

JEDNOWYMIAROWE DYNAMICZNE POLE NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH
WYWOŁANE RUCHOMYM POLEM TEMPERATURY

JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

1. Wstęp

Zagadnienie naprężeń cieplnych w elementach konstrukcyjnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi stanowi ważny problem z punktu widzenia zastosowań technicznych, np. w procesach obróbki cieplnej czy też obróbki skrawaniem.

Ruchome obciążenie termiczne działające na element może być dane w postaci poruszającego się źródła ciepła lub też ruchomego pola temperatury.

Większość prac poświęconych problemom naprężeń cieplnych wywoływanych obciążeniami termicznymi dotyczy zagadnień quasi-statycznych (nie uwzględniano wpływu sił bezwładności na współrzędne stanu naprężenia). Dynamicznym zagadnieniem naprężeń cieplnych zajmował się ŻÓRAWSKI [7], który wyznaczył pole naprężeń dla płaskiego ruchomego źródła ciepła w przestrzeni lepkosprężystej.

Należy nadmienić, że niestacjonarnym przepływem ciepła w elementach sprężystych, wywołanym wskutek przyłożonego ruchomego pola temperatury, zajmował się ROŻNOWSKI w pracach [4, 5, 6]. W pracach tych autor przeprowadzał swe rozważania w ramach teorii przewodnictwa cieplnego i nie określał stanu naprężenia w tych elementach.

W niniejszej pracy wyznaczono rozkład temperatury i naprężeń cieplnych w półprzestrzeni sprężystej, $x_1 \geq 0$, wywołanych ruchomym obciążeniem termicznym w postaci $T_0 \eta(vt - x_1) \cdot \eta(t)$, poruszającym się w głąb półprzestrzeni ze stałą prędkością v . Zagadnienie potraktowano jako dynamiczne.

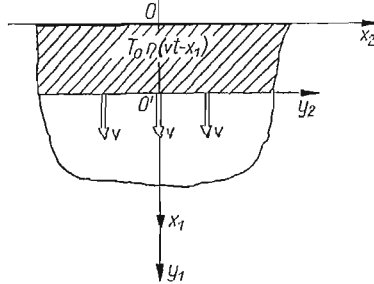
W szczególnym przypadku, gdy $v = 0$, problem sprowadza się do znanego w teorii naprężeń cieplnych zagadnienia DANIŁOWSKIEJ [1].

Oznaczenia

- α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,
- δ_{ij} symbol Kroneckera,
- $\eta(\xi)$ funkcja Heaviside'a,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- κ współczynnik przewodzenia temperatury,
- λ stała Lamégo,
- ν współczynnik Poissona,
- ∇^2 operator Laplace'a,
- ρ gęstość,
- s parametr transformacji Laplace'a,
- σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
- t czas,
- T temperatura względna, odniesiona do stałej temperatury stanu beznaprężeniowego,
- u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
- x_i, y_i współrzędne kartezjańskie.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy półprzestrzeń $x_1 \geq 0$, ogrzewaną ruchomą temperaturą w postaci $T_0 \eta(vt - x_1) \cdot \eta(t)$ rozprzestrzeniającą się w głąb półprzestrzeni z prędkością v (przekrój półprzestrzeni w płaszczyźnie $x_3 = 0$ przedstawia rys. 1). Temperatura o ustalonej wartości T_0 w chwili $t = 0^+$ została przyłożona nagle do brzegu $x_1 = 0$ półprzestrzeni i następnie ruchome czoło tej temperatury o równaniu $x_1 = vt$ przemieszcza się w kierunku



Rys. 1.

prostopadłym do brzegu półprzestrzeni ze stałą prędkością v . Tak więc, pole temperatury w półprzestrzeni opisane jest w taki sposób, że przyjmuje wartość stałą równą T_0 w obszarze $x_1 < vt$ (bezpośrednio z tyłu ruchomego czoła temperatury) oraz na czołe $x_1 = vt$, x_1 , $t \in (0, \infty)$, natomiast przed czołem, czyli dla $x_1 > vt$, x_1 , $t \in (0, \infty)$, zmienia się zgodnie z równaniem przewodnictwa ciepła.

Zakładamy przy tym, że brzeg półprzestrzeni $x_1 = 0$ jest wolny od naprężeń oraz że warunki początkowe dla temperatury i przemieszczeń są jednorodne. Przyjmujemy, że materiał ciała jest izotropowy i doskonale sprężysty, a jego parametry fizyczne nie zależą od temperatury.

Poszukiwać będziemy rozwiązań dla pola temperatury i naprężeń w półprzestrzeni uwzględniając przy tym wpływ sił bezwładności na stan naprężenia.

3. Pole temperatury

W celu określenia pola temperatury w półprzestrzeni rozwiązać należy jednowymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego w postaci

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} T = 0, \quad x_1, t \in (0, \infty),$$

z następującymi warunkami:

$$(3.2) \quad T(x_1, t = 0) = 0, \quad x_1 > 0,$$

$$(3.3) \quad T(x_1, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } 0 \leq x_1 < vt, \\ \theta(x_1, t), & \text{dla } x_1 \geq vt, \end{cases}$$

gdzie $\theta(x_1, t)$ spełnia równanie (3.1) w obszarze $x_1 > vt$, ($t > 0$) oraz warunki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \theta(x_1 = vt, t) &= T_0, & t > 0, \\ \theta(x_1 \rightarrow \infty, t) &\rightarrow 0, & t > 0. \end{aligned}$$

W celu rozwiązania równania (3.1) wprowadzimy ruchomy układ współrzędnych y_1, y_2, y_3 związany z poruszającą się temperaturą T_0 . Po zastosowaniu transformacji liniowej

$$y_1 = x_1 - vt; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = x_3$$

oraz

$$x_1 \equiv x, \quad y_1 \equiv y,$$

równanie (3.1) w nowym układzie przyjmie postać

$$(3.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{T}(y, t) + \frac{v}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \hat{T}(y, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \hat{T}(y, t) = 0,$$

przy czym funkcja $\hat{T}(y, t)$ jest określona dla $y \in (-\infty, \infty)$ i dla $t \in [0, \infty)$.

Warunki (3.2), (3.3) i (3.4) można obecnie zapisać jak następuje:

$$(3.6) \quad \hat{T}(y, t = 0) = 0, \quad |y| < \infty,$$

$$(3.7) \quad \hat{T}(y, t) = T_0, \quad \text{dla } y \leq 0, \quad t > 0$$

oraz

$$(3.8) \quad \hat{T}(y \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

Rozwiązanie równania (3.5) zapiszemy za pomocą dwóch funkcji \hat{T}_1 i \hat{T}_2 określonych odpowiednio dla ujemnych i dodatnich wartości y

$$(3.9) \quad \hat{T} = \begin{cases} \hat{T}_1, & \text{dla } y \leq 0, \\ \hat{T}_2, & \text{dla } y > 0, \end{cases} \quad t > 0.$$

Na podstawie warunku (3.7) łatwo zauważyć, że funkcja \hat{T}_1 jest wielkością stałą równą T_0 , natomiast \hat{T}_2 otrzymamy rozwiązując równanie (3.5) dla $y > 0$ z warunkiem początkowym (3.6) oraz brzegowym w postaci

$$(3.10) \quad \hat{T}_2(y = 0, t) = T_0, \quad t > 0.$$

Stosując zatem do równania (3.5) transformację Laplace'a i wykorzystując warunek początkowy (3.6) oraz warunek (3.10) otrzymamy transformatę rozwiązania \hat{T}_2 w postaci

$$(3.11) \quad \hat{T}_{2L}(y, s) = \frac{T_0}{s} e^{\left[\frac{v}{2\kappa} + \sqrt{\frac{1}{\kappa} \left(s + \frac{v^2}{4\kappa} \right)} \right] y}, \quad y > 0.$$

Po wykonaniu nad rozwiązaniem (3.11) odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymamy, dla $y > 0$,

$$\hat{T}_2(y, t) = \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa} y} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right\}.$$

Tak więc wzór (3.9) można ostatecznie zapisać jak następuje:

$$(3.12) \quad \hat{T}(y, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } y \leq 0, \\ \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa} y} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} - \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \right\}, & \text{dla } y > 0. \end{cases}$$

Podstawiając do otrzymanego rozwiązania (3.12) związek

$$y = x - vt$$

otrzymamy rozwiązanie dla pola temperatury zapisane w układzie współrzędnych związanych z półprzestrzenią w następującej postaci:

$$(3.13) \quad T(x, t) = \begin{cases} T_0, & \text{dla } x \leq vt, \\ \frac{1}{2} T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}, & \text{dla } x > vt, \end{cases}$$

czyli jest to rozwiązanie równania (3.1), które spełnia dane warunki (3.2), (3.3) i (3.4). Należy dodać, że drugie z rozwiązań (3.13) odpowiada funkcji $\theta(x, t)$ z warunku (3.3).

Jak łatwo zauważyć, rozwiązanie (3.13) dla prędkości $v = 0$ przyjmuje znaną postać uzyskaną przez DANIŁOWSKĄ [1]

$$T(x, t) = T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right).$$

4. Pole naprężenia

Współrzędne stanu naprężenia σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) w rozważanej półprzestrzeni wyznaczmy w oparciu o funkcję potencjału termosprężystego przemieszczenia Φ , która w przypadku jednowymiarowym zdefiniowana jest związkiem

$$(4.1) \quad u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x_1, t),$$

gdzie u_1 jest współrzędną wektora przemieszczenia na osi x_1 .

Funkcja potencjału Φ związana jest z temperaturą T równaniem falowym w postaci

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = \vartheta_0 T; \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1,$$

przy czym $c = \sqrt{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{2G}{\rho}}$ jest prędkością rozchodzenia się fali dylatacyjnej w ośrodku sprężystym.

Znajomość funkcji potencjału Φ pozwoli wyznaczyć współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} dla półprzestrzeni z następujących zależności ([3], s. 183):

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \Phi \right) + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

$i, j = 1, 2, 3, \quad \delta_{ij} \text{ — delta Kroneckera,}$

które w przypadku jednowymiarowym mają postać:

$$(4.3) \quad \sigma_{11} = \rho \ddot{\Phi},$$

$$(4.4) \quad \sigma_{22} = \rho \ddot{\Phi} - 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{c^2} \ddot{\Phi} - 2G \vartheta_0 T$$

oraz

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0,$$

przy czym naprężenia (4.3) i (4.4) spełniać muszą następujące warunki:

$$(4.5) \quad \sigma_{11}(x = 0, t) = 0,$$

$$(4.6) \quad \sigma_{11}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad \sigma_{22}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem funkcji potencjału Φ . Wykorzystując rozwiązanie (3.13) dla pola temperatury w rozważanej półprzestrzeni, równanie (4.2) możemy napisać jak następuje:

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = \begin{cases} \vartheta_0 T_0, & \text{dla } x \leq vt; \\ \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}, & \text{dla } x > vt. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (4.7) przyjmiemy w postaci sumy

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

przy czym Φ_1 spełnia równanie

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_1 = \vartheta_0 T_0 \eta(vt-x),$$

natomiast Φ_2 jest rozwiązaniem równania

$$(4.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_2 = \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \eta(x-vt) \times \\ \times \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \right\}.$$

Zajmiemy się najpierw równaniem (4.8). Prawą stronę tego równania możemy zapisać w postaci całkowej jak następuje:

$$\eta(vt-x) \vartheta_0 T_0 = \frac{2}{\pi} \vartheta_0 T_0 \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} [1 - \cos \alpha vt] \sin \alpha x dx.$$

Stosując następnie do równania (4.8) transformację Laplace'a [2] otrzymamy

$$(4.10) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{1L} - \frac{s^2}{c^2} \Phi_{1L} = \frac{2}{\pi} \vartheta_0 T_0 \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \alpha^2 v^2} \right) \sin \alpha x dx.$$

Rozwiązaniem równania (4.10) jest funkcja

$$(4.11) \quad \Phi_{1L} = \frac{\vartheta_0 T_0}{s^3} \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} \left\{ e^{-\frac{s}{v}x} - e^{-\frac{s}{c}x} \right\}.$$

Ponieważ do wyznaczenia naprężeń wykorzystywać będziemy drugą pochodną funkcji Φ względem czasu [patrz wzory (4.3) i (4.4)], dlatego należy wyznaczyć $\ddot{\Phi}_1$, co łatwo uzyskać ze względu na zależność

$$(4.12) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi \right\} = s^2 \Phi_L.$$

Wykonując zatem we wzorze (4.11) odwrotną transformację Laplace'a i wykorzystując zależność (4.12) otrzymamy szukaną funkcję $\ddot{\Phi}_1$ w postaci

$$(4.13) \quad \mathcal{L}^{-1} \{ s^2 \Phi_{1L} \} = \ddot{\Phi}_1 = \frac{\vartheta_0 T_0}{c^2 - v^2} c^2 v^2 \left\{ \eta \left(t - \frac{x}{v} \right) - \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}.$$

Rozważmy obecnie równanie (4.9). Wykonując transformację Laplace'a nad tym równaniem otrzymamy

$$(4.14) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{2L} - \frac{s^2}{c^2} \Phi_{2L} = A(s) e^{-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} (1 - e^{-\frac{s}{v} x}),$$

gdzie

$$A(s) = \frac{1}{2} \vartheta_0 T_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s - \frac{v^2}{\kappa}} + \frac{v}{\sqrt{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{s - \frac{v^2}{\kappa}} \right).$$

Rozwiązaniem równania (4.14) jest funkcja

$$(4.15) \quad \Phi_{2L} = A(s) \frac{1}{s \left(\frac{s}{c^2} - \frac{1}{\kappa} \right)} \left\{ e^{-\frac{s}{c} x} - e^{-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\} + \\ + A(s) \frac{1}{\frac{s^2}{c^2} - \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} + \frac{s}{v} \right)^2} \left\{ e^{-x \left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} + \frac{s}{v} \right)} - e^{\frac{s}{c} x} \right\}.$$

Stosując do rozwiązania (4.15) odwrotną transformację Laplace'a i uwzględniając zależność (4.12) otrzymamy:

$$(4.16) \quad \mathcal{L}^{-1} \{ s^2 \Phi_{2L} \} = \ddot{\Phi}_2 = -B \left\{ c^2 \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) E_1^+ - \frac{vc}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_1^- \right\} + \\ + B \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (E_2^+ + E_2^-) + 2B\eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ c^2 \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + \frac{vc}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_3 - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} E_4 \right\} - \\ - D\eta \left(t - \frac{x}{v} \right) \left\{ \frac{a}{2} (s_1 F_1^1 - s_2 F_1^2) + \frac{1}{v\sqrt{\kappa}} (\sqrt{s_1} F_2^1 - \sqrt{s_2} F_2^2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad \text{c.d.} \quad & -\frac{1}{2\kappa}(F_1^1 - F_1^2) + \frac{a}{2} \left[\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 \right] - \frac{2avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} F_3 + \\
 & + \frac{2+av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{s_2\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 \right] + \\
 & + \frac{v}{2\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4\kappa c^3}{v^2\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 \right] - \\
 & - \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 - \frac{4c^3 F_3}{v(v^2 - 4c^2)} \right] + \\
 & + D\eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ a \left[s_1 e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{2}{v\sqrt{\kappa}} \left(\sqrt{s_1} F_1^5 - \sqrt{s_2} F_2^5 \right) - \frac{1}{\kappa} \left[e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
 & - \frac{4avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - a \left[\frac{s_1^2}{v^2 - s_1} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2^2}{v^2 - s_2} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \\
 & + \frac{2+av^2}{v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{s_2\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] + \\
 & + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
 & \left. - \frac{v}{\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4\kappa c^3}{v^2\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_1^1 = e^{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} & \left\{ e^x \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa \left(t - \frac{x}{v} \right)}} + \sqrt{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] + \right. \\
 & \left. + e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa \left(t - \frac{x}{v} \right)}} - \sqrt{s_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1^2 = e^{s_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)} & \left\{ e^x \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa \left(t - \frac{x}{v} \right)}} + \sqrt{s_2 \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-x} \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \Bigg\}, \\
F_2^1 &= e^{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + \sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_2^2 &= e^{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x} \sqrt{\frac{s_1}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - e^{x} \sqrt{\frac{s_2}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + \sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}; \\
F_3 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + e^{-x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_4 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \left\{ e^{-x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} - v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - e^{x\frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa\left(t-\frac{x}{v}\right)}} + v\sqrt{\frac{1}{\kappa}\left(t-\frac{x}{v}\right)} \right] \right\}, \\
F_5^1 &= e^{s_1\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{s_1\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
F_5^2 &= e^{s_2\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{s_2\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
F_6 &= e^{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{c}\right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{v^2}{\kappa}\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right], \\
E_1^\pm &= e^{\frac{1}{\kappa}c^2t} \left\{ e^{-x\frac{c}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \pm e^{x\frac{c}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + c\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$E_2^\pm = e^{\frac{v^2}{\kappa} t} \left\{ e^{-x \frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] \pm e^{x \frac{v}{\kappa}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right\},$$

$$E_3 = e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right],$$

$$E_4 = F_6,$$

$$a = \frac{v^2 - c^2}{v^2 c^2},$$

$$s_1 = \frac{1}{\kappa} \frac{c^2 v^2}{(v+c)^2},$$

$$s_2 = \frac{1}{\kappa} \frac{c^2 v^2}{(v-c)^2},$$

$$B = \frac{T_0 \vartheta_0}{4}, \quad D = \frac{1}{8} T_0 \vartheta_0 \kappa v c = \frac{1}{2} B \kappa v c.$$

Podstawiając teraz $\ddot{\Phi} = \ddot{\Phi}_1 + \ddot{\Phi}_2$, gdzie $\ddot{\Phi}_1$ jest dana wzorem (4.13) i $\ddot{\Phi}_2$ wzorem (4.16), do (4.3) i (4.4) oraz korzystając ze wzoru (3.13) otrzymamy końcowe wzory dla σ_{11} i σ_{22} .

Łatwo wykazać, że otrzymane w ten sposób naprężenia σ_{11} i σ_{22} są ograniczone dla $x \rightarrow \infty$, a nadto spełniony jest warunek brzegowy (4.5).

5. Analiza wyników i wnioski

Wyznaczone wzory dla naprężeń σ_{11} i σ_{22} można zapisać w postaci sum trzech funkcji w następujący sposób:

$$(5.1) \quad \sigma_{11}(x, t) = A_1^1(x, t) + A_2^1 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) + A_3^1 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

oraz

$$(5.2) \quad \sigma_{22}(x, t) = A_1^2(x, t) + A_2^2 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) + A_3^2 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

gdzie

$$A_1^1(x, t) = - \frac{B \varrho}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \{ (2c^2 - v^2) E_1^+ - v c E_1^- + v^2 (E_2^+ + E_2^-) \},$$

$$A_2^1(x, t) = 2B \varrho \left\{ \frac{1}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \left[(2c^2 - v^2) e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} - v^2 e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + v c E_3 - v^2 E_4 - 2v^2 \right] \right\} -$$

$$+ D \varrho \left\{ a \left[s_1 e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - s_2 e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \frac{2}{v \sqrt{\kappa}} \left[\sqrt{s_1} F_5^1 - \sqrt{s_2} F_5^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\kappa} \left[e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \frac{4 a v c^2}{\kappa (v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + a \left[\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] + \\
& + \frac{2 + av^2}{v\sqrt{\kappa}} \left[\frac{s_1 \sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{s_2 \sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] + \\
& + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_1 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} e^{s_2 \left(t - \frac{x}{c} \right)} - \frac{4c^3}{v(v^2 - 4c^2)} e^{\frac{v^2}{\kappa} \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right] - \\
& - \frac{v}{\kappa\sqrt{\kappa}} \left[\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_5^2 - \frac{4\sqrt{\kappa}c^3}{v^2(v^2 - 4c^2)} F_6 \right] \Bigg\}, \\
A_3^1(x, t) = & 4B\varrho \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - D\varrho \left\{ \frac{1}{2} a (s_1 F_1^1 - s_2 F_1^2) + \frac{1}{v\sqrt{\kappa}} (\sqrt{s_1} F_2^1 - \sqrt{s_2} F_2^2) - \right. \\
& - \frac{1}{2\kappa} (F_1^1 - F_1^2) + \frac{1}{2} a \left(\frac{s_1^2}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \frac{s_2^2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 \right) - \\
& - \frac{2avc^3}{\kappa(v^2 - 4c^2)} F_3 + \frac{2 + av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \left(\frac{s_1 \sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{s_2 \sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 \right) - \\
& - \frac{2 + av^2}{2v\sqrt{\kappa}} \frac{4c^3}{\sqrt{\kappa}(v^2 - 4c^2)} F_4 + \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{s_1}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^1 - \right. \\
& \left. - \frac{s_2}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_1^2 - \frac{4c^3}{v(v^2 - 4c^2)} F_3 \right) - \\
& \left. - \frac{v}{2\kappa\sqrt{\kappa}} \left(\frac{\sqrt{s_1}}{s_1 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^1 - \frac{\sqrt{s_2}}{s_2 - \frac{v^2}{\kappa}} F_2^2 - \frac{4\sqrt{\kappa}c^3}{v^2(v^2 - 4c^2)} F_4 \right) \right\},
\end{aligned}$$

przy czym

$$A_1^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2\varrho} A_1^1(x, t) - G\vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\},$$

$$A_2^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2\varrho} A_2^1(x, t),$$

$$A_3^2(x, t) = \frac{\lambda}{c^2\varrho} A_3^1(x, t) + G\vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v\sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right] + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - 2 \right\}.$$

Funkcje $A_1^1(x, t)$ i $A_1^2(x, t)$ charakteryzują naprężenia powstałe od razu w każdym punkcie półprzestrzeni. Funkcje $A_2^1(x, t)\eta(t-x/c)$ i $A_2^2(x, t)\eta(t-x/c)$ charakteryzują naprężenia poruszające się z prędkością c , których czoło w chwili t_c jest opisane równaniem $t_c = x/c$. Natomiast funkcje $A_3^1(x, t)\eta(t-x/v)$ i $A_3^2(x, t)\eta(t-x/v)$ opisują naprężenia w półprzestrzeni rozprzestrzeniające się z prędkością v wskutek ruchu pola temperatury. Ich czoło w chwili $t_v = \text{const}$ ma równanie $t_v = x/v$.

Dokonując przejścia z $v \rightarrow 0$ we wzorach (5.1) i (5.2), czyli obliczając granice

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sigma_{11}(x, t; v)$$

oraz

$$\lim_{v \rightarrow 0} \sigma_{22}(x, t; v),$$

otrzymamy naprężenia

$$\sigma_{11}(x, t; v = 0) = \varrho T_0 \vartheta_0 c^2 \left[B_1(x, t) - B_2(x, t) \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

oraz

$$\sigma_{22}(x, t; v = 0) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} \sigma_{11}(x, t; v = 0) - 2G \vartheta_0 T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right),$$

przy czym

$$B_1(x, t) = \frac{1}{2} e^{\frac{c^2}{\kappa} t} \left\{ e^{\frac{xc}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + c \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + e^{-\frac{xc}{\kappa}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - c \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) \right\},$$

$$B_2(x, t) = e^{\frac{c^2}{\kappa} t} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Otrzymane w ten sposób naprężenia dla $v = 0$ mają postać identyczną z naprężeniami uzyskanymi przez DANIŁOWSKĄ [1].

Istotnym z punktu widzenia zastosowań inżynierskich wydaje się być przypadek, w którym prędkość ruchu pola temperatury jest mała w porównaniu z prędkością rozchodzenia się fali sprężystej, czyli dla przypadku

$$(5.3) \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

Analizując naprężenia (5.1) i (5.2) przy uwzględnieniu zależności (5.3) otrzymamy

$$(5.4) \quad \bar{\sigma}_{11}(x, t) = -\varrho B c^2 \left\{ 2E_1^+ - \frac{v}{c} E_1^- \right\} + 4B \varrho v^2 \eta \left(t - \frac{x}{v} \right) + \\ + 2B \varrho c^2 \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \left\{ e^{\frac{c^2}{\kappa} \left(t - \frac{c}{x} \right)} + \frac{v}{c} E_3 \right\}$$

oraz

$$(5.5) \quad \bar{\sigma}_{22}(x, t) = \frac{\lambda}{c^2 \varrho} \bar{\sigma}_{11}(x, t) - G \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} + G \vartheta_0 T_0 \left\{ e^{-\frac{v}{\kappa}(x-vt)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} - v \sqrt{\frac{t}{\kappa}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - 2 \right\} \eta(vt - x).$$

Widzimy zatem, że dla małych wartości prędkości v spełniających zależność (5.3), wzory na naprężenia $\bar{\sigma}_{11}$ i $\bar{\sigma}_{22}$ w półprzestrzeni ulegają znacznemu uproszczeniu. Natomiast charakter jakościowy tych naprężeń pozostaje niezmienny.

Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Даниловская, *Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы*, Прикл. Мат. Мех., 9, 2 (1950).
2. В. А. Дишкин, А. П. Прудников, *Справочник по операционному исчислению*, Москва 1965.
3. W. NOWAKSI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
4. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in along cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn., 13, 45 (1965).
5. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w półprzestrzeni w przypadku ruchomego ogrzania na brzegu*, Rozpr. Inż., 17, 4 (1969).
6. T. ROŻNOWSKI, K. SKALSKI, *Niestacjonarny przepływ ciepła w grubej rurze ogrzewanej ruchomym polem temperatury*, Rozpr. Inż., 19, 4 (1971).
7. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a viscoelastic space and certain basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 12, 2 (1961).

Р е з ю м е

ОДНОМЕРНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЫЗВАННЫХ ПОДВИЖНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

В работе рассматриваются динамические термические напряжения в упругом полупространстве $x \geq 0$ вызываемые подвижной термической нагрузкой вида $T_0\eta(vt-x)$, где T_0 — постоянная температура перемещающаяся вглубь пространства со скоростью v , а через $\eta(\xi)$ обозначена функция Хевисайда. Задача решается с помощью методов теории термических напряжений.

S u m m a r y

ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC THERMAL STRESS FIELD DUE TO A MOVING TEMPERATURE FIELD

The paper presents the determination of dynamic thermal stresses in an elastic halfspace $x \geq 0$ due to a moving thermal loading of the following form: $T_0\eta(vt-x)$, ($\eta(\xi)$ — Heaviside's function), in which T_0 represents the constant temperature propagating at a velocity v inside the halfspace.

The problem is considered within the framework of the theory of non-coupled thermoelasticity.

PRACOWNIA TEORII KONSOLIDACJI I TERMODYFUZJI
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1974 r.