MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 13 (1975)

PŁASKIE ZAGADNIENIE KONTAKTOWE W NIESYMETRYCZNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracy rozpatrzymy statyczne zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni sprężystej, mikropolarnej, jednorodnej, izotropowej i centrosymetrycznej w płaskim stanie odkształcenia. Deformację opisywać będą wektory: przemieszczenia $\mathbf{u}$ i obrotu $\boldsymbol{\varphi}$ w postaci ([1], [2]):

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \qquad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3). \tag{1.1}$$

Stan naprężenia określają tensory: naprężeń siłowych σ_{ji} i naprężeń momentowych μ_{ji}, gdzie:

$$\sigma_{ji} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \mu_{ji} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1.2}$$

Zagadnienia kontaktowe w ramach klasycznej teorii sprężystości posiadają bogatą literaturę; między innymi monografie [3]–[8]. W teorii niesymetrycznej ze związanymi obrotami $\left(\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}\right)$ płaskie zagadnienie stempla rozpatrzono w [9], [10]. W pracach [11], [12] rozpatrzono zagadnienie kontaktowe w osiowo-symetrycznym stanie odkształcenia w ramach liniowej niesymetrycznej teorii sprężystości.

2. Podstawowe równania i zależności

Układ równań równowagi (pomijamy siły masowe i momenty masowe) dla płaskiego stanu odkształcenia (1.1) ma postać [2]:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_1 + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_1 e + 2\alpha\partial_2\varphi_3 = 0, \\ (\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_2 + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_2 e - 2\alpha\partial_1\varphi_3 = 0, \\ [(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha]\varphi_3 + 2\alpha(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

przez α, λ, μ, γ, ε oznaczyliśmy stałe materiałowe, zaś $\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a, $e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ (dylatacja).

Składowe naprężeń (1.2) związane są z przemieszczeniem i obrotem (1.1) przy pomocy następujących związków konstytutywnych:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu+\lambda)\partial_1 u_1 + \lambda\partial_2 u_2, \\ \sigma_{22} &= (2\mu+\lambda)\partial_2 u_2 + \lambda\partial_1 u_1, \\ \sigma_{12} &= (\mu+\alpha)\partial_1 u_2 + (\mu-\alpha)\partial_2 u_1 - 2\alpha\varphi_3, \\ \sigma_{21} &= (\mu+\alpha)\partial_2 u_1 + (\mu-\alpha)\partial_1 u_2 + 2\alpha\varphi_3, \\ \mu_{i3} &= (\gamma+\varepsilon)\partial_i\varphi_3, \qquad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Składowe $\sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$ wyznacza się ze wzorów:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33} &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}), \\
\mu_{3i} &= \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{i3}, \qquad (i = 1,2).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

3. Sformulowanie zagadnienia stempla i sprowadzenie go do układu dualnych równań całkowych

Rozpatrzmy teraz półprzestrzeń $D = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \geqslant 0, -\infty < (x_2, x_3) < \infty\}$, na którą za pośrednictwem sztywnego, nieskończenie długiego w kierunku osi $0x_3$ stempla działa na jednostkę długości siła $P = P(x_1, x_2)$. Ponadto zakładamy, że przekrój stempla płaszczyznami $x_3 = \text{const}$ jest zawsze jednakowy.

Warunki brzegowe dla rozważanego zagadnienia zapiszemy w postaci

$$
\begin{aligned}
&u_1(0, x_2) = f(x_2) && \text{dla} \quad |x_2| < c, \\
&\sigma_{11}(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad |x_2| > c, \\
&\sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad -\infty < x_2 < \infty
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

oraz uwzględniać będziemy warunki regularności w nieskończoności

$$
\sigma_{ji} \to 0, \quad \mu_{ji} \to 0 \quad \text{przy} \quad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \to \infty.
\tag{3.2}
$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego (3.1) wykorzystamy rozwiązanie pomocnicze, mianowicie najpierw rozpatrzymy półprzestrzeń D w płaskim stanie odkształcenia (1.1) z następującymi warunkami brzegowymi:

$$
\sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \; \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \; \mu_{13}(0, x_2) = 0, \; \text{dla} \; -\infty < x_2 < \infty.
\tag{3.3}
$$

Rozwiązanie układu równań równowagi (2.1) z warunkami (3.3) i (3.2) jest postaci [2], [13]:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{ \left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi| x_1} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} \left(e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi| x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
u_2(x_1, x_2) &= \frac{i}{2\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \left\{ \left(\frac{-\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi| x_1} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{|\xi|} e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi| x_1} \right) \right\} e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
\varphi_3(x_1, x_2) &= \frac{i}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \frac{2\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)} \left(e^{-|\xi| x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right) e^{-i\xi x_2} d\xi
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

oraz

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{(1+x_1|\xi|)e^{-|\xi|x_1} + 2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\right)\right\} e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \{x_1|\xi| e^{-|\xi|x_1} + 2a_0\xi^2(e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1})\} e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

$$\sigma_{21}(x_1, x_2) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \frac{|\xi|}{\xi} \left\{x_1|\xi| e^{-|\xi|x_1} + 2a_0\xi^2 \frac{|\xi|}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1}\right)\right\} e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

(3.5)

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left\{(-1+x_1|\xi|)e^{-|\xi|x_1} + 2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\right)\right\} e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

$$\mu_{13}(x_1, x_2) = \frac{-2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} (e^{-|\xi|x_1} - e^{-\varrho x_1}) e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0} \left(e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right) e^{-i\xi x_2} d\xi.$$

We wzorach (3.4) i (3.5) $\tilde{p}(\xi)$ oznacza transformację Fouriera

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) e^{i\xi x_2} d\xi \tag{3.6}$$

oraz

$$\Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0\xi^2\left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho}\right), \quad \varrho \equiv \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}, \tag{3.7}$$

a przez a_0, l^2 oznaczyliśmy:

$$a_0 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)}, \quad l^2 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\alpha\mu}. \tag{3.8}$$

Aby rozwiązać równania równowagi (2.1) z mieszanymi warunkami brzegowymi (3.1) należy znaleźć taką funkcję $p(x_2)$ [określoną w (3.3)], aby spełnione były warunki (3.1). Zauważmy, że rozwiązanie (3.4) i (3.5) spełnia tożsamościowo $(3.1)_3$ i $(3.1)_4$, (tzn. $\sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) = 0$ dla $-\infty < x_2 < \infty$).

Rozpatrzmy teraz następujące dwa przypadki:

Przypadek 1: o funkcji $f(x_2)$, określonej w (3.1), zakładamy, że:

$$f(x_2) = f(-x_2) \neq \text{const} \quad \text{dla} \quad x_2 \in (-c, c). \tag{3.9}$$

Wykorzystując (3.9), $(3.1)_1$ i $(3.1)_2$ oraz (3.4) i (3.5) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned} &\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi}\frac{1}{\Delta_0(\xi)}\cos(\xi x_2)d\xi = f(x_2) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x_2 < c,\\ &\int_0^\infty \tilde{p}(\xi)\cos(\xi x_2)d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > c. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Można zauważyć, że jeżeli przejdziemy do granicy ze stałymi materiałowymi a_0, $l^2 \to 0$ to $\Delta_0(\xi) \to 1$ i układ dualnych równań całkowych (3.10) odpowiada układowi dla zagadnienia kontaktowego w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 433).

Przypadek 2: o funkcji $f(x_2)$ określonej w (3.1) zakładamy, że

$$f(x_2) = -f(-x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in (-c, c). \tag{3.11}$$

Wykorzystując (3.11), $(3.1)_1$, $(3.1)_2$ oraz (3.4) i (3.5) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned} &\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi}\frac{1}{\Delta_0(\xi)}\sin(\xi x_2)d\xi = f(x_2) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x_2 < c,\\ &\int_0^\infty \tilde{p}(\xi)\sin(\xi x_2)d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > c. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Jeżeli przejdziemy do granicy ze stałymi materiałowymi l^2, $a_0 \to 0$ to $\Delta_0(\xi) \to 1$ i układ (3.12) odpowiada układowi równań całkowych dla odpowiedniego zagadnienia w ramach klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 438).

4. Rozwiązanie układów dualnych równań całkowych (3.10) i (3.12)

Wprowadzając teraz następujące oznaczenia:

$$\eta = \xi c, \quad x_2 = cy \tag{4.1}$$

oraz wykorzystując fakt, że

$$\cos z = \sqrt{\frac{\pi}{2}z}\, J_{-\frac{1}{2}}(z), \quad \sin z = \sqrt{\frac{\pi}{2}z}\, J_{\frac{1}{2}}(z), \tag{4.2}$$

dla przypadku 1 (układ dualnych równań całkowych (3.10)) otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\psi(\eta)]\,(1+H(\eta))\,J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,\\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\psi(\eta)]J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie

$$H(\eta) \equiv \frac{1-\Delta_0\left(\frac{\eta}{c}\right)}{\Delta_0\left(\frac{\eta}{c}\right)}, \tag{4.4}$$

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{f(cy)}{\sqrt{y}}, \tag{4.5}$$

zaś

$$\psi(\eta) \equiv q\left(\frac{\eta}{c}\right), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{p}(\xi) = \xi^2 q(\xi). \tag{4.6}$$

W przypadku 2 [układ dualnych równań całkowych (3.12)] używając (4.1) i $(4.2)_2$ możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\psi(\eta)]\,(1+H(\eta))\,J_{\frac{1}{2}}(\eta y)\,d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0<y<1,\\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\psi(\eta)]\,J_{\frac{1}{2}}(\eta y)\,d\eta = 0, \quad \text{dla} \quad y>1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie $H(\eta)$ jest określone wzorem (4.4), $g(y)$ wzorem (4.5), zaś $\psi(\eta)$ wzorem (4.6)

Teraz naszym zadaniem będzie wyznaczenie niewiadomych funkcji z równań (4.3) i (4.7). Metoda, którą zastosujemy została podana przez KINGA [15], [14]. Rozpatrzono tam następujący układ dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \xi^\alpha[1+F(\xi)]\varphi(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi = h(x) \quad \text{dla} \quad 0<x<1,\\ &\int_0^\infty \varphi(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x>1, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gdzie $F(\xi)$, $h(x)$ funkcje znane, niewiadomą jest funkcja $\varphi(\xi)$.

Metoda [15] polega na tym, że rozwiązanie przybliżone układu równań (4.8) dla $|F(\xi)| \ll 1$ można przyjąć w postaci

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi)+\varphi_1(\xi), \tag{4.9}$$

gdzie funkcja $\varphi_0(\xi)$ spełnia następujący układ dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \xi^\alpha\varphi_0(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi = h(x) \quad \text{dla} \quad 0<x<1,\\ &\int_0^\infty \varphi_0(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x>1, \end{aligned} \tag{4.10}$$

funkcja zaś $\varphi_1(\xi)$ spełnia układ dualnych równań całkowych w postaci:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \xi^\nu \varphi_1(\xi) J_\nu(\xi x)\, d\xi = h_1(x) \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1, \\ &\int_0^\infty \varphi_1(\xi) J_\nu(\xi x)\, d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x > 1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdzie

$$h_1(x) = -\int_0^\infty \xi^\alpha F(\xi)\varphi_0(\xi) J_\nu(\xi x)\, d\xi. \tag{4.12}$$

W równaniach (4.3) i (4.7) funkcja $H(\eta)$ określona wzorem (4.4) ma postać

$$H(\eta) \equiv \frac{1}{\Delta_0\left(\frac{\eta}{c}\right)} - 1 = \frac{c^2}{c^2 + 2a_0\eta^2\left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \frac{c^2}{l^2}}}\right)} - 1.$$

Dla $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \gg 1$ lub $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $|H(\eta)| \ll 1$, możemy więc do równań (4.3) i (4.7) zastosować metodę podaną wzorami (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12).

Przypadek 1: Rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (4.3) przyjmujemy w postaci

$$\psi(\eta) = \psi_0(\eta) + \psi_1(\eta). \tag{4.13}$$

Na podstawie (4.10) funkcja $\psi_0(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\psi_0(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)\, d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1, \\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\psi_0(\eta)] J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)\, d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Układ równań (4.14) ma taką samą postać, jak układ równań odpowiadający zagadnieniu stempla działającego na półprzestrzeń sprężystą w płaskim stanie odkształcenia w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 434).

Rozwiązanie układu równań (4.14) jest znane, [8], i ma postać

$$\psi_0(\eta) = \frac{c(\mu+\lambda)\mu}{\pi(2\mu+\lambda)}\left\{-\frac{1}{\eta}J_1(\eta)\int_0^1 (1-y^2)^{-1/2}\frac{f(cy)}{\sqrt{cy}}\,dy + \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2}dt \int_0^1 y\frac{f(cyt)}{\sqrt{yt}} J_0(\eta y)\,dy\right\}, \tag{4.15}$$

gdzie funkcja $f(x)$ jest podana we wzorze (3.1).

Funkcja $\psi_1(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań całkowych:

$$(4.16)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\psi(\eta)]J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = g_1(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,\\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\psi(\eta)]J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.17)\qquad g_1(y) = -\int_0^\infty \eta^{-1}H(\eta)\,[\eta^{5/2}\psi_0(\eta)]J_{-\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta.$$

Rozwiązaniem układu równań (4.16) jest

$$(4.18)\qquad \psi_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\frac{1}{\eta}J_1(\eta)\int_0^1 (1-y^2)^{-1/2}g_1(y)dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2}dt \int_0^1 yg_1(yt)J_0(y\eta)d\eta\right\}.$$

Przybliżone rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (3.10) będzie miało postać

$$(4.19)\qquad \tilde{p}(\xi) \equiv \frac{\eta^2}{c^2}q\left(\frac{\eta}{c}\right) = \xi^2[\psi_0(c\xi)+\psi_1(c\xi)],$$

gdzie ψ_0 jest określone przez (4.15) a ψ_1 przez (4.18).

Rozkład przemieszczeń, obrotów i naprężeń pochodzących od działania symetrycznego stempla określonego przez warunki brzegowe (3.1) oraz (3.9) uzyskujemy podstawiając do (3.4) i (3.5) funkcję $\tilde{p}(\xi)$ określoną wzorem (4.19).

P r z y p a d e k 2. Stosując metodę rozwiązania podaną wzorami (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12) do układu równań (4.7) wprowadzamy rozwiązania w postaci

$$(4.20)\qquad \psi(\eta) = \hat{\psi}_0(\eta)+\hat{\psi}_1(\eta),$$

gdzie $\hat{\psi}_0(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań całkowych:

$$(4.21)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\hat{\psi}_0(\eta)]J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = g(y) \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,\\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\hat{\psi}_0(\eta)]J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y > 1. \end{aligned}$$

Układ równań (4.21) ma taką samą postać, jak układ dualnych równań całkowych odpowiadający odpowiedniemu zagadnieniu stempla w klasycznej teorii sprężystości ([8] s. 439).

Rozwiązaniem (4.21) jest

$$\hat{\psi}_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\eta^{-1}J_0(\eta)\int_0^1 y(1-y^2)^{-1/2}g(y)\,dy + \tag{4.22}$$

$$+\int_0^1 t(1-t^2)^{-1/2}dt\int_0^1 \eta g(\eta t)J_0(y\eta)\,d\eta\Big],$$

funkcja zaś $\hat{\psi}_1(\eta)$ musi spełniać następujący układ równań:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \eta^{-1}[\eta^{5/2}\hat{\psi}_1(\eta)]J_{\frac{1}{2}}(\eta y)\,d\eta = g_2(y) \quad \text{dla} \quad 0<y<1,\\ &\int_0^\infty [\eta^{5/2}\hat{\psi}_1(\eta)]J_{\frac{1}{2}}(\eta y)\,d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y>1,\end{aligned} \tag{4.23}$$

gdzie

$$g_2(y) = -\int_0^\infty \eta^{-1}H(\eta)\,[\eta^{5/2}\hat{\psi}_0(\eta)]J_{\frac{1}{2}}(\eta y)\,d\eta. \tag{4.24}$$

Rozwiązanie układu równań (4.23) ma postać

$$\hat{\psi}_1(\eta) = \Big[\eta^{-1}J_0(\eta)\int_0^1 y(1-y^2)^{-1/2}g_2(y)\,dy + \tag{4.25}$$

$$+\int_0^1 t(1-t^2)^{-1/2}dt\int_0^1 \eta g_2(\eta t)J_0(\eta y)\,d\eta\Big].$$

Rozwiązanie przybliżone układu dualnych równań całkowych (3.12) uzyskujemy w postaci

$$\tilde{p}(\xi) = \xi^2[\hat{\psi}_0(\xi c)+\hat{\psi}_1(\xi c)], \tag{4.26}$$

gdzie $\hat{\psi}_0(\xi c)$ jest określone wzorem (4.22), a $\hat{\psi}_1(\xi c)$ wzorem (4.25).

Rozkład przemieszczeń, obrotów i naprężeń pochodzących od działania na półprzestrzeń D stemplem o warunkach brzegowych (3.1) i z założeniem (3.11), uzyskujemy podstawiając (4.26) do (3.4) i (3.5).

5. Przypadek szczególny

Oddzielnego rozwiązania wymaga zagadnienie stempla gładko zakończonego, które jest opisane następującymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned}&u_1(0, x_2) = \text{const} && \text{dla} \quad |x_2| < c,\\ &\sigma_{11}(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad |x_2| > c,\\ &\sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad -\infty < x_2 < \infty\end{aligned} \tag{5.1}$$

oraz warunkami regularności w nieskończoności (3.2).

Podobnie jak w pracy [16] dla klasycznej teorii sprężystości i w pracy [9] dla niesymetrycznej teorii sprężystości ze związanymi obrotami, zamiast rozpatrywać warunki (5.1), rozwiązywać będziemy układ równań (2.1) z następującymi warunkami brzegowymi:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|_{(0,x_2)} = 0, \quad \text{dla} \quad |x_2| < c,\\
&\sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \text{dla} \quad |x_2| > c,\\
&\sigma_{12}(0, x_2) = \mu_{13}(0, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad -\infty < x_2 < \infty.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Wykorzystując (3.4), (3.5) oraz (5.2) uzyskujemy następujący układ dualnych równań całkowych:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \sin(\xi x_2) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x_2 < c,\\
&\int_0^\infty \tilde{p}(\xi) \cos(\xi x_2) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 > c.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Aby wyznaczyć niewiadomą funkcję $\tilde{p}(\xi)$ z powyższego układu równań całkowych najpierw scałkujemy po x_2 drugie równanie z (5.3). Wtedy układ dualnych równań całkowych (5.3) możemy zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \sin(\xi x_2) d\xi = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x_2 < c,\\
&\int_0^\infty \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi} \sin(\xi x_2) d\xi = B \quad \text{dla} \quad x_2 > c,
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

gdzie B oznacza nieznaną stałą.

Jeżeli wykorzystamy oznaczenia (4.1), (4.4) oraz zależności (4.2) to układ (5.4) zapiszemy następująco:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \eta \Psi(\eta) [1 + H(\eta)] J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < y < 1,\\
&\int_0^\infty \Psi(\eta) J_{\frac{1}{2}}(\eta y) d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} B \frac{c}{\sqrt{y}} \quad \text{dla} \quad y > 1,
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenie:

$$
\Psi(\eta) \equiv \tilde{p}\left(\frac{\eta}{c}\right) \frac{c}{\sqrt{\eta}}. \tag{5.6}
$$

Dla $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \gg 1$ lub $\frac{a_0}{c^2} \ll 1$ i $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $|H(\eta)| \ll 1$ [funkcja $H(\eta)$ jest określona wzorem (4.4)], zatem możemy zastosować przybliżoną metodę Kinga cytowaną już w pracy [wzory (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12)].

Rozwiązanie układu dualnych równań całkowych (5.5) przyjmujemy w postaci

$$\Psi(\eta) = \Psi_0(\eta)+\Psi_1(\eta), \tag{5.7}$$

gdzie funkcja $\Psi_0(\eta)$ spełnia następujący układ dualnych równań całkowych:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta\Psi_0(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad 0<y<1, \\ &\int_0^\infty \Psi_0(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}B\frac{c}{\sqrt{y}} \quad \text{dla} \quad y>1, \end{aligned} \tag{5.8}$$

a funkcja $\Psi_1(\eta)$ jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta\Psi_1(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = k(y) \quad \text{dla} \quad 0<y<1, \\ &\int_0^\infty \Psi_1(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = 0 \quad \text{dla} \quad y>1, \end{aligned} \tag{5.9}$$

gdzie przez $k(y)$ oznaczyliśmy

$$k(y) = -\int_0^\infty \eta H(\eta)\Psi_0(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta \quad \text{dla} \quad 0<y<1. \tag{5.10}$$

Układy równań (5.8) i (5.9) są znanego typu [14].

Rozwiązaniem układu dualnych równań całkowych (5.8) jest [17], [14]

$$\Psi_0(\eta) = \frac{2}{\pi}B\frac{c}{\sqrt{\eta}}J_0(\eta), \tag{5.11}$$

stąd podstawiając (5.11) do (5.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned} k(y) &= -\frac{2}{\pi}Bc\int_0^\infty \sqrt{\eta}H(\eta)J_0(\eta)J_{\frac{1}{2}}(\eta y)d\eta = \\ &= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}B\frac{c}{\sqrt{y}}\int_0^\infty H(\eta)J_0(\eta)\sin(\eta y)d\eta, \quad \text{dla} \quad 0<y<1. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Rozwiązanie układu równań całkowych (5.9) możemy zapisać w następującej postaci [17], [14]:

$$\Psi_1(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\eta}\int_0^1 J_1(t\eta)dt\int_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2-y^2}}k(y)dy, \tag{5.13}$$

gdzie $k(y)$ dane jest wzorem (5.12).

Wykorzystując (5.6) i (5.7), mamy

$$\tilde{p}\left(\frac{\eta}{c}\right) = \frac{2}{\pi}BJ_0(\eta)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\eta}{c}\int_0^1 J_1(t\eta)dt\int_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2-y^2}}k(y)dy. \tag{5.14}$$

Jeżeli wykorzystamy teraz fakt, że dla $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ funkcję $\varrho(\eta)$ [wzór (3.7)] możemy aproksymować następująco [11]:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\eta^2}{c^2}+\frac{1}{l^2}} \approx \frac{\eta}{c}+\frac{c}{2\eta l^2}, \tag{5.15}$$

to funkcję $H(\eta)$ [wzór (4.4)] możemy zapisać w postaci

$$H(\eta) = -A_0\frac{\eta^2}{\eta^2+\Omega^2}, \tag{5.16}$$

gdzie

$$A_0 = \frac{a_0}{l^2+a_0}, \quad \Omega^2 = \frac{c^2}{2(l^2+a_0)}, \tag{5.17}$$

zaś a_0, l^2 dane jest przez (3.8).

Wykorzystując teraz następujące całki [18]:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty J_0(ax)\sin(bx)dx = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0<b<a, \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} & \text{dla} \quad 0<a<b, \end{cases} \\ \int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta^2+x^2}J_0(ux)dx = \frac{\operatorname{sh}(a\beta)}{\beta}K_0(\beta u), \quad \text{dla} \quad a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ u>a.\end{gathered} \tag{5.18}$$

Tu K_0 jest funkcją Mac-Donalda. Wykorzystując (5.18) możemy funkcję $k(y)$ [wzór (5.12)] przedstawić w postaci

$$k(y) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}BA_0\Omega K_0(\Omega)\frac{c}{\sqrt{y}}\operatorname{sh}(y\Omega). \tag{5.19}$$

Dalej możemy zapisać, że

$$\int\limits_0^t \frac{y^{3/2}}{\sqrt{t^2-y^2}}k(y)dy = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}BA_0\Omega K_0(\Omega)c\int\limits_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2-y^2}}\operatorname{sh}(\Omega y)dy. \tag{5.20}$$

Ale

$$\int\limits_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2-y^2}}\operatorname{sh}(\Omega y)dy = \Omega\int\limits_0^t \sqrt{t^2-y^2}\operatorname{ch}(\Omega y)dy = \Omega t^2\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\operatorname{ch}(tx\Omega)dx.$$

Powyższa całka po obliczeniu ma dość skomplikowaną postać (zawierać będzie funkcje I_1, L_1 — funkcje Bessela i Mac-Donalda) zatem, ponieważ dla $\frac{c^2}{l^2} \ll 1$ mamy $\Omega \ll 1$, więc możemy przyjąć $\operatorname{ch}(tx\Omega) \approx 1$.

Stąd

$$\int\limits_0^t \frac{y}{\sqrt{t^2-y^2}}\operatorname{sh}(\Omega y)dy \approx \frac{\pi}{4}\Omega t^2. \tag{5.21}$$

Zanotujemy teraz następującą całkę [18]:

$$\int_0^1 x^{\nu+1}J_\nu(ax)\,dx = a^{-1}J_{\nu+1}(a), \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \tag{5.22}$$

zatem wstawiając do (5.14) wzór (5.20), następnie wykorzystując (5.21), (5.22) oraz (4.1), otrzymamy

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{2}{\pi}BJ_0(\xi c) - \frac{1}{\pi}BA_0\Omega^2K_0(\Omega)J_2(\xi c). \tag{5.23}$$

6. Wyznaczanie naprężeń kontaktowych $\sigma_{11}(0, x_2)$ (dla $|x_2| < c$)

Wykorzystując $(3.5)_1$ mamy

$$\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \tilde{p}(\xi)\cos(\xi x_2)\,d\xi. \tag{6.1}$$

Zatem, ponieważ [18]

$$\int_0^\infty J_\nu(ax)\cos(\beta x)\,dx = \frac{\cos\left(\nu\arcsin\frac{\beta}{a}\right)}{\sqrt{a^2-\beta^2}} \quad \text{dla} \quad \beta < a \tag{6.2}$$

możemy napisać

$$\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{4}{\pi}\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{c^2-x_2^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{B}{\sqrt{2\pi}}A_0\Omega^2K_0(\Omega)\frac{1-2\frac{x_2^2}{c^2}}{\sqrt{c^2-x_2^2}}, \quad \text{dla} \quad |x_2| < c. \tag{6.3}$$

Stałą B można wyznaczyć z faktu, że siła wypadkowa działająca na półprzestrzeń D za pośrednictwem stempla jest równa P. Zatem stałą B można określić z następującej równości:

$$P = \int_{-c}^{c} \sigma_{11}(0, x_2)\,dx_2, \tag{6.4}$$

stąd po podstawieniu do (6.4) wzoru (6.3) otrzymujemy

$$B = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}P. \tag{6.5}$$

7. Uwagi końcowe

Rozpatrzymy teraz przejście graniczne ze stałymi materiałowymi $l^2, a_0 \to 0$. W tym celu zanotujmy następujące granice:

$$\begin{cases} \lim\limits_{l^2,a_0\to 0}\dfrac{1}{\varrho} = \lim\limits_{l^2,a_0\to 0}\left(\xi^2+\dfrac{1}{l^2}\right)^{-1/2} = 0, \quad \lim\limits_{l^2,a_0\to 0}\Delta_0(\xi) = 1, \\ \lim\limits_{l^2,a_0\to 0}H(\eta) = \lim\limits_{l^2,a_0\to 0}\dfrac{1-\Delta_0(\xi)}{\Delta_0(\xi)} = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Zatem

$$\lim_{l^2, a_0 \to 0} \psi_1(\xi c) = 0, \quad \lim_{l^2, a_0 \to 0} \hat{\psi}_1(\xi c) = 0, \quad \lim_{l^2, a_0 \to 0} \Psi(\xi c) = 0, \tag{7.2}$$

gdzie ψ_1 jest określone wzorem (4.18), $\hat{\psi}_1$ wzorem (4.25) zaś Ψ_1 wzorem (5.13). Zatem jeżeli wykorzystamy granice (7.1) w (3.4) i (3.5), a następnie jeśli uwzględnimy dla poszczególnych przypadków rozwiązanie na funkcję $\tilde{p}(\xi)$ dane odpowiednimi wzorami: (4.19) wraz z (4.15), (4.26) wraz z (4.22) i (5.14), to otrzymamy rozkład przemieszczeń i naprężeń dla analogicznych zagadnień kontaktowych w klasycznej teorii sprężystości [8].

Można także zauważyć, że charakter osobliwości naprężeń $\sigma_{11}(0, x_2)$ dla $x_2 = c$ i $x_2 = -c$ w przypadku stempla omawianego w rozdziale 5 pozostaje niezmieniony w stosunku do klasycznej teorii sprężystości $\left(\text{rozpatrzyliśmy przypadek, gdy } \frac{a_0}{c^2} \ll 1 \text{ i } \frac{c^2}{l^2} \ll 1\right)$. Rozpatrzone w pracy przypadki (1) i (2) zagadnienia stempla (rozdział 4) oraz przypadek z rozdziału 5 umożliwiają otrzymanie w prosty sposób, wobec zasady superpozycji, rozwiązania, gdy funkcja $f(x_2)$ [dana w (3.1)] nie jest ani parzysta, ani nieparzysta dla $x_2 \in (-c, c)$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. Nowacki, Bull. Acad. Polon. Sci, Techn., **6** (1971), 237, [427].
3. Л. А. Галин, *Контактные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1953.
4. Л. И. Штеерман, *Контактные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1949.
5. Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Издат. АН СССР, Москва-Ленинград 1963.
6. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
7. И. Н. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, изд., 3, Изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1949.
8. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, New Jork 1951.
9. R. Muki, E. Sternberg, ZAMP, **5**, 16 (1965).
10. M. Sokołowski, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
11. J. Dyszlewicz, W. Rudnicki, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., 11 (1972) 465, [851].
12. R. S. Dhaliwal, Arch. Mech. Stos., **24**, 4 (1972), [645].
13. J. Dyszlewicz, S. Matysiak, Mech. Teor. i Stos., 4 (1973).
14. I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Duke University, 1960 (Report).
15. L. V. King, Proc., Roy. Soc. A., 153 (1936), [1-16].
16. I. N. Sneddon, *Integral Transform Methods for the Solution of Mixed Boundary Value Problems in the Classical Theory of Elasticity* (Skrypt).
17. E. C. Titchmarsh, *Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, 1948.
18. И. С. Градштейн, И. М. Рижик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений*, Изд. НАУКА, Москва 1971.

Резюме

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе рассмотрена, в рамках несимметрической теории упругости, [1, 2] задача о полупространстве в плоском деформированном состоянии под воздействием идеального жесткого штампа (без учета сил трения). Рассматривается перемещение под штампом $u_1(0, x_2) = f(x_2)$ для $|x_2| < c$

при предположении, что $f(x_2) = f(-x_2)$ или $f(x_2) = -f(-x_2)$ для $|x_2| < c$. Задача сводится к системе двойственных интегральных уравнений, которые в дальнейшем решаются с помощью метода предложенного в [15, 14]. Для случая, когда $f(x_2) = \text{const}$, исследована особенность напкогда ряжений $\delta_{11}(0, x_2)$ в точках $x_2 = c$ и $x_2 = -c$. Наконец, рассматриваются предельные переходы материальная константа $\alpha_0, l^2 \to 0$ стремится к нулю.

Summary

PLANE CONTACT PROBLEM OF ASYMMETRIC ELASTICITY

In the paper the static contact problem of a rigid punch and a half-space is considered in the framework of asymmetric elasticity [1, 2]. It is assumed that the medium is in a plane state of strain, and the friction forces are neglected. The displacement under the punch $u_1(0, x_2) = f(x_2)$ for $|x_2| < c$ is considered assuming $f(x_2) = f(-x_2)$ or $f(x_2) = -f(-x_2)$. The problem is reduced to a system of dual integral equations and solved by means of the method given in [15], [14].

In the case of $f(x_2) = \text{const}$ the stress singularities at the points $x_2 = c$ and $x_2 = -c$ are discussed. The limiting case of the material constant $\alpha_0, l^2 \to 0$ tending to zero is also considered.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Praca zostala zlożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1974 r.