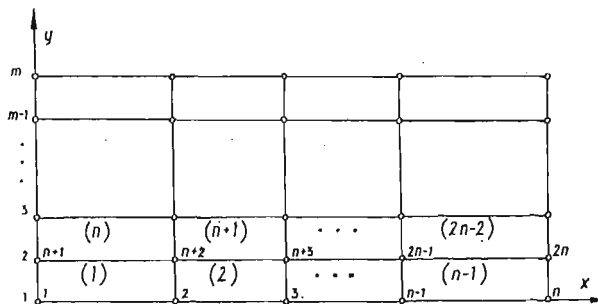


NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU DRGAŃ WŁASNYCH NA PRZYKŁADZIE PŁYT

JERZY GOŁAŚ, ZYGMUNT KASPERSKI (OPOLE)

1. Wstęp

Rozważania analityczne dotyczące problemu drgań własnych konstrukcji powierzchniowych posiadają bogatą literaturę, przykładowo [1, 2, 3]. W praktyce jednak napotyka się często bardziej złożone ustroje ciągłe, jakimi są np. płyty o różnych kształtach i dowolnych warunkach brzegowych, o zmiennej grubości, jak i podparte w swoim obszarze. Jak wiadomo, metody klasyczne mogą być skutecznie stosowane jedynie w prostych przypadkach.



Rys. 1. Podział płyty, numeracja węzłów i elementów

W pracy niniejszej przedstawiono metodę numeryczną wyznaczania częstości drgań własnych konstrukcji powierzchniowych, zilustrowaną na przykładzie płyt, przyjmującą za punkt wyjścia metodę elementów skończonych w ujęciu ZIENKIEWICZA [4]. Ustrój ciągły (płytę) dzieli się na skończoną liczbę odkształcalnych elementów prostokątnych o 12 parametrach węzłowych (rys. 1). Metoda ta, jak to będzie wykazane dalej, daje dobre rezultaty nawet przy podziale na małą liczbę elementów (można więc dostatecznie dokładnie i szybko wykonywać obliczenia nawet na małych maszynach cyfrowych). Przedstawiony w pracy sposób można bez trudu uogólnić na rozwiązanie problemu drgań własnych innych ustrojów ciągłych, jak np. powłoki i tarcze. Proponowana metoda ma ponadto tę zaletę, że obejmuje dowolne warunki brzegowe, dowolne rodzaje podparć w obszarze oraz zmienną grubość.

Autorzy sądzą, że wiele elementów przedstawionej metody (np. odwracanie macierzy trójkątnych, zamiana wskaźników podwójnych na pojedyncze itp.) może być pożytecznych do innych obliczeń, gdzie ilość informacji zapamiętywanych w maszynie cyfrowej oraz czas obliczeń odgrywają istotną rolę i nieraz nie pozwalają na przeprowadzenie efektywnych obliczeń.

2. Teoretyczny opis metody

Jak wiadomo, problem drgań własnych dźwigarów powierzchniowych sprowadza się do obliczenia takich liczb ω^2 , dla których równanie

$$(2.1) \quad [K] \{X\} = \omega^2 [M] \{X\}$$

ma nietrywialne rozwiązanie $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}^T$, gdzie $[K]$ jest macierzą sztywności, a $[M]$ macierzą mas. Zakładamy, że macierze $[K]$ i $[M]$ są macierzami kwadratowymi stopnia p . Wielkości $\omega_i^2 (i = 1, 2, \dots, p)$, dla których $\{X\} \neq \{0\}$ nazywamy wartościami własnymi równania (2.1), a wektory $\{X\}_i$ odpowiadające wartościom ω_i^2 nazywamy wektorami własnymi równania (2.1).

Proponowana metoda rozwiązania zagadnienia drgań własnych ma na celu:

1) znalezienie takiej macierzy symetrycznej $[A]$, dla której znajomość wartości i wektorów własnych pozwoli na proste obliczenie wartości i wektorów własnych równania (2.1) (stosunkowo najlepiej opracowane są metody obliczania wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznych),

2) zmniejszenie do minimum ilości informacji oraz działań w maszynie cyfrowej, tak by można było rozwiązywać zadania o jak największej liczbie stopni swobody.

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że znany jest sposób obliczania elementów macierzy sztywności $[K]$ i macierzy mas $[M]$, dla konkretnego ustroju ciągłego.

W algebrze liniowej znane jest twierdzenie, że dla każdej macierzy symetrycznej i dodatnio określonej $[B]$ istnieje taka macierz rzeczywista trójkątna górna $[S]$, że $[B] = [S]^T [S]$, gdzie $[S]^T$ jest macierzą transponowaną do macierzy $[S]$. Jak wiadomo [4] macierz sztywności $[K]$ jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, zatem istnieje taka macierz $[Q]$, że $[K] = [Q]^T [Q]$. Macierz $[Q]$ można wyznaczyć metodą BANACHIEWICZA [5]. Jeżeli przez k_{ij} oznaczymy elementy macierzy $[K]$, a przez q_{ij} elementy macierzy $[Q]$, to zachodzą zależności

$$(2.2) \quad \begin{aligned} q_{11} &= \sqrt{k_{11}}, & q_{1j} &= \frac{k_{1j}}{q_{11}}, & j > 1, \\ q_{ii} &= \sqrt{k_{ii} - \sum_{t=1}^{i-1} q_{it}^2}, & 1 < i &\leq p, \\ q_{ij} &= \frac{k_{ij} - \sum_{t=1}^{i-1} q_{it} q_{tj}}{q_{ii}}, & i < j, \\ q_{ij} &= 0, & i > j. \end{aligned}$$

Ponieważ $[K] = [Q]^T [Q]$, to równanie (2.1) można zapisać w postaci

$$(2.3) \quad [Q]^T [Q] \{X\} = \omega^2 [M] \{X\}.$$

Podstawiając do równania (2.3) $[Q] \{X\} = \{U\}$, skąd $\{X\} = [Q]^{-1} \{U\}$ otrzymamy równanie

$$[Q]^T \{U\} = \omega^2 [M] [Q]^{-1} \{U\}.$$

Mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez macierz $([Q]^T)^{-1}$ otrzymamy równanie

$$(2.4) \quad ([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}\{U\} = \lambda\{U\},$$

gdzie $\lambda = 1/\omega^2$.

Wykażemy teraz, że jeżeli macierz $[M]$ jest macierzą symetryczną, to macierz $[A] = ([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}$ jest macierzą symetryczną, tzn. $[A]^T = [A]$.

Rzeczywiście

$$[A]^T = [([Q]^T)^{-1}[M][Q]^{-1}]^T = ([Q]^{-1})^T\{([Q]^T)^{-1}[M]\}^T = ([Q]^{-1})^T[M]^T\{([Q]^T)^{-1}\}^T.$$

Ale $([Q]^{-1})^T = ([Q]^T)^{-1}$ oraz $\{([Q]^T)^{-1}\}^T = [Q]^{-1}$ i $[M]^T = [M]$, zatem $[A]^T = [A]$.

Tak więc, wartości własne ω_i^2 równania (2.1) wyrażają się przez wartości własne symetrycznej macierzy $[A]$ wzorem

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\lambda_i},$$

wektory zaś własne zależnością

$$\{X\}_i = [Q]^{-1}\{U\}_i,$$

gdzie wektory $\{U\}_i$ są wektorami własnymi macierzy $[A]$.

3. Realizacja metody na maszynie cyfrowej

Z opisu metody podanego w rozdziale 2 wynika, że elementy macierzy $[K]$ potrzebne są jedynie do tworzenia wyrazów macierzy $[Q]$. Ze wzorów (2.2) wynika, że aby obliczyć wyraz q_{ij} macierzy $[Q]$ wystarczy mieć element k_{ij} macierzy $[K]$ i wcześniej obliczone, odpowiednie elementy macierzy $[Q]$. Zatem macierz $[Q]$ można tworzyć i umieszczać w pamięci maszyny cyfrowej w to samo miejsce, które zajmują elementy macierzy $[K]$. Ponieważ macierz $[K]$ jest symetryczna, a macierz $[Q]$ trójkątna górna, wystarczy więc pamiętać tylko te elementy k_{ij} macierzy $[K]$, dla których $j \geq i$. W tym celu należy jednak zamienić wskaźniki podwójne w wyrazach macierzy $[K]$ i $[Q]$ na wskaźniki pojedyncze. Można tego dokonać w następujący sposób:

Jeżeli jest dana macierz

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pp} \end{bmatrix}$$

i chcemy zapamiętać jej elementy c_{ij} dla $j \geq i$ (górną część) jako odpowiednie elementy jednowymiarowej tablicy T w sposób

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_p \\ * & t_{p+1} & \dots & t_{2p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & t_{p(p+1)/2} \end{bmatrix},$$

gdzie przez * oznaczono elementy niepamiętane, wówczas między numerami elementów macierzy $[C]$ i numerami elementów tablicy T zachodzi związek

$$c_{ij} = t_{(i-1)p+j-i+r_i},$$

gdzie r_i jest ciągiem liczb całkowitych określonym wzorem rekurencyjnym

$$(3.1) \quad \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_i = r_{i-1} - i + 2 \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, p. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że wówczas otrzymamy ciągłą pojedynczą numerację elementów prawego trójkąta macierzy $[C]$.

Taki sposób przyporządkowania wskaźnikom podwójnym wskaźników pojedynczych pozwala na proste zapisanie wszystkich działań na macierzach symetrycznych i trójkątnych górnych. Korzystając z (3.1) wzory (2.2) przyjmują postać

$$q_1 = \sqrt{k_1}, \quad q_j = \frac{k_j}{q_1}, \quad \text{dla } j = 2, 3, \dots, p,$$

$$q_{(i-1)p+r_i} = \sqrt{k_{(i-1)p+r_i} - \sum_{t=1}^{i-1} [q_{(i-1)p+i-t+r_t}^2]}, \quad 1 < i \leq p,$$

$$q_{(i-1)p+j-i+r_i} = \frac{k_{(i-1)p+j-i+r_i} - \sum_{t=1}^{i-1} [q_{(i-1)p+i-t+r_t} q_{(i-1)p+j-t+r_t}]}{q_{(i-1)p+r_i}}$$

dla $i < j$.

Z równania (2.4) wynika, że do obliczenia wartości i wektorów własnych macierzy $[A]$ potrzebna jest tylko macierz $[Q]^{-1}$ (gdyż $([Q]^T)^{-1}$ jest macierzą transponowaną do macierzy $[Q]^{-1}$) oraz macierz $[M]$. Macierz odwrotna do macierzy trójkątnej górnej jest też macierzą trójkątną górną.

Podamy teraz prosty algorytm szybkiego odwracania macierzy trójkątnej górnej $[Q]$. Załóżmy, że $[B] = [Q]^{-1}$, tzn. że $[Q][B] = [I]$, gdzie $[I]$ jest macierzą jednostkową. Elementy macierzy $[B]$ oznaczmy przez b_{ij} . Korzystając z tego, że macierze $[Q]$ i $[B]$ są trójkątne górne i że ich iloczyn jest macierzą jednostkową, otrzymamy następujące układy równań na wyznaczenie elementów b_{ij} macierzy $[B]$:

układ 1, p — równań

$$\begin{aligned} q_{11} b_{11} &= 1, \\ q_{11} b_{12} + q_{12} b_{22} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{11} b_{1p} + q_{12} b_{2p} + \dots + q_{1p} b_{pp} &= 0, \end{aligned}$$

układ 2, $p-1$ — równań

$$\begin{aligned} q_{22} b_{22} &= 1, \\ q_{22} b_{23} + q_{23} b_{33} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ q_{22} b_{2p} + q_{23} b_{3p} + \dots + q_{2p} b_{pp} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

układ $p-1, 2$ — równania

$$\begin{aligned} q_{p-1, p-1} b_{p-1, p-1} &= 1, \\ q_{p-1, p-1} b_{p-1, p} + q_{p-1, p} b_{pp} &= 0, \end{aligned}$$

układ $p, 1$ — równanie

$$q_{pp} b_{pp} = 1.$$

Tak więc, układ o numerze i ($i = 1, 2, \dots, p$) powstał z przemnożenia wiersza o numerze i macierzy $[Q]$ przez kolumny o numerach $i, i+1, \dots, p$ macierzy $[B]$. Z tych układów równań można wyznaczyć elementy b_{ij} ($j \geq i$) rozwiązując powyższe układy w odwrotnej kolejności, tzn. najpierw układ o numerze p , następnie o numerze $p-1$, itd., na końcu układ o numerze 1.

Otrzymuje się proste wzory na elementy macierzy $[B]$

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \frac{1}{q_{ii}}, \\ b_{ij} &= \frac{-\sum_{k=i+1}^j q_{ik} b_{kj}}{q_{ii}}, \quad \begin{aligned} i &= n, n-1, \dots, 1, \\ j &= n, n-1, \dots, i+1, \\ j &> i. \end{aligned} \end{aligned}$$

Z wzorów tych wynika ponadto, że elementy macierzy $[Q]^{-1}$ można umieścić w to samo miejsce pamięci maszyny cyfrowej, w którym znajdują się odpowiednie elementy macierzy $[Q]$, tzn., że nie ma potrzeby wprowadzać dodatkowej macierzy $[B]$. Korzystając ze związków (3.1) oraz wprowadzając zamiast symbolu „=” symbol podstawienia „:=”, otrzymamy wzory na elementy macierzy odwrotnej

$$\begin{aligned} q_{(i-1)p+ri} &:= \frac{1}{q_{(i-1)p+ri}}, \\ q_{(i-1)p+j-i+ri} &:= \frac{-\sum_{k=i+1}^j (q_{(i-1)p+k-i+ri} q_{(k-1)p+j-k+rk})}{q_{(i-1)p+ri}}. \end{aligned}$$

Mając dane macierze $[Q]^{-1}$ oraz $[M]$ można obliczyć elementy macierzy $[A] = ([Q]^{-1})^{-1} [M] [Q]^{-1}$. Wartości i wektory własne macierzy symetrycznej można obliczyć metodą HOUSEHOLDERA [5] (można też skorzystać z programu bibliotecznego maszyny cyfrowej Odra 1204), a następnie wartości i wektory własne równania (2.1).

4. Przykłady liczbowe

Przedstawiony algorytm został zrealizowany na maszynie cyfrowej Odra 1204 i sprawdzony na szeregu przykładów liczbowych. Macierz sztywności $[K]$ obliczono w sposób podany w pracy [6]. Zupełnie analogicznie budowano macierz mas $[M]$. W tablicy 1 przedstawiono przykładowo macierz mas dla prostokątnego elementu płyty o wymiarach $2a \times 2b$ i stałej grubości t . Cały tok postępowania w przypadku obliczania drgań własnych płyty można ująć w ogólnym schemacie blokowym (rys. 2). Przeliczono szereg przykładów liczbowych, dla których pewne wyniki znane są w literaturze [3].

Tabela 1

$$[M]^e = \frac{p_{tab}}{6300}$$

3454																											
-922 b	320 b ²																										
992 a	-252 ab	320 a ²																									
1226	-548 b	398 a	3454																								
548 b	-240 b ²	168 ab	922 b	320 b ²																							
398 a	-168 ab	160 a ²	922 a	252 ab	320 a ²																						
594	-252 b	252 a	1226	398 b	548 a	3454																					
232 b	-120 b ²	112 ab	398 b	160 b ²	168 ab	922 b	320 b ²																				
-232 a	112 ab	-120 a ²	-548 a	-168 ab	-240 a ²	-922 a	-252 ab	320 a ²																			
1226	-398 b	548 a	394	232 b	252 a	1226	548 b	-398 a	3454																		
-398 b	160 b ²	-168 ab	-232 b	-120 b ²	-112 ab	-548 b	-240 b ²	168 ab	-922 b	320 b ²																	
-548 a	168 ab	-240 a ²	-232 a	-112 ab	-120 a ²	-398 a	-168 ab	160 a ²	-922 a	252 ab	320 a ²																

symetrycznie

START

Czytanie danych: $n, m, E, ,$
 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$
 $t_1, t_2, \dots, t_{(n-1)(m-1)}$

Obliczanie macierzy $[K]$

Obliczanie macierzy $[M]$

Wczytanie warunków brzegowych

Modyfikacja macierzy $[K]$ i $[M]$ przy uwzgl. warunków brzegowych

$[K] := [Q]$
 $[Q]$ taka macierz, że $[K] = [Q]^T [Q]$

$[Q] := [Q]^{-1}$

$[A] := [Q]^T [M] [Q]^{-1}$

Obliczanie wartości i ewentualnie wektorów własnych macierzy $[A]$

Obliczanie wartości i ewentualnie wektorów własnych równania (1).

Wydruk wyników

STOP

Rys. 2.

Przykład 4.1. Należy obliczyć częstotliwości drgań własnych ω_i dla płyty kwadratowej na dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartej, a na pozostałych dwóch zamocowanej całkowicie. Dane: długość krawędzi 600 cm, $\nu = 0,167$, $E = 200\ 000\ \text{kG/cm}^2$,

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = 0,0025 \frac{\text{kGsek}^2}{\text{cm}^4}, \text{ grubość stała } t = 10\ \text{cm}.$$

Otrzymane wyniki przy podziale płyty na 9 jednakowych elementów kwadratowych o wymiarach $200 \times 200\ \text{cm}$ podano w tablicy 2.

Tablica 2

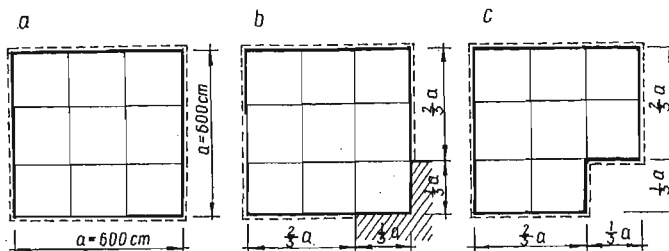
<i>i</i>	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	2,083404	2,08	~ 0
2	3,900229	3,93	~ 0,6
3	4,892954	4,96	~ 1,2
4	6,088433	6,76	~ 10,0
5	7,730949	7,33	~ 5,1
6	9,619610	9,27	~ 3,6

Przykład 4.2. Należy określić częstotliwość drgań własnych dla płyty kwadratowej na wszystkich krawędziach zamocowanej całkowicie. Dane i podział jak w przykładzie 4.1. Uzyskane wyniki przedstawiono w tablicy 3.

Tablica 3

<i>i</i>	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	2,593180	2,58	~ 0,4
2	5,279482	5,27	~ 0,2
3	7,627460	7,78	~ 2,0
4	10,384540	—	—
5	10,581960	9,82	~ 7,6
6	12,732980	11,80	~ 7,6

Przykład 4.3. Należy określić częstotliwości drgań własnych dla trzech schematów płyt o kształtach i warunkach podparcia, jak na rys. 3. Płyta przedstawiona na rys. 3a jest swobodnie podparta na całym obwodzie, płyta o schemacie rys. 3b posiada nieciągłe warunki podparcia (w okolicy dolnego prawego narożnika zamocowana całkowicie), zaś



Rys. 3.

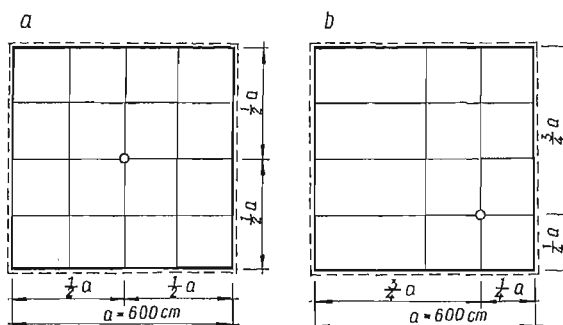
plyta rys. 3c jest wycięta w pobliżu naroża i swobodnie podparta na wszystkich krawędziach. Dane i podział jak w przykładzie 4.1. Uwaga! Płytę o schemacie rys. 3c liczone jako płytę prostokątną, przyjmując dla jej części wyciętej grubość równą $1/1000 t$.

Obliczone wartości pierwszych dwóch częstotliwości drgań własnych podano w tablicy 4.

Tablica 4

i	Schemat 3a			Schemat 3b	Schemat 3c
	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i obliczone
1	1,493427	1,42	~ 5,1	1,707662	2,482604
2	3,700391	3,54	~ 4,5	3,841016	4,051212

Przykład 4.4. Dla płyty kwadratowej swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach i dodatkowo podpartej punktowo w swoim obszarze (rys. 4) należy wyznaczyć częstotliwości drgań własnych. Dane, jak w przykładzie 4.1. Podział na elementy pokazano na rys. 4a i b.



Rys. 4.

Wartości pierwszych dwóch częstotliwości drgań własnych umieszczono w tablicy 5.

Tablica 5

i	Schemat 4a			Schemat 4b		
	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica	Wartości ω_i obliczone	Wartości ω_i wg pracy [3]	% różnica
1	3,685225	3,54	~ 4,1	1,895003	2,18	~ 13,0
2	3,767554	3,77	~ 0	3,767543	—	—

5. Wnioski

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda, przyjmująca za punkt wyjścia odkształcalne prostokątne elementy skończone o 12 parametrach węzłowych, pozwala z bardzo dużą dokładnością wyznaczać częstotliwości drgań własnych dla płyt o nieregularnym konturze, o dowolnych warunkach brzegowych, o zmiennej sztywności płyt z otworami i dowolnie podpartych w swoim obszarze.

Z podanych przykładów wynika, że otrzymuje się bardzo dobre rezultaty już przy niezbyt gęstym podziale rzeczywistego ustroju ciągłego na elementy. Jest metodą bardzo szybką. Średni czas obliczeń dla powyższych przykładów, łącznie z obliczaniem macierzy sztywności i macierzy mas, wynosił 20 minut na maszynie cyfrowej Odra 1204. Przy użyciu tej metody można obliczać drgania własne dla złożonych układów płytowych.

W przypadku obliczania drgań własnych dla innych dźwigarów powierzchniowych cały tok postępowania pozostaje taki sam. Zmieni się tylko sposób obliczania macierzy sztywności układu $[K]$ i macierzy mas $[M]$.

Możliwości programu są różne w zależności od zestawu maszyny cyfrowej. Dla zestawu bez pamięci zewnętrznej można rozwiązywać zadania do około 100 stopni swobody. Przy zestawie z pamięcią bębnową możliwości są oczywiście znacznie większe.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
2. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
3. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
6. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, J. MAKOWSKI, *Zastosowanie iteracji Seidla w metodzie elementów skończonych na przykładzie obliczeń statycznych płyt*, Mech. Teor. i Stos., 3, 12 (1974).

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НА ПРИМЕРЕ ПЛИТ

В работе представлен численный метод определения частоты собственных колебаний поверхностных конструкций проиллюстрированный на примере плит. Континуальная система разделяется на конечное число деформируемых прямоугольных элементов с 12-ю степенями свободы. Метод дает возможность, с большой точностью, определять частоты собственных колебаний для плит с нерегулярным контуром, с произвольными краевыми условиями, со скачкообразно меняющейся жесткостью, плит с отверстиями и произвольно опирающихся по своей области. Рассчитан ряд конкретных числовых примеров. Возможности программы, написанной на языке Алгол 1204, различаются в зависимости от оснащения цифровых машин. Для системы лишенной блока внешней памяти можно решать задачи с около 100 степенями свободы. В случае с оставас барабанной памятью — возможности гораздо больше.

Summary

NUMERICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF FREE VIBRATIONS USING PLATES AS THE EXAMPLE

In the paper the method of solution to problems of free vibrations of homogeneous plates with arbitrary boundary conditions has been presented. The applied method of numerical calculations, based

on the finite element method, decreases the amount of information remembered by a digital computer to a minimum, thus allowing for solution of the considerable problem of free vibrations. Many elements of the given algorithm may be applied to calculations of free vibrations of other cranes with no other changes.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1974 r.
