

O MODELOWANIU WAŁU WIELOPODPOROWEGO Z WIELOMA TARCZAMI ZA POMOCĄ
WIELKIEGO SYSTEMU BIOSCYLATORÓW
CZĘŚĆ II. BIOSCYLATORY WIELOWSKAŹNIKOWE. MODELOWANIE WAŁU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

W pracy skonstruowano prosty, ale oryginalny model dyskretny sprężystego wału ważkiego na wielu podporach sprężystych, obciążonego wieloma tarczami. Jest nim bioscylator wielowskaźnikowy o sześciu stopniach swobody (trzy w ruchu postępowym, trzy w ruchu obrotowym), za pomocą którego modelujemy: n_3 przekrojów podporowych wału, n_4 przekrojów obciążonych tarczami, n_5 przekrojów redukcji mas, w przestrzeni n_1 -wymiarowej, przy uwzględnieniu n_2 rodzajów ruchu.

Rozważania przeprowadzono w terminologii wielociągów, których algebrę i elementy analizy sformułował autor w oddzielnej pracy. Otrzymane równania różniczkowe są pięćciągowe o współczynnikach wyrażonych ciągami dziesięćciągowymi.

1. Bioscylator jednowskaźnikowy o 2 stopniach swobody

Wprowadzamy oznaczenia:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_j],$$

gdzie $j = 1, 2$ — wskaźnik ilości stopni swobody ciągu jednowskaźnikowego stopni swobody układu mechanicznego, x_1 — wartość wektora przemieszczenia \bar{x}_1 w ruchu postępowym punktu, x_2 — wartość wektora obrotu (kąta) \bar{x}_2 w ruchu obrotowym¹⁾ punktu;

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [\dot{x}_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości liniowej i kątowej w ruchu układu mechanicznego, gdzie \dot{x}_1 — wartość wektora prędkości (liniowej) $\dot{\bar{x}}_1$ w ruchu postępowym punktu, \dot{x}_2 — wartość wektora prędkości (kątowej) $\dot{\bar{x}}_2$ w ruchu obrotowym punktu;

$$\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = [\ddot{x}_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszenia: liniowego i kątowego w ruchu układu mechanicznego, gdzie \ddot{x}_1 — wartość wektora przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ w ruchu po-

¹⁾ Mamy tutaj właściwie ruch punktu po okręgu — ruch wahadła matematycznego.

stępowym punktu, \ddot{x}_2 — wartość wektora przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$ w ruchu obrotowym punktu;

$${}^2\bar{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = [m_{j_1 j_2}],$$

gdzie $j_1 = j_2 = 1, 2$ — wskaźnik ciągu dwuwskaznikowego współczynników bezwładności (mas) samego układu mechanicznego, m_{11} — masa punktu w ruchu postępowym z wartością x_1 przemieszczenia \bar{x}_1 proporcjonalną do wartości S_1 siły sprężystej \bar{S}_1 , m_{12} — moment bezwładności masy punktu względem osi obrotu podzielony przez długość wahadła, jako masa uogólniona w ruchu postępowym o wartości przemieszczenia proporcjonalnej do wartości S_2 momentu sprężystego \bar{S}_2 , m_{21} — masa punktu w ruchu obrotowym względem osi obrotu o wartości obrotu proporcjonalnej do wartości S_1 siły sprężystej \bar{S}_1 pomnożona przez długość odpowiedniego wahadła, jako masa uogólniona, m_{22} — moment bezwładności masy punktu względem osi obrotu odpowiedniego wahadła, jako masa uogólniona punktu w ruchu obrotowym z wartością x_2 obrotu \bar{x}_2 proporcjonalną do wartości S_2 momentu sprężystego \bar{S}_2 .

Oznaczamy również przez:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = [S_j]$$

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił sprężystych, gdzie S_1 — wartość wektora siły sprężystej \bar{S}_1 w ruchu postępowym, S_2 — wartość wektora momentu sprężystego \bar{S}_2 w ruchu obrotowym, jako siły sprężystej uogólnionej²⁾;

$${}^2\bar{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = [s_{j_1 j_2}]$$

— ciąg dwuwskaznikowy współczynników sprężystości danego układu mechanicznego, gdzie s_{11} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy m_{11} siłą \bar{S}_1 , s_{12} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{12} momentem \bar{S}_2 , s_{21} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{21} siłą \bar{S}_1 , s_{22} — współczynnik sprężystości przy obciążeniu masy uogólnionej m_{22} momentem \bar{S}_2 ;

$${}^2\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = [r_{j_1 j_2}]$$

— ciąg dwuwskaznikowy współczynników tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie r_{11} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{11} , na którą działa siła tłumienia \bar{R}_1 o wartości R_1 , r_{12} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{12} , na którą działa moment sił tłumienia \bar{R}_2 o wartości R_2 , r_{21} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{21} , na którą działa siła tłumienia \bar{R}_1 , r_{22} — współczynnik tłumienia (oporu) masy m_{22} , na którą działa moment sił tłumienia \bar{R}_2 ;

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = [R_j]$$

²⁾ W jednym równaniu (sił) moment sprężysty jest siłą sprężystą uogólnioną, w drugim natomiast równaniu (momentów) siła sprężysta jest momentem sprężystym uogólnionym.

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie R_1 — wartość wektora siły tłumienia \bar{R}_1 w ruchu postępowym, R_2 — wartość wektora momentu siły tłumienia \bar{R}_2 w ruchu obrotowym, jako uogólnionej siły tłumienia³⁾;

$$\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = [f_j(t)]$$

— ciąg jednowskaźnikowy uogólnionych sił wymuszających danego układu mechanicznego, gdzie $f_1(t)$ — wartość wektora siły wymuszającej \bar{f}_1 w ruchu postępowym, $f_2(t)$ — wartość wektora momentu sił wymuszających \bar{f}_2 w ruchu obrotowym jako uogólnionej siły wymuszającej⁴⁾.

Przyjmujemy, że:

1 — wartość x_1 przemieszczenia \bar{x}_1 oscylatora postępowego jest proporcjonalna do wartości \ddot{x}_1 jego przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ oraz wartości \ddot{x}_2 przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$ oscylatora obrotowego, czyli $x_1 \sim \ddot{x}_1$, $x_1 \sim \ddot{x}_2$, przy czym $\ddot{x}_2 \sim x_2$;

2 — wartość x_2 kąta obrotu \bar{x}_2 oscylatora obrotowego jest proporcjonalna do wartości \ddot{x}_1 przyspieszenia liniowego $\ddot{\bar{x}}_1$ oscylatora postępowego oraz wartości \ddot{x}_2 swojego przyspieszenia kąowego $\ddot{\bar{x}}_2$, czyli $x_2 \sim \ddot{x}_1$, $x_2 \sim \ddot{x}_2$, przy czym $\ddot{x}_1 \sim x_1$.

Wynikają stąd następujące związki liniowe:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 &= -s_{11}x_1, & m_{12}\ddot{x}_2 &= -s_{12}x_2, \\ m_{21}\ddot{x}_1 &= -s_{21}x_1, & m_{22}\ddot{x}_2 &= -s_{22}x_2, \end{aligned}$$

które jeśli są spełnione przez funkcje $x_1(t)$, $x_2(t)$, to wtedy można otrzymać dwa równania różniczkowe stanowiące układ

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 &= -(s_{11}x_1 + s_{12}x_2), \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 &= -(s_{21}x_1 + s_{22}x_2), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 &= 0, \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 &= 0, \end{aligned}$$

które są także spełnione przez te funkcje.

Otrzymany układ liniowy równań różniczkowych jednorodnych o stałych współczynnikach możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

to jest

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{0}.$$

Wykorzystaliśmy tutaj definicję mnożenia ciągu dwuwskaźnikowego przez ciąg jednowskaźnikowy podaną w pracach [1, 2]. Iloczyn ten jest w przypadku szczególnym identyczny z mnożeniem macierzy.

³⁾ Patrz notka poprzednia dotycząca siły sprężystej.

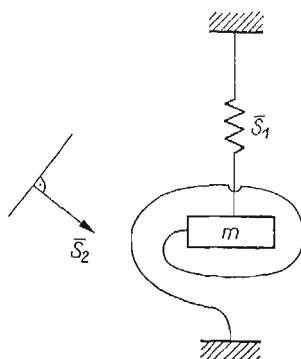
⁴⁾ Patrz obie notki poprzednie.

Jeśli więc na punkt materialny \bar{x} o własnościach ${}^2\bar{m}$ działa uogólniona siła sprężysta \bar{S} , to zachodzi proporcja $\ddot{\bar{x}} \sim \bar{x}$, czyli zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a [5]⁵⁾

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} = -{}^2\bar{s} \cdot \bar{x}.$$

Taki układ mechaniczny [4] będziemy ilustrowali za pomocą masy na jednej sprężynce postępowo-obrotowej podatnej na odkształcenia liniowe względem współrzędnej uogólnionej \bar{x} , to znaczy w kierunku \bar{x}_1 i wokół osi prostopadłej do kąta płaskiego x_2 , który jest wartością kąta obrotu \bar{x}_2 jako wektora równoległego do tej osi.

Przyjęty schemat rysunkowy układu mechanicznego pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Definicja 1.0. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$\bar{P}(t, \bar{x}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{s}) = \bar{0}$$

jednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscylatorem harmonicznym swobodnym⁶⁾ o dwóch stopniach swobody.

Często identyfikujemy równanie opisujące zjawisko z samym zjawiskiem nazywając je krótko bioscylatorem swobodnym. Interpretację mechaniczną bioscylatora o dwóch stopniach swobody przedstawiamy za pomocą jednej sprężynki płaskiej postępowo-obrotowej nazwanej bisprężynką o dwóch stopniach swobody.

Definicja 1.1. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$\bar{P}(t, \bar{x}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{s}, \bar{f}(t)) = \bar{0}$$

niejednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscylatorem wymuszonym o dwóch stopniach swobody.

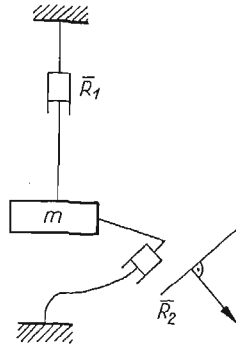
⁵⁾ W pracy tej sformułowano uogólnione prawo Hooke'a układów wielokrotnych jako wielkich systemów stereomechanicznych.

⁶⁾ Swobodny ze względu na brak wymuszeń oraz ośrodek bez oporów.

Model mechaniczny takiego układu jest punktem o współrzędnej uogólnionej \bar{x} posiadającym własności ${}^2\bar{m}$, na który działa uogólniona siła sprężysta \bar{S} i wymuszająca \bar{f} , to znaczy zgodnie z prawem Newtona dla wielkich systemów [9]⁷⁾ mamy

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t).$$

Układ ten ilustrujemy za pomocą masy na bisprężynce płaskiej obciążonej uogólnioną siłą wymuszającą \bar{f} . Przedstawiono go na rys. 2.



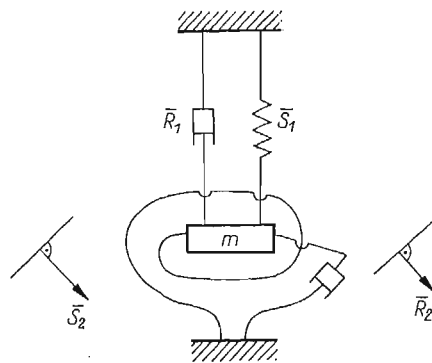
Rys. 2

Definicja 1.2. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$$P[(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t), {}^2\bar{m}, {}^2\bar{r}, {}^2\bar{s}, \bar{f}(t))] = \bar{0}$$

niejednorodnym liniowym, zawierającym $\ddot{\bar{x}}$, o współczynnikach stałych nazywamy bioscytorem wymuszonym tłumionym⁸⁾ o dwóch stopniach swobody.

W modelu mechanicznym takiego układu należy dodatkowo uwzględnić tłumik postępowo-obrotowy dwuwymiarowy nazywany bitłumikiem. Pokazano go na rys. 3.



Rys. 3

⁷⁾ Jest to uogólnienie prawa Newtona dla układów mechanicznych wielokrotnych, jako systemów wielkich, opisanych za pomocą ciągów wieloskaźnikowych.

⁸⁾ Tłumienie może być tak zewnętrzne, jak i wewnętrzne.

Bitłumik uwzględnia tłumienie proporcjonalne do wartości $\dot{\bar{x}}$ prędkości uogólnionej $\dot{\bar{x}}$, wywołane uogólnioną siłą tłumiącą \bar{R} , to znaczy tak od siły tłumiącej R_1 w ruchu postępowym, jak i od momentu tłumiącego R_2 w ruchu obrotowym punktu.

W ten sposób równanie bioscyłatora wymuszonego tłumionego dwuwymiarowego o dwóch stopniach swobody ma postać

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{r} \cdot \dot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t).$$

Jest rzeczą zrozumiałą, że można rozważać różne przypadki szczególne takiego równania różniczkowego ciągów jednowskaźnikowych, którego współczynniki są ciągami dwuwskaźnikowymi.

W szczególności układ–ciąg równań rozważanych uprzednio, mianowicie

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + r_1 \cdot \dot{x}_1 + s_1 \cdot x_1 = f_1(t),$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + r_2 \cdot \dot{x}_2 + s_2 \cdot x_2 = f_2(t),$$

jako ciąg jednowskaźnikowy oscylatorów: 1) postępowego, 2) obrotowego, w postaci

$$[m_1, m_2] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + [r_1, r_2] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + [s_1, s_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

wynika z równania bioscyłatora wymuszonego tłumionego.

2. Bioscyłator jednowskaźnikowy o 6 stopniach swobody

Wprowadzamy oznaczenia:

$${}^2\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}^T = [x_{j_1 j_2}]^T, \quad \begin{matrix} j_1 = 1, 2, 3; \\ j_2 = 1, 2 \end{matrix}$$

— ciąg dwuwskaźnikowy ilości stopni swobody (współrzędnych niezależnych) układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości stopni swobody określonego rodzaju i wymiaru przestrzeni ortokartezjańskiej, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów stopni swobody [1] przemieszczenia, 2) obrotu], \bar{x}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przemieszczenia podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{x}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny obrotu podczas ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^2\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{21} & \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{12} & \dot{x}_{22} & \dot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{31} & \dot{x}_{32} \end{bmatrix}^T = [\dot{x}_{j_1 j_2}]^T; \quad \begin{matrix} j_1 = 1, 2, 3; \\ j_2 = 1, 2 \end{matrix}$$

— ciąg dwuwskaźnikowy prędkości układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości współrzędnych wektora prędkości określonego rodzaju, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów prędkości [1] w ruchu postępowym, 2) w ruchu obrotowym], $\dot{\bar{x}}$ — ciąg jednowskaźnikowy

wy jako wektor prędkości (liniowej) w ruchu postępowym punktu, $\dot{\bar{x}}_2$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny prędkości (kątovej) w ruchu obrotowym punktu;

$${}^2\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} & \ddot{x}_{21} & \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{12} & \ddot{x}_{22} & \ddot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} & \ddot{x}_{12} \\ \ddot{x}_{21} & \ddot{x}_{22} \\ \ddot{x}_{31} & \ddot{x}_{32} \end{bmatrix}^T = [\ddot{x}_{j_1 j_2}]^T; \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy przyspieszeń układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości współrzędnych wektora przyspieszeń określonego rodzaju, j_2 — wskaźnik ilości rodzajów przyspieszeń [1] w ruchu postępowym, 2) w ruchu obrotowym], $\ddot{\bar{x}}_1$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przyspieszenia (liniowego) w ruchu postępowym punktu, $\ddot{\bar{x}}_2$ — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor przyspieszenia (kątovej) w ruchu obrotowym punktu.

Mamy również

$${}^4\bar{m} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{m}_{j_3 j_4}] = [m_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników bezwładności, jako mas uogólnionych danego układu mechanicznego, gdzie j_1 — wskaźnik ilości rodzajów ruchu [1] postępowego, 2) obrotowego], j_2 — wskaźnik ilości ruchów w danym rodzaju ruchu⁹⁾, j_3 — wskaźnik ogólnej ilości 6 stopni swobody w obu ruchach: postępowym i obrotowym (trzy pierwsze wyrazy dotyczą równań sił, trzy dalsze wyrazy uwzględniają równania momentów sił), j_4 — wskaźnik trzykrotnego wystąpienia dwóch ruchów: postępowego i obrotowego ze względu na dwa razy po trzy stopnie swobody układu w ruchu postępowym i obrotowym.

Definiujemy także przez:

$${}^2\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{bmatrix}^T = [S_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił sprężystych, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, \bar{S}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor sił sprężystych¹⁰⁾ podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{S}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny momentów sił sprężystych¹¹⁾ podczas ruchu obrotowego

⁹⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁰⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹¹⁾ Patrz rozdział poprzedni.

punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^4\bar{s} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{s}_{j_3 j_4}] = [s_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników sprężystości danego układu mechanicznego¹²⁾, gdzie j_1, j_2, j_3, j_4 — wskaźniki jak w ${}^4\bar{m}$;

$${}^4\bar{r} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{11} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{12} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{13} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{21} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{22} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{23} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{31} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{32} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{33} \end{bmatrix} = [{}^2\bar{r}_{j_3 j_4}] = [r_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$$

— ciąg czterowskaźnikowy współczynników tłumienia danego układu mechanicznego¹³⁾, gdzie j_1, j_2, j_3, j_4 — wskaźniki, jak w ${}^4\bar{m}$;

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{bmatrix}^T = [R_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił tłumienia danego układu mechanicznego, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, \bar{R}_1 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor uogólniony sił tłumienia¹⁴⁾ podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, \bar{R}_2 — ciąg jednowskaźnikowy jako wektor swobodny uogólnionych¹⁵⁾ sił (momentów sił) tłumienia podczas ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

$${}^2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{21}(t) & f_{31}(t) \\ f_{12}(t) & f_{22}(t) & f_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) \end{bmatrix}^T = [f_{j_1 j_2}(t)]^T, \\ j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy uogólnionych sił wymuszających danego układu mechanicznego, gdzie j_1, j_2 — wskaźniki, jak w ${}^2\bar{x}$, $\bar{f}_1(t)$ — ciąg jednowskaźnikowy, jako wektor sił wymuszających podczas ruchu postępowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej;

¹²⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹³⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁴⁾ Patrz rozdział poprzedni.

¹⁵⁾ Jak wyżej.

miarowej, $\bar{f}_2(t)$ — ciąg jednowskaźnikowy, jako wektor swobodny uogólnionych sił (momentów sił) wymuszających ruchu obrotowego punktu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zauważmy, że wprowadzone ciągi dwuwskaźnikowe, jako dwuelementowe ciągi jednowskaźnikowe mogą mieć interpretację podwójną:

1) jako ciągi dwuwskaźnikowe współrzędnych dwóch wektorów, z których drugi jest zawsze swobodny,

2) jako dwuelementowe ciągi jednowskaźnikowe — wektory, z których drugi jest zawsze swobodny.

Postępując podobnie, jak w rozdziale poprzednim, formułujemy następujące definicje.

Definicja 2.0. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$${}^2\bar{P}[\dot{t}, {}^2\bar{x}(t), {}^2\dot{\bar{x}}(t), {}^2\ddot{\bar{x}}(t), {}^4\bar{m}, {}^4\bar{r}, {}^4\bar{s}, {}^2\bar{f}(t)] = {}^20$$

niejednorodnym liniowym, zawierającym ${}^2\ddot{\bar{x}}$, o współczynnikach stałych [1, 2] nazywamy biosycylorem wymuszonym tłumionym¹⁶⁾ o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{11} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{12} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{13} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{11} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{12} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{13} \begin{bmatrix} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{11} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{12} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{13} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) \\ f_{21}(t) \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{21} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{22} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{23} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{21} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{22} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{23} \begin{bmatrix} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{21} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{22} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{23} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{31}(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{31} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{11} \\ \ddot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{32} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{21} \\ \ddot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_{33} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{31} \\ \ddot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{31} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{32} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array} \right]_{33} \begin{bmatrix} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{31} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{32} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right]_{33} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{22}(t) \\ f_{32}(t) \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

¹⁶⁾ Tłumienie może być zewnętrzne, jak i wewnętrzne.

czyli

$$\begin{bmatrix} {}^2\bar{m}_{11} & {}^2\bar{m}_{12} & {}^2\bar{m}_{13} \\ {}^2\bar{m}_{21} & {}^2\bar{m}_{22} & {}^2\bar{m}_{23} \\ {}^2\bar{m}_{31} & {}^2\bar{m}_{32} & {}^2\bar{m}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{r}_{11} & {}^2\bar{r}_{12} & {}^2\bar{r}_{13} \\ {}^2\bar{r}_{21} & {}^2\bar{r}_{22} & {}^2\bar{r}_{23} \\ {}^2\bar{r}_{31} & {}^2\bar{r}_{32} & {}^2\bar{r}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\dot{\bar{x}}, {}_2\dot{\bar{x}}, {}_3\dot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{s}_{11} & {}^2\bar{s}_{12} & {}^2\bar{s}_{13} \\ {}^2\bar{s}_{21} & {}^2\bar{s}_{22} & {}^2\bar{s}_{23} \\ {}^2\bar{s}_{31} & {}^2\bar{s}_{32} & {}^2\bar{s}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\bar{x}, {}_2\bar{x}, {}_3\bar{x}] = \begin{bmatrix} {}_1\bar{f}(t) \\ {}_2\bar{f}(t) \\ {}_3\bar{f}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$${}_k\ddot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{k1} \\ \ddot{x}_{k2} \end{bmatrix}, \quad {}_k\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{k1} \\ \dot{x}_{k2} \end{bmatrix}, \quad {}_k\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

oraz

$${}_1\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) \\ f_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad {}_2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{31}(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}, \quad {}_3\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_{22}(t) \\ f_{32}(t) \end{bmatrix},$$

przy czym mnożenie ciągów dwuwskaznikowych przez ciągi jednowskaznikowe jest zgodne z regułą mnożenia macierzy, co wyjaśnia schemat przyjętego mnożenia ciągów czterowskaznikowych przez ciągi dwuwskaznikowe¹⁷⁾, w którym obowiązuje mnożenie wierszy ${}^4\bar{m}$ przez wiersz $[{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}]$.

Modelem mechanicznym takiego układu jest punkt o współrzędnej uogólnionej ${}^2\bar{x}$ posiadający własności bezwładnościowe ${}^4\bar{m}$, na który działa uogólniona siła sprężysta ${}^2\bar{s}$ oporu (tłumienia) ${}^2\bar{r}$ i wymuszająca ${}^2\bar{f}$.

Przedstawimy go w postaci masy skupionej na bisprężynce postępowo-obrotowej, przedstawiającej sześć stopni swobody układu w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej z dołączonym bitłumikiem postępowo-obrotowym. Bisprężynka obrazuje uogólnione siły sprężyste ${}^2\bar{s}$ proporcjonalne do sił bezwładności (o czterowskaznikowych współczynnikach proporcjonalności). Bitłumik uwzględnia tłumienie proporcjonalnie do prędkości uogólnionej ${}^2\dot{\bar{x}}$, wywołane uogólnioną siłą tłumienia ${}^2\bar{r}$, to znaczy pochodzące od siły tłumiącej \bar{R}_1 w ruchu postępowym układu, jak i od siły uogólnionej (momentu siły) \bar{R}_2 w jego ruchu obrotowym.

Definicja 2.1. Układ mechaniczny opisany równaniem różniczkowym

$${}^2\bar{P}[t, {}^2\bar{x}(t), {}^2\dot{\bar{x}}(t), {}^4\bar{m}, {}^4\bar{s}, {}^2\bar{f}(t)] = {}^2\bar{0}$$

niejednorodnym liniowym o współczynnikach stałych nazywamy bioscytorem wymuszonym o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$\begin{bmatrix} {}^2\bar{m}_{11} & {}^2\bar{m}_{12} & {}^2\bar{m}_{13} \\ {}^2\bar{m}_{21} & {}^2\bar{m}_{22} & {}^2\bar{m}_{23} \\ {}^2\bar{m}_{31} & {}^2\bar{m}_{32} & {}^2\bar{m}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\ddot{\bar{x}}, {}_2\ddot{\bar{x}}, {}_3\ddot{\bar{x}}] + \begin{bmatrix} {}^2\bar{s}_{11} & {}^2\bar{s}_{12} & {}^2\bar{s}_{13} \\ {}^2\bar{s}_{21} & {}^2\bar{s}_{22} & {}^2\bar{s}_{23} \\ {}^2\bar{s}_{31} & {}^2\bar{s}_{32} & {}^2\bar{s}_{33} \end{bmatrix} [{}_1\dot{\bar{x}}, {}_2\dot{\bar{x}}, {}_3\dot{\bar{x}}] = \begin{bmatrix} {}_1\bar{f}(t) \\ {}_2\bar{f}(t) \\ {}_3\bar{f}(t) \end{bmatrix},$$

¹⁷⁾ Kilka reguł mnożenia ciągów wielowskaznikowych przez ciągi wielowskaznikowe sformułowano w pracach [1, 2].

czyli

$${}^4\bar{m} \cdot {}^2\ddot{\bar{x}} + {}^4\bar{s} \cdot {}^2\dot{\bar{x}} = {}^2\bar{f}(t).$$

W modelu mechanicznym takiego układu nie występuje bitłumik, ponieważ ośrodek, w którym odbywa się ruch, jest idealny, bezoporowy i nie istnieją siły tłumiące.

Zauważmy, że bioscylator dwuwskaznikowy o sześciu stopniach swobody skonstruowany jest z trójelementowego ciągu (wymiar przestrzeni euklidesowej) ciągów jednowskaznikowych bioscylatorów o dwóch stopniach swobody.

W przypadku szczególnym

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{1111} & m_{1211} \\ m_{2121} & m_{2221} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} r_{1111} & r_{1211} \\ r_{2121} & r_{2221} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1211} \\ s_{2121} & s_{2221} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_{11} = \ddot{x}_1, \quad \ddot{x}_{12} = \ddot{x}_2, \quad \dot{x}_{11} = \dot{x}_1, \quad \dot{x}_{12} = \dot{x}_2, \quad x_{11} = x_1, \quad x_{12} = x_2,$$

$$f_{11}(t) = f_1(t), \quad f_{12}(t) = f_2(t)$$

oraz przy pozostałych współczynnikach równych zero, otrzymujemy równanie bioscylatora wymuszonego tłumionego o dwóch stopniach swobody:

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{r} \cdot \dot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t)$$

wyprowadzone w rozdziale poprzednim.

W szczególności wynika stąd równanie

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + r_1 \cdot \dot{x}_1 + s_1 \cdot x_1 = f_1(t)$$

oraz równanie

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + r_2 \cdot \dot{x}_2 + s_1 \cdot x_1 = f_2(t)$$

oscylatora obrotowego, które wprowadziliśmy w rozważaniach poprzednich.

W ten sposób pokazaliśmy, że oba odrębne równania dwóch niezależnych ruchów można uogólnić w podanym wyżej sensie bioscylatora dwuwskaznikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Pokażemy jeszcze dalsze uogólnienia tego problemu, mianowicie rozszerzając rozważania na przestrzeń n -wymiarową.

3. Bioscylator dwuwskaznikowy o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej

Zauważmy, że równanie bioscylatora o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni n -wymiarowej ma postać wielowskaznikową analogiczną do równania bioscylatora o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, które rozpatrywaliśmy wyżej¹⁸⁾.

¹⁸⁾ Rozdział poprzedni.

Wynika to stąd, że walencje zewnętrzne (wskaźniki po stronie lewej u góry) ciągów dwu-wskaźnikowych zmiennych niezależnych \bar{x} , ${}^2\bar{x}$, ${}^2\ddot{\bar{x}}$ pozostają niezmiennione.

Powiększa się jedynie wymiar ich walencji wewnętrznych oraz wymiar tych walencji wewnętrznych ciągów współczynników, które wskazują na wymiar przestrzeni ortokartezjańskiej. Obecnie przestrzeń ta jest n -wymiarowa.

Wobec tego mamy

$${}^2\bar{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(k)} \\ \bar{x}_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)} & \dots & x_{n1}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & \dots & x_{n2}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)} & x_{12}^{(k)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}^{(k)} & x_{n2}^{(k)} \end{bmatrix}^T = [x_{j_1 j_2}]^T, \quad \begin{array}{l} j_1 = 1, \dots, n; \\ j_2 = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2^{19)}; \end{array}$$

$${}^4\bar{m} = [{}^2\bar{m}_{j_3 j_4}] = [m_{j_1 j_2 j_3 j_4}], \quad j_1 = j_2 = 1, 2; \quad j_3 = j_4 = 1, \dots, n;$$

$${}^4\bar{r} = [{}^2\bar{r}_{j_3 j_4}] = [r_{j_1 j_2 j_3 j_4}]; \quad {}^4\bar{s} = [{}^2\bar{s}_{j_3 j_4}] = [s_{j_1 j_2 j_3 j_4}];$$

$${}^2\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{n1} \\ R_{12} & \dots & R_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} \end{bmatrix}^T = [R_{j_1 j_2}]^T, \quad j_1 = 1, \dots, n; \quad j_2 = 1, 2;$$

$${}^2\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{n1} \\ S_{12} & \dots & S_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \vdots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} \end{bmatrix}^T = [S_{j_1 j_2}]^T;$$

$${}^2\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{n1}(t) \\ f_{12}(t) & \dots & f_{n2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ \vdots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \end{bmatrix}^T = [f_{j_1 j_2}]^T.$$

Uwzględniając dotychczasowe rozważania, układ równań

$${}^4\bar{m} \cdot {}^2\ddot{\bar{x}} + {}^4\bar{r} \cdot {}^2\dot{\bar{x}} + {}^4\bar{s} \cdot {}^2\bar{x} = {}^2\bar{f}(t)$$

nazywamy równaniem wielociągowym [1, 2] bioscylatora wymuszonego tłumionego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej. Występują tu dwuciągi funkcji i pochodnych oraz czterociągi współczynników stałych.

4. Ciąg w -wskaźnikowy bioscylatorów o $2n$ sztopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej

Przyjmijmy, że w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej mamy w rodzin, czyli ciąg w -wskaźnikowy bioscylatorów, przy czym każda z nich zawiera n_q , $q = 1, \dots, w$ bioscylatorów wymuszonych tłumionych o $2n$ stopniach swobody. Wtedy

$${}^{2+w}\bar{x}^{(k)} = [x_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{2+w}}]^{(k)},$$

$$j_1 = 1, \dots, n; \quad j_2 = 1, 2; \quad j_q = 1, \dots, n_q; \quad q = 3, \dots, 2+w,$$

gdzie wskaźnik $k = 0$ dotyczy funkcji czasu, wskaźnik $k = 1$ dotyczy pierwszej pochodnej, wskaźnik $k = 2$ dotyczy drugiej pochodnej funkcji czasu.

¹⁹⁾ Wskaźnik $k = 0$ dotyczy funkcji, $k = 1$ — pierwszej pochodnej, $k = 2$ — drugiej pochodnej względem czasu.

Jest rzeczą zrozumiałą, że

$${}^{2+w}\bar{x}^{(k)} = \left[\left[\left[\begin{array}{ccc} x_{11}^{(k)} & \dots & x_{n1}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & \dots & x_{n2}^{(k)} \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_3 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_4 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_{2+w} \end{array} \right]_1 \right].$$

Siły wymuszające (strony prawe równań), jak i wszystkie siły są również ciągami $(2+w)$ -wskaznikowymi.

Współczynniki przy funkcji ${}^{2+w}\bar{x}$, pochodnej pierwszej ${}^{2+w}\dot{\bar{x}}$, pochodnej drugiej ${}^{2+w}\ddot{\bar{x}}$ są $[1, 2]$ $2(2+w)$ -wskaznikowe, to znaczy mają postać ${}^{2(2+w)}\bar{m}$, ${}^{2(2+w)}\bar{r}$, ${}^{2(2+w)}\bar{s}$.

Wskaźniki nieparzyste przedstawiają «wiersze», wskaźniki parzyste natomiast «kolumny» układu wielociągowego równań różniczkowych:

$${}^{2(2+w)}\bar{m} \cdot {}^{2+w}\ddot{\bar{x}} + {}^{2(2+w)}\bar{r} \cdot {}^{2+w}\dot{\bar{x}} + {}^{2(2+w)}\bar{s} \cdot {}^{2+w}\bar{x} = {}^{2+w}\bar{f}(t)$$

dla $t \in \langle t_1, t \rangle$, wypisanego na podobieństwo układu «macierzowego» równań. Jest to równanie różniczkowe wielociągowe w -wskaznikowego bioscylatora wymuszonego tłumionego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej. Występują tu $(2+w)$ -ciągi funkcji i pochodnych oraz $2(2+w)$ -ciągi współczynników stałych.

Zauważmy, że w przypadku $w = 0$, mamy równanie bioscylatora dwuwskaznikowego o $2n$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej, które było tematem rozważań rozdziału poprzedniego.

5. Ciąg trójwskaznikowy bioscylatorów o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej

Przyjmijmy obecnie $n = 3$ i $w = 3$, to znaczy rozważmy w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej trzy rodziny, czyli ciąg trójwskaznikowy bioscylatorów przyjmując, że każda z nich zawiera n_q , $q = 1, 2, 3$ bioscylatorów wymuszonych tłumionych o $2 \cdot 3$ stopniach swobody. Mamy teraz

$${}^{2+3}\bar{x}^{(k)} = [x_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5}^{(k)}], \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_2 = 1, 2; \quad j_q = 1, \dots, n_q; \quad q = 3, 4, 5,$$

gdzie j_1 jest wskaźnikiem wymiaru przestrzeni euklidesowej, j_2 — wskaźnikiem ilości ruchów (rodzajów stopni swobody), j_3 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów pierwszej rodziny (rodzaju), j_4 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów drugiej rodziny (rodzaju), j_5 — wskaźnikiem ilości bioscylatorów trzeciej rodziny (rodzaju) $k = 0$ — wskaźnikiem funkcji czasu ${}^{2+3}\bar{x}$, $k = 1$ — wskaźnikiem pierwszej pochodnej ${}^{2+3}\dot{\bar{x}}$, $k = 2$ — wskaźnikiem drugiej pochodnej ${}^{2+3}\ddot{\bar{x}}$ funkcji czasu.

Stąd wynika, że

$${}^{2+3}\bar{x}^{(k)} = \left[\left[\left[\begin{array}{ccc} x_{11}^{(k)} & x_{21}^{(k)} & x_{31}^{(k)} \\ x_{12}^{(k)} & x_{22}^{(k)} & x_{32}^{(k)} \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_3 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_4 \end{array} \right]_1 \dots \left[\begin{array}{c} n_5 \end{array} \right]_1 \right].$$

Siły wymuszające (prawe strony równań), jak i wszystkie siły są również ciągami $(2+3)$ -wskaznikowymi. Współczynniki przy funkcji ${}^{2+w}\bar{x}$, pochodnej pierwszej ${}^{2+w}\dot{\bar{x}}$, pochodnej drugiej ${}^{2+w}\ddot{\bar{x}}$ są $[1, 2]$ $2(2+3)$ -wskaznikowe, to znaczy mają postać ${}^{2(2+3)}\bar{m}$, ${}^{2(2+3)}\bar{r}$, ${}^{2(2+3)}\bar{s}$.

Wskaźniki nieparzyste przedstawiają «wiersze», wskaźniki parzyste natomiast «kolumny» układu pięciowskaźnikowego²⁰⁾ równań różniczkowych o współczynnikach dziesięciowskaźnikowych:

$${}^{10}\bar{m} \cdot {}^5\ddot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{r} \cdot {}^5\dot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{s} \cdot {}^5\bar{x} = {}^5\bar{f}(t), \text{ dla } t \in \langle t_1, t \rangle,$$

wypisanego na podobieństwo układu «macierzowego». Jest to równanie różniczkowe pięciociągowe (pięciowskaźnikowe) bioscyłatora wymuszonego tłumionego o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Gdy walencja zewnętrzna (wskaźnik po lewej stronie u góry) $w = 2$, to mamy równanie bioscyłatora dwuwskaźnikowego o 6 stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, które było tematem rozważań rozdziału 2.

6. Modelowanie wału waźkiego z wieloma tarczami na wielu podporach za pomocą bioscyłatora pięciowskaźnikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej

Widzimy, że rozpatrywane oscylatory i bioscyłatory można było uogólnić na przestrzenie wielowymiarowe. Obecnie pokażemy, że można je, między innymi, zastosować do modelowania omówionej na początku trójelementowej konstrukcji \bar{k} złożonej z waźkiego wału sprężystego obciążonego dowolną, skończoną liczbą waźkich tarcz, podpartego w dowolnej, skończonej ilości łożysk zwanych podporami. Zakładamy przy tym, że nie uwzględniamy współdziałania innych elementów maszyny, urządzenia, zespołu maszyn, w skład których wchodzi omawiana konstrukcja \bar{k} , sama traktowana jako element ciągu wielowskaźnikowego podzespołów pewnego układu mechanicznego nazwanego systemem maszynowym.

Inaczej mówiąc, wał z tarczami i łożyskami rozpatrujemy jako izolowany układ mechaniczny, chociaż jest on podsystemem złożonego systemu maszynowego.

W rozdziałach poprzednich pokazaliśmy, że konstrukcja \bar{k} :

- 1) istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, w której
- 2) pewne przekroje wału jako elementarne twory trójwymiarowe posiadają dwa rodzaje ruchów, mianowicie postępowe wzdłuż trzech osi ortokartezjańskiego układu odniesienia oraz obrotowe dookoła tych trzech osi;
- 3) została sprowadzona do trzech rodzajów przekrojów wału, mianowicie podporowych, obciążonych tarczami, obciążonych masami zredukowanymi.

Te pięć zasadniczych elementów dotychczasowych rozważań, czyli: wymiar przestrzeni, ilość rodzajów ruchów przekrojów wału, przekroje podporowe, przekroje obciążone tarczami, przekroje obciążone masami zredukowanymi, wprowadziliśmy do modelu matematycznego układu mechanicznego nazwanego ciągiem trójwskaźnikowym bioscyłatorów, czyli bioscyłatorem pięciowskaźnikowym o $2 \cdot 3$ stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Wobec tego możemy przyjąć, że: a) pierwszą rodzinę rozważanych w rozdziale poprzednim bioscyłatorów stanowi n_3 podpór konstrukcji \bar{k} z przekrojami podporowymi,

²⁰⁾ To znaczy pięciociągów funkcji, pochodnych pierwszych i pochodnych drugich.

b) drugą rodzinę bioscylatorów stanowi n_4 tarcz z przekrojami wału, na których są one osadzone, c) trzecią rodzinę bioscylatorów stanowi n_5 mas zredukowanych wału z tymi jego przekrojami, do których przeprowadzono redukcję jego masy całkowitej.

Reasumując stwierdzamy, że jeśli: 1) $j_1 = 1, \dots, n_1, n_1 = 3$ jest wskaźnikiem wymiaru przestrzeni euklidesowej, 2) $j_2 = 1, \dots, n_2, n_2 = 2$ jest wskaźnikiem rodzajów ruchu postępowego lub obrotowego, 3) $j_3 = 1, \dots, n_3$ jest wskaźnikiem ilości łożysk (podpór) z przekrojami podporowymi, 4) $j_4 = 1, \dots, n_4$ jest wskaźnikiem ilości tarcz z przekrojami wału oraz 5) $j_5 = 1, \dots, n_5$ jest wskaźnikiem ilości mas zredukowanych z odpowiednimi przekrojami wału, to ruch sprężystej konstrukcji \bar{k} , jako układu pięciociągowego (pięciowskaźnikowego) będącego wielkim²¹⁾ systemem dynamicznym [4], zgodnie z drugim prawem Newtona [9] oraz przy uwzględnieniu prawa Hooke'a [5] w ośrodku z oporami i przy istnieniu sił wymuszających, jest opisany za pomocą systemu wielkiego bioscylatorów, mianowicie równaniem bioscylatora pięciowskaźnikowego o sześciu stopniach swobody w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej:

$${}^{10}\bar{m} \cdot {}^5\ddot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{r} \cdot {}^5\dot{\bar{x}} + {}^{10}\bar{s} \cdot {}^5\bar{x} = {}^5\bar{f}(t), \quad t \in \langle t_1, t \rangle,$$

gdzie stałe współczynniki są ciągami dziesięciowskaźnikowymi [1, 2].

W literaturze znane są tylko niektóre przypadki szczególne [10, 11] rozwiązań układów równań różniczkowych nazwanych tutaj bioscylatorem pięciowskaźnikowym.

Być może warto zająć się nimi korzystając z elektronicznej techniki obliczeniowej lub konstruując odpowiednie analogi elektryczne, za pomocą których rozwiązanie danych wielociągowych układów równań przedstawionych algorytmami macierzowymi nie byłoby zbyt trudne.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi*, Praca doktorska, nie publikowana.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika Techniczna*, Warszawa 1951.
4. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Masz., 2 (1971).
5. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
6. L. S. PONTRIAGIN, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa 1964.
7. W. W. STIEPANOW, *Równania różniczkowe*, Warszawa 1956.
8. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 11 (1971).
9. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe uogólnienie prawa dynamiki układów wielokrotnych — wielkich systemów mechanicznych*, Zesz. Nauk. Politechniki Częstochowskiej, 1971, nr 72, Mechanika, z. 6.
10. В. А. ГРОВОВ, *Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин*, Москва 1961.
11. Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ, *Изгибные колебания вращающихся валов*, Москва 1959.

²¹⁾ Wielkim nazywamy system, który jest opisany zmiennymi wielociągowymi, gdzie ciąg wielowskaźnikowy można nazywać wielkim systemem ciągów, zgodnie z pracami autora [1, 2, 12, 13].

12. R. KRZYWIEC, *Organizacja wielociągowa systemów wielkich (Wstęp do teorii systemów wielkich)*, Praca habilitacyjna (w druku).
13. R. KRZYWIEC, Materiały Seminarium na temat: «Modelowanie matematyczne systemów wielkich», prowadzonego przez autora w ZUM IPPT PAN (przygotowane do druku).

Р е з ю м е

О МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОПОДШИПНИКОВОГО ВАЛА СО МНОГИМИ
ДИСКАМИ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ БИОСЦИЛЛЯТОРОВ
ЧАСТЬ II. БИОСЦИЛЛЯТОРЫ СО МНОГИМИ ИНДЕКСАМИ.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАЛА

В работе построена простая, но оригинальная дискретная модель упругого весомого вала на многих упругих опорах нагруженного многими дисками. Моделью является биосциллятор со многими индексами с шестью степенями свободы (три для поступательного, и три для вращательного движения), моделирующий: n_3 напорных сечений вала, n_4 сечений нагруженных с помощью дисков, n_5 сечений приведения масс в n_1 -мерном пространстве, при учете n_2 видов движения. Рассуждения ведутся на языке многократных последовательностей, алгебра и элементы анализа которых сформулированы автором в отдельной работе. Полученные дифференциальные уравнения содержат пятикратные последовательности, с коэффициентами выражающимися через десятикратные последовательности.

S u m m a r y

ON MODELLING THE MULTI-SPAN SHAFTS WITH SEVERAL DISCS BY MEANS OF A GREAT
SYSTEM OF BI-OSCILLATORS. PART II. MULTI-INDICIAL BI-OSCILLATORS. MODELLING
OF A SHAFT

A simple, original discrete elastic model is constructed of a ponderable elastic shaft, resting on several elastic supports and loaded by many discs. It is a multi-indicial bi-oscillator with six degrees of freedom (three translations, three rotations), which is used to model: n_3 cross-sections at the supports, n_4 cross-sections loaded by discs, n_5 cross-sections of mass reduction in n_1 -dimensional space, at n_2 kinds of motion. The terminology of "multiseries" is used in the paper, their algebra and foundations of analysis being presented by the author in a separate paper. The differential equations derived are «five-series» with coefficients being expressed by «ten-series» sequences.

UNIwersytet warszawski, filia w BiaŁymstoku

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1972; w wersji ostatecznej — dnia 29 maja 1974 r.