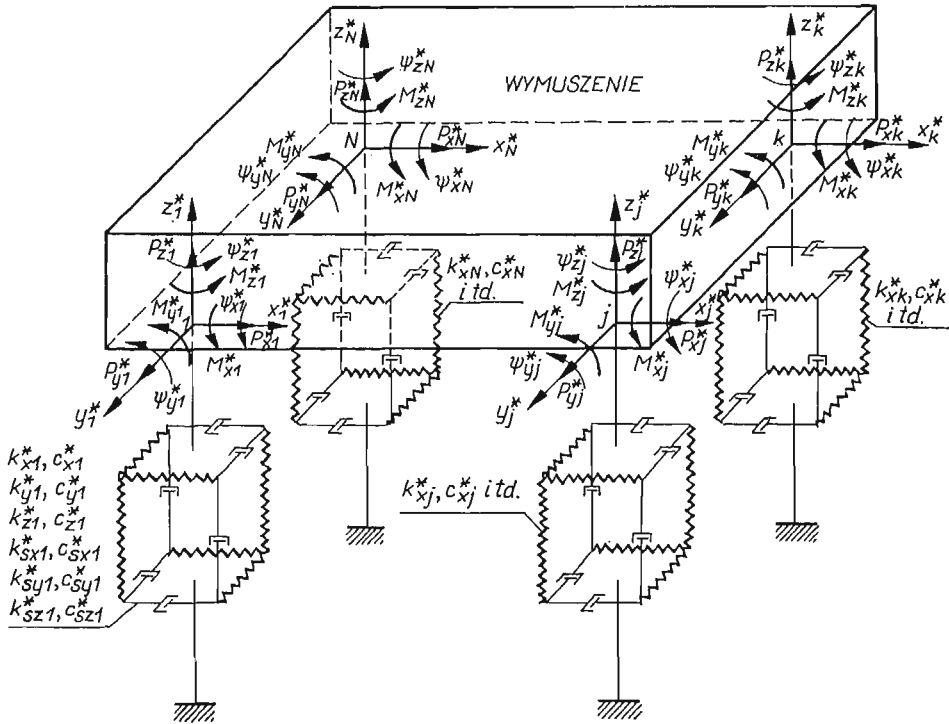
Wyznaczanie charakterystyki dynamicznej maszyny wymaga opracowania metody pośredniej, albowiem zrealizowanie swobodnego w przestrzeni stanu maszyny jest praktycznie niemożliwe. Dlatego też rozpatruje się układ pomocniczy, którego schemat funkcjonalny wraz z oznaczeniem możliwych ruchów w miejscach podparcia pokazuje rys. 3.

Odkształcalny korpus maszyny podpira się w rozpatrywanych poprzednio punktach liniowymi elementami elastycznymi, lecz o znanych parametrach  $k_j^*$  (sztywność) i  $c_j^*$  (tłumienie).

Przyjęto dalej, że na układ, oprócz wymuszenia generowanego przez pracującą maszynę, działa w punktach podparcia maszyny znane dodatkowe zewnętrzne wymuszenie okresowe, które na rys. 3 oznaczono symbolami  $\bar{P}_j^*$  i  $\bar{M}_j^*$  z odpowiednimi indeksami kierunków.

Układ z rys. 3 można rozbić na dwa podukłady:

- podukład  $m$  — maszyna o korpusie odkształcalnym,
- podukład  $p^*$  — elementy elastyczne o znanych parametrach.



Rys. 3. Schemat funkcjonalny układu pomocniczego do wyznaczania charakterystyki dynamicznej maszyny

Na rys. 4 pokazano to dla  $j$ -tego punktu wraz z oznaczeniem możliwych przemieszczeń liniowych i możliwych obrotów oraz występujących sił i momentów.

Stosując zapis skrócony, warunki ciągłości i równowagi dla  $j$ -tego punktu rozdzielania można zapisać w postaci równości macierzy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \{\bar{z}_{jr}^*\} &= \{\bar{z}_{jr}^{m*}\} = \{\bar{z}_{jr}^{p*}\}, \\ \{\bar{P}_{jr}^{m*}\} &= -\{\bar{P}_{jr}^{p*}\}, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n.$$

Przemieszczenia  $j$ -tego punktu podparcia podukładu  $m$  (maszyna) dają się zapisać

$$(2.12) \quad \{\bar{z}_{jr}^{m*}\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^{m*}\} + \{\bar{P}_{kr}^*\} + \{\bar{z}_{wjr}\},$$

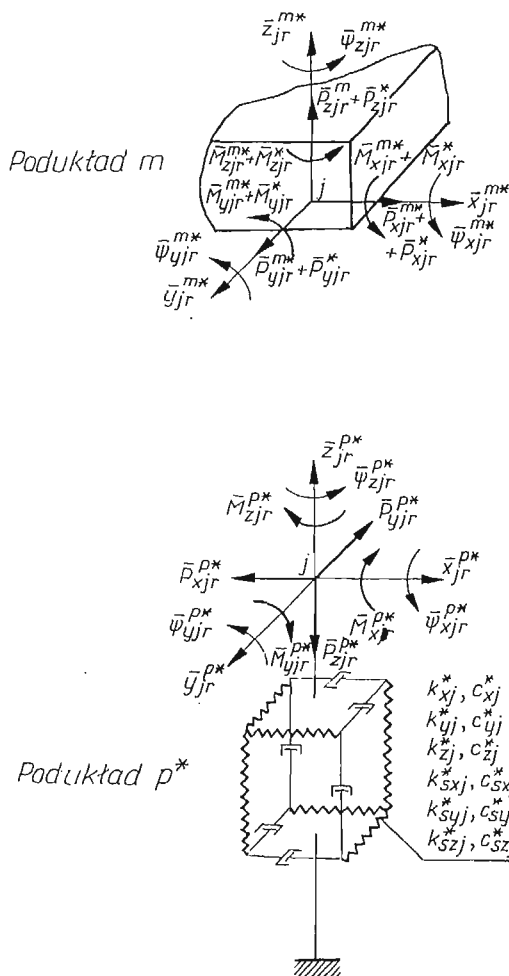
natomiast przemieszczenia  $j$ -tego punktu podukładu  $p$  jako

$$(2.13) \quad \{\bar{z}_{jr}^{p*}\} = [\bar{\delta}_{jrr}^*] \{\bar{P}_{kr}^{p*}\},$$

gdzie macierz podatności  $[\bar{\delta}_{jrr}^*]$  elementów elastycznych o znanych parametrach jest macierzą diagonalną, a jej elementy wyrażają się wzorem

$$(2.14) \quad \bar{\delta}_{jrr}^* = \frac{1}{k_j^* + i\omega c_j^*}.$$





Rys. 4. Rozbicie układu z rys. 3 na podukłady dla j-tego punktu podparcia

Po podstawieniach i przekształceniach wyrażenie (2.12) przybiera postać

$$(I + [\bar{\alpha}_{jkr}] [\bar{\delta}_{jkr}^*]^{-1}) \{\bar{z}_j^*\} = [\bar{\alpha}_{jkr}] \{\bar{P}_{kr}^*\} + \{\bar{z}_{wj}^*\},$$

gdzie  $I$  oznacza macierz jednostkową.

Z kolei rozpatruje się dwa przypadki:

1. W układzie pomocniczym nie występuje wymuszenie generowane przez pracującą maszynę (maszyna nie pracuje), lecz tylko znane wymuszenie zewnętrzne w punktach jej podparcia. Wówczas w (2.15) znika składnik  $\{\bar{z}_{wj}^*\}$  i otrzymuje się

$$(2.16) \quad [\bar{\alpha}_{jkr}] = [\bar{\gamma}_{jkr}] (I - [\bar{\delta}_{jkr}^*]^{-1} [\bar{\gamma}_{jkr}])^{-1},$$

gdzie  $[\bar{\gamma}_{jkr}]$  jest kwadratową macierzą receptancji układu pomocniczego z rys. 3 i jej elementy mogą być wyznaczone doświadczalnie na tymże układzie pomocniczym.

2. Na układ pomocniczy działa tylko wymuszenie generowane przez pracującą maszynę, przy braku wymuszenia zewnętrznego w punktach podparcia maszyny. Wówczas (2.15) przyjmuje postać

$$(2.17) \quad \{\bar{z}_{wj_r}\} = (I + [\bar{\alpha}_{jkr}][\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1})\{z_{wj_r}^*\},$$

gdzie macierz  $\{z_{wj_r}^*\}$  jest kolumnową macierzą przemieszczeń punktów podparcia maszyny w układzie pomocniczym, gdy działa tylko wymuszenie generowane przez pracującą maszynę, a jej elementy wyznacza się doświadczalnie na układzie pomocniczym, jako odpowiednie przemieszczenia punktów podparcia układu pomocniczego wywołane pracą maszyny. Ponieważ wygodniej jest używać macierz sztywności dynamicznej  $[\bar{a}_{jkr}]$  dlatego przekształcając (2.16) otrzymuje się

$$(2.18) \quad [\bar{a}_{jkr}] = [\bar{\alpha}_{jkr}]^{-1} = [\bar{\gamma}_{jkr}]^{-1} - [\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1}.$$

Macierz receptancji  $[\bar{\beta}_{jkr}]$  konstrukcji podpierającej można wyznaczyć doświadczalnie bezpośrednio na rzeczywistym obiekcie w oparciu o definicję receptancji, a macierz impedancji  $[\bar{b}_{jkr}]$  przez odwrócenie macierzy receptancji

$$(2.19) \quad [\bar{b}_{jkr}] = [\bar{\beta}_{jkr}]^{-1}.$$

Związki między siłami i przemieszczeniami dla  $j$ -tego elementu elastycznego podparcia, uwzględniając warunki równowagi (2.2) i (2.4), można w zapisie macierzowym wyrazić

$$(2.20) \quad \begin{aligned} -[k_j](\{\bar{z}_{j_r}\} - \{\bar{u}_{j_r}\}) - [c_j](\dot{\{\bar{z}}_{j_r}\} - \dot{\{\bar{u}}_{j_r}\}) &= \{\bar{P}_{j_r}^m\}, \\ [k_j](\{\bar{z}_{j_r}\} - \{u_{j_r}\}) + [c_j](\dot{\{\bar{z}}_{j_r}\} - \dot{\{u_{j_r}\}}) &= \{\bar{P}_{j_r}^k\}, \end{aligned}$$

gdzie  $[k_j]$  i  $[c_j]$  są diagonalnymi macierzami sztywności i tłumienia elementów elastycznego podparcia, a  $\dot{\{\bar{z}}_{j_r}\}$  i  $\dot{\{\bar{u}}_{j_r}\}$  kolumnowymi macierzami pochodnych przemieszczeń maszyny i konstrukcji wsporczej.

Podstawiając do (2.20) wyrażenia (2.8) i (2.10) oraz przedstawiając odpowiednie przemieszczenia zespolone w postaci

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \bar{z}_{j_r} &= \bar{Z}_{j_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{u}_{j_r} &= \bar{U}_{j_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{z}_{wj_r} &= \bar{Z}_{wj_r} e^{i\omega t}, \\ \bar{z}_{wj_r}^* &= \bar{Z}_{wj_r}^* e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

gdzie  $\bar{Z}_{j_r}$ ,  $\bar{U}_{j_r}$ ,  $\bar{Z}_{wj_r}$ ,  $\bar{Z}_{wj_r}^*$  są amplitudami zespolonymi rozpatrywanych przemieszczeń, otrzymuje się po uprzednim uproszczeniu przez  $e^{i\omega t}$  wyrażenie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} ([k_j] + i\omega[c_j] + [\bar{a}_{jkr}])\{\bar{Z}_{j_r}\} - ([k_j] + i\omega[c_j])\{\bar{U}_{j_r}\} &= \{\bar{P}_{wj_r}\}, \\ ([k_j] + i\omega[c_j])\{\bar{Z}_{j_r}\} - ([k_j] + i\omega[c_j] + [\bar{b}_{jkr}])\{\bar{U}_{j_r}\} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.23) \quad \{\bar{P}_{wj_r}\} = ([\bar{a}_{jkr}] + [\bar{\delta}_{j_r}^*]^{-1})\{\bar{Z}_{wj_r}^*\}.$$

(2.26)

$$\begin{bmatrix}
 k_1 + a'_{11r} & a'_{12r} & \dots & a'_{1nr} & -k_1 & 0 & \dots & 0 & -(r\omega c_1 + a''_{11r}) & -a''_{12r} & \dots & -a''_{1nr} & r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 \\
 a'_{21r} & k_2 + a'_{22r} & \dots & a'_{2nr} & 0 & -k_2 & \dots & 0 & -a''_{21r} & -(r\omega c_2 + a''_{22r}) & \dots & -a''_{2nr} & 0 & r\omega c_2 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 a'_{n1r} & a'_{n2r} & \dots & k_n + a'_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -k_n & -a''_{n1r} & -a''_{n2r} & \dots & -(r\omega c_n + a''_{nnr}) & 0 & 0 & \dots & r\omega c_n \\
 k_1 & 0 & \dots & 0 & -(k_1 + b'_{11r}); & -b'_{12r} & \dots & -b'_{1nr} & -r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 & r\omega c_1 + b''_{11r} & b''_{12r} & \dots & b''_{1nr} \\
 0 & k_2 & \dots & 0 & -b'_{21r}; & -(k_2 + b'_{22r}) & \dots & -b'_{2nr} & 0 & -r\omega c_2 & \dots & 0 & b''_{21r} & r\omega c_2 + b''_{22r} & \dots & b''_{2nr} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & k_n & -b'_{n1r} & -b'_{n2r} & \dots & -(k_n + b'_{nnr}) & 0 & 0 & \dots & -r\omega c_n & b''_{n1r} & b''_{n2r} & \dots & r\omega c_n + b''_{nnr} \\
 r\omega c_1 + a''_{11r} & a''_{12r} & \dots & a''_{1nr} & -r\omega c_1 & 0 & \dots & 0 & k_1 + a'_{11r} & -a'_{12r} & \dots & a'_{1nr} & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\
 a''_{21r}; & r\omega c_2 + a''_{22r} & \dots & a''_{2nr} & 0 & -r\omega c_2 & \dots & 0 & a'_{21r} & k_2 + a'_{22r} & \dots & a'_{2nr} & 0 & -k_2 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 a''_{n1r} & a''_{n2r} & \dots & r\omega c_n + a''_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -r\omega c_n & a'_{n1r} & a'_{n2r} & \dots & k_n + a'_{nnr} & 0 & 0 & \dots & -k_n \\
 r\omega c_1 & 0 & \dots & 0; & -(r\omega c_1 + b''_{11r}); & -b''_{12r} & \dots & -b''_{1nr} & k_1 & 0 & \dots & 0 & -(k_1 + b'_{11r}) & -b'_{12r} & \dots & -b'_{1nr} \\
 0 & r\omega c_2 & \dots & 0 & -b''_{21r}; & -(r\omega c_2 + b''_{22r}) & \dots & -b''_{2nr} & 0 & k_2 & \dots & 0 & -b'_{21r} & -(k_2 + b'_{22r}) & \dots & -b'_{2nr} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & r\omega c_n & -b''_{n1r} & -b''_{n2r} & \dots & -(r\omega c_n + b''_{nnr}); & 0 & 0 & \dots & k_n & -b'_{n1r} & -b'_{n2r} & \dots & -(k_n + b'_{nnr})
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 z'_{1r} \\
 z'_{2r} \\
 \vdots \\
 z'_{nr} \\
 u'_{1r} \\
 u'_{2r} \\
 \vdots \\
 u'_{nr} \\
 z''_{1r} \\
 z''_{2r} \\
 \vdots \\
 z''_{nr} \\
 u''_{1r} \\
 u''_{2r} \\
 \vdots \\
 u''_{nr}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 P'_{w1r} \\
 P'_{w2r} \\
 \vdots \\
 P'_{wnr} \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 P''_{w1r} \\
 P''_{w2r} \\
 \vdots \\
 P''_{wnr} \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Przedstawiając symboliczny zapis macierzowy (2.22) w postaci rozwiniętej, po uprzednim rozbiciu zespolonych wyrazów na część rzeczywistą i urojoną

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \bar{Z}_{jr} &= z'_{jr} + iz''_{jr}, \\ \bar{U}_{jr} &= u'_{jr} + iu''_{jr}, \\ \bar{a}_{jkr} &= a'_{jkr} + ia''_{jkr}, \\ \bar{b}_{jkr} &= b'_{jkr} + ib''_{jkr}, \\ \bar{P}_{wjr} &= P'_{wjr} + iP''_{wjr} \end{aligned}$$

otrzymuje się macierzowy zapis (2.26) układu równań służących do obliczenia przemieszczeń punktów podparcia układu z rys. 1. Przy czym amplitudy rzeczywiste oraz kąty przesunięcia fazowego przemieszczeń maszyny i konstrukcji podpierającej dla  $j$ -tego punktu podparcia oblicza się ze wzorów

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \bar{Z}_{jr} &= \sqrt{z'^2_{jr} + z''^2_{jr}}; & \operatorname{tg} \varphi_{zjr} &= \frac{z''_{jr}}{z'_{jr}}, \\ \bar{U}_{jr} &= \sqrt{u'^2_{jr} + u''^2_{jr}}; & \operatorname{tg} \varphi_{ujr} &= \frac{u''_{jr}}{u'_{jr}}. \end{aligned}$$

Do rozwiązania układu równań (2.26) ułożono program obliczeń na maszynie cyfrową ODRA 1204.

Omówiona metoda wyznaczania drgań układów maszynowych może odnosić się nie tylko do punktów podparcia, lecz również do każdego dowolnego punktu maszyny czy konstrukcji podpierającej. Postępowanie jest wówczas, analogiczne jak dla  $j$ -tego punktu podparcia.

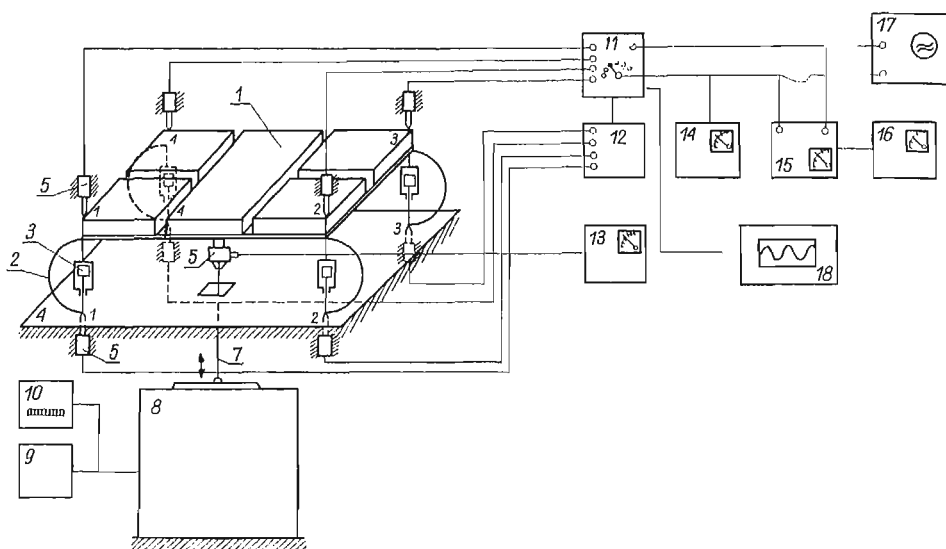
Jednak obliczenia te nie są tak istotne, jak obliczenia drgań punktów podparcia, które można wykorzystać do rozwiązania zagadnienia izolacji drgań, znalezienia wielkości sił przenoszonych na fundament czy korpus maszyny, a także mogą stanowić podstawę do opracowania programu doboru optymalnego podparcia, zapewniającego w danym układzie żądany poziom drgań.

### 3. Weryfikacja doświadczalna metody

W celu sprawdzenia poprawności opracowanej metody, a także możliwości praktycznego jej zastosowania, przeprowadzono badania modelowe na stanowisku badawczym, którego schemat wraz ze schematem blokowym używanej aparatury pomiarowej pokazuje rys. 5.

Poza tym w celu doświadczalnego wyznaczenia charakterystyk dynamicznych modelu maszyny i modelu konstrukcji podpierającej zbudowano odpowiednie stoiska badawcze i przeprowadzono na nich pomiary.

Obliczone na maszynie cyfrowej w Ośrodku Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Łódzkiej wartości amplitud przemieszczeń i kątów przesunięcia fazowego porównano z wynikami badań modelowych dla 48 różnych wariantów pomiarowych.



Rys. 5. Schemat układu do badań modelowych

1 — model maszyny, 2 — sprężyny podparcia, 3 — tłumiki olejowe, 4 — model konstrukcji podpierającej, 5 — czujnik przemieszczeń, 6 — piezoelektryczny czujnik siły, 7 — ciągnio stalowe, 8 — wzбудnik drgań, 9 — generator, 10 — falomierz liczący, 11 — miernik N-101, 12 — przystawka miernika N-101, 13 — miernik drgań SM-231, 14 — miliwoltomierz V-611, 15 — fazomierz MF-1, 16 — woltomierz U-720, 17 — oscyloskop OKD 505 A, 18 — rejestrator RAP-4

Uzyskano średnią względną różnicę amplitud przemieszczeń 12,0% oraz średnią różnicę kątów przesunięcia fazowego 8,3°.

Z uwagi na zakres mierzonych przemieszczeń (32–248  $\mu\text{m}$ ) oraz dokładność stosowanej złożonej aparatury pomiarowej uzyskaną zgodność można uznać za zadowalającą.

Stanowi to potwierdzenie prawidłowości omawianej metody oraz programów obliczeń na maszynie cyfrowej.

#### 4. Uwagi końcowe

Dokonana analiza teoretyczna zagadnienia pozwala na wyznaczenie przed zamontowaniem maszyny w miejscu jej pracy następujących wielkości:

- a) drgań układu złożonego z maszyny o korpusie odkształcalnym mocowanej na podatnej konstrukcji podpierającej poprzez elastyczne elementy pośredniczące;
- b) charakterystyk dynamicznych maszyn i konstrukcji podpierającej, ich porównanie z ewentualną oceną np. na drodze statystycznej;
- c) sił dynamicznego oddziaływania na maszynę lub konstrukcję podpierającą, przy założonym poziomie drgań układu.

Wyprowadzone związki poza oceną stanu drgań układów maszynowych mogą stanowić podstawę do opracowania programu obliczeń na maszynie cyfrowej, dla doboru parametrów  $c$  i  $k$  elastycznego podparcia zapewniającego żądany poziom drgań zarówno maszyny, jak i konstrukcji podpierającej.

## Literatura cytowana w tekście

1. Ch. CREDE, *Vibration and Shock Isolation*, John Wiley and Sons, London 1962.
2. I. A. GOLIŃSKI, *Wibroizolacja maszyn wirnikowych*, Arkady, Warszawa 1964.
3. N. MAHAREM, H. METWALLY, *The effectiveness of the dynamic vibration absorber in coupled vibrations*, Alexandria University Press. Alexandria 1970.
4. C. B. BIEZENO, R. GRAMMEL, *Elastic problems of single machine elements*, London and Glasgow 1956.
5. Z. PARSZEWSKI, *Pewna metoda dynamicznego wyrównoważania maszyn wirnikowych*, ABM, 5, 2 (1958).
6. Z. PARSZEWSKI, P. GROOTENHUIS, *Balancing multi bearing machines*, The Engineer, Vol. 211, Nr 5483, London 1961.
7. L. WAŚKO, *Drgania maszyn mocowanych elastycznie na fundamencie podatnym przy wymuszeniu nieharmonicznym*, Praca doktorska, PŁ., 1972.
8. Z. PARSZEWSKI, L. WAŚKO, *Elastic Isolation Between Machine and Flexible Foundation*, The Third World Congress The Theory of Machines and Mechanisms, Kupari 1971.
9. W. WODZIŃSKI, *Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji*, Praca doktorska, PŁ., 1973.

## Р е з ю м е

## ВИБРАЦИИ МАШИН С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ КОРПУСАМИ ЗАКРЕПЛЕННЫХ НА ПОДАТЛИВОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе приводится метод определения вибраций системы состоящей из машины с деформируемым корпусом закрепленной на податливой несущей конструкции посредством изолирующей системы упругих и демпфирующих элементов.

Полученные зависимости позволят определить вибрации машины и несущей конструкции заблаговременно до монтажа машины на рабочем месте. Источником этих вибраций являются произвольные периодические усилия возникающие при работе машины.

Для решения этих зависимостей составлена программа вычислений на цифровой машине. Разработан при этом метод косвенного определения динамической характеристики машины рассматриваемой как свободная в пространстве. Работа содержит также экспериментальную проверку выведенных зависимостей.

## S u m m a r y

## VIBRATION OF MACHINES WITH DEFORMABLE BODIES ELASTICITY SUPPORTED ON FLEXIBLE STRUCTURES

The paper presents the method of determining the vibrations of a system composed of the machine with deformable body supported on a flexible structure by means of a set of elastic and damping elements. On the grounds of the equations obtained it is possible to calculate the vibrations of both the machine and of the supporting structure before the machine is mounted on its place of work. The sources of these vibrations are arbitrary periodic forces which arise due to the motion of the machine. In order to solve the equations, the programme for a digital computer was prepared. The method of determining the dynamic characteristics of the machine, considered to be free in the space, was also elaborated. The paper also includes the experimental verification of the formulae derived.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1974 r.