

## PRZYBLIŻONE OBLICZANIE PŁASKICH PRĘTOWYCH PRZEKRYĆ STRUKTURALNYCH

JACEK GIERLIŃSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Wraz z rozwojem budownictwa uprzemysłowionego wzrasta ilość konstrukcji wykonanych z elementów powtarzalnych. Do tego rodzaju ustrojów należą między innymi prętowe przekrycia strukturalne (rys. 1). Z tego też względu wzrasta zainteresowanie projektantów metodami obliczania tych konstrukcji.

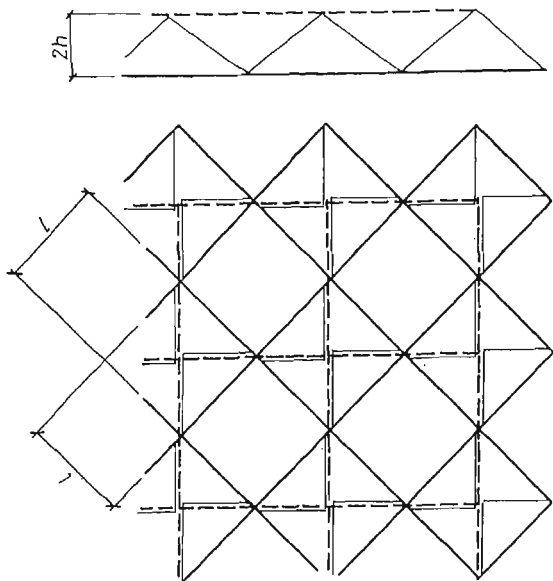
Do tej pory opublikowano wiele prac omawiających zarówno ściśle [1-3], jak i przybliżone [4-12] metody analizy statycznej przekryć strukturalnych. Mimo to, brak jest stosunkowo prostej metody przybliżonego obliczania tych konstrukcji, która jednocześnie obejmowałaby możliwie szeroką ich klasę. Niniejsza praca, zawierająca propozycję nowej metody obliczania przekryć strukturalnych, stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Podstawową ideą przedstawionej metody jest traktowanie przekrycia strukturalnego jako płyty trójwarstwowej, której warstwy zewnętrzne są równoległymi płaskimi kratownicami odległymi od siebie o  $2h$ , a warstwa środkowa zespołem krzyżulców. Model ciągły kratownic zewnętrznych przyjęto według prac WOŹNIAKA [15] oraz KLEMMMA i WOŹNIAKA [16]. Natomiast koncepcję opisu zespołu krzyżulców za pomocą modelu ciągłego zaproponowano w prezentowanej pracy. Analizę płytowych sił wewnętrznych w zastępczej płycie trójwarstwowej przeprowadzono w oparciu o liniową teorię tych ustrojów, przedstawioną w pracach [13, 14].

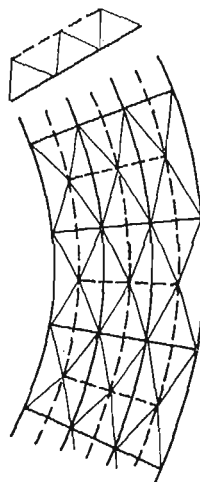
W pracy zastosowano następujące oznaczenia wskaźnikowe: małe litery greckie  $\alpha, \beta, \nu$  przebiegają ciąg 1, 2 i podlegają konwencji sumacyjnej, duże litery greckie  $\Delta, \Lambda$  przebiegają ciąg I, II, III, ... i nie podlegają konwencji sumacyjnej. Ponadto pionową kreską oznaczono pochodną kowariantną, a przecinkiem pochodną cząstkową.

### 2. Założenia

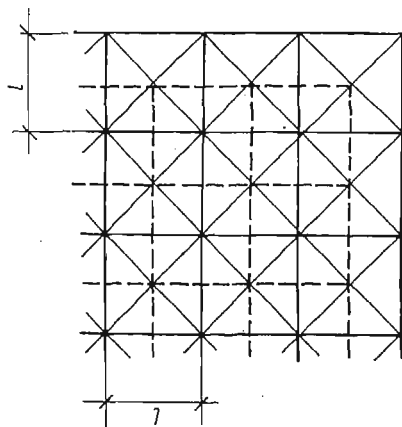
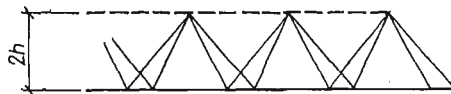
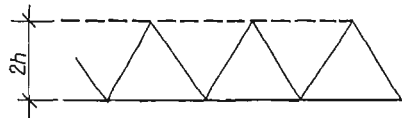
W pracy rozpatrzono przekrycia strukturalne o dwóch typach siatek zewnętrznych. Pierwszy, to siatka skonstruowana z rodzin prętów ciągłych, oznaczonych symbolem  $\Delta$  (rys. 1a, b, d). W tym przypadku płaszczyznę, na której kształtowana jest siatka, parametryzujemy układem współrzędnych krzywoliniowych  $\theta^1, \theta^2$ . Typ drugi, to siatka heksagonalna pokazana na rys. 1c (siatka górna). Przy formułowaniu zależności dotyczących tej siatki, jej płaszczyznę parametryzujemy układem współrzędnych kartezjańskich  $x^2, x^1$ . Kierunek normalny do płaszczyzn siatek zewnętrznych oznaczymy  $\theta^3$  lub  $x^3$ . Struktura



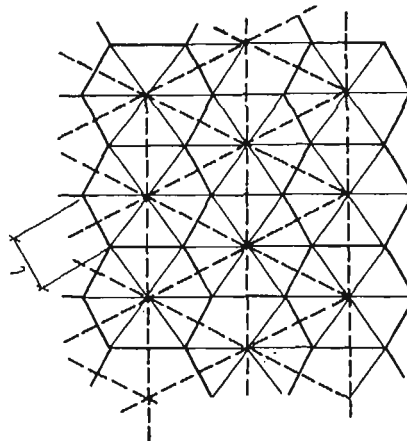
Rys. 1b



Rys. 1d



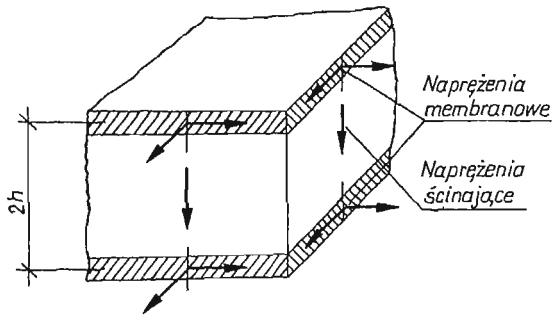
Rys. 1a



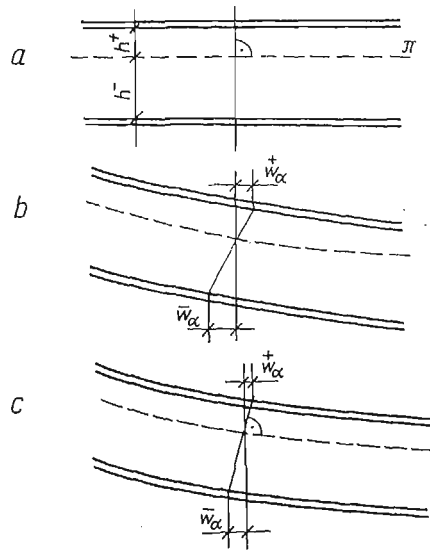
Rys. 1c

prętowa całej konstrukcji jest regularna, a długości  $l$  poszczególnych prętów są niewielkie w porównaniu z wymiarami ustroju. Kierunek osi dowolnego pręta określamy za pomocą wektora jednostkowego  $T$ . Obciążenie ustroju stanowią siły zaczepione w węzłach. Pozwala to na przyjęcie założenia o przegubowym połączeniu prętów w węzłach [1].

Analizy statycznej przekrycia strukturalnego dokonamy wprowadzając ustrój zastępczy w postaci płyty trójwarstwowej.



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z liniową teorią deformacji tych płyt przyjmiemy (por. [13, 14]), że warstwy zewnętrzne przenoszą naprężenia membranowe, natomiast warstwa środkowa jedynie pionowe naprężenia styczne (rys. 2). Założymy, że przemieszczenia tych warstw są nie-wielkie w porównaniu z grubością  $2h$  płyty. Wprowadzimy różniczkowalne funkcje  $w$ ,  $w_x^+$  i  $w_x^-$  opisujące odpowiednio przemieszczenia pionowe i poziome warstw zewnętrznych. Znacznikiem „+” oznaczono tutaj wielkości odnoszące się do warstwy górnej, a odnoszące się do warstwy dolnej „-”. Oznaczenia te będą stosowane w miarę potrzeby w dalszych rozważaniach pracy.

Założymy, że istnieje pewna płaszczyzna obojętna  $\pi$ , równoległa do warstw zewnętrznych i znajdująca się pomiędzy nimi, której punkty nie doznają przemieszczeń poziomych. Położenie płaszczyzny  $\pi$  określają odległości  $h^+$ ,  $h^-$  od warstw zewnętrznych. Przyjmiemy, że punkty warstw zewnętrznych leżące przed odkształceniem na prostej prostopadłej do płaszczyzny  $\pi$  (rys. 3a) doznają jednakowych przemieszczeń pionowych, czyli

$$(2.1) \quad w^+ = w^- = v.$$

Natomiast przemieszczenia poziome tych punktów powiązane są zależnością (rys. 3b)

$$(2.2) \quad w_{\alpha}^{+} = -\frac{1}{\lambda} w_{\alpha}^{-},$$

$$\text{w której } \lambda = \frac{h^{-}}{h^{+}}, \quad h^{+} = \frac{2h}{1+\lambda}, \quad h^{-} = \frac{2h}{1+\lambda} \lambda.$$

Zakładamy, że przesunięcia węzłów przekrycia strukturalnego są identyczne z przesunięciami odpowiadających im punktów płyty trójwarstwowej, tzn. wartości funkcji  $w, w_{\alpha}^{+}$  i  $w, w_{\alpha}^{-}$  w punktach odpowiadających węzłom są równe przesunięciom tych węzłów.

Obrót płaszczyzny  $\pi$  w kierunku osi  $\theta^{\alpha}$  charakteryzować będziemy funkcją

$$(2.3) \quad u_{\beta} = \frac{w_{\alpha}^{+} - w_{\alpha}^{-}}{2h} \epsilon_{\alpha\beta}^{\alpha}.$$

Na podstawie (2.2) i (2.3) znajdujemy

$$(2.4) \quad w_{\alpha}^{+} = \frac{-2h}{1+\lambda} u_{\beta} \epsilon_{\alpha}^{\beta}, \quad w_{\alpha}^{-} = \frac{2\lambda h}{1+\lambda} u_{\beta} \epsilon_{\alpha}^{\beta}.$$

Funkcje  $v$  i  $u_{\alpha}$ , opisujące płytowy stan przemieszczenia ustroju, określone są na płaszczyźnie  $\pi$ .

### 3. Stan odkształcenia

Wraz z przemieszczeniem całego ustroju doznają przemieszczeń i odkształceń poszczególne pręty. Oznaczając liniowe odkształcenia jednostkowe pręta symbolem  $e$  i zakładając liniowość funkcji przemieszczeń (2.1), (2.2) pomiędzy sąsiednimi węzłami możemy [15, 16] w odniesieniu do prętów siatek zewnętrznych napisać zależność

$$(3.1) \quad e = T^{\alpha} T^{\beta} w_{\alpha} |_{\beta}.$$

Oznaczając

$$(3.2) \quad \gamma_{\alpha\beta} = w_{\beta} |_{\alpha},$$

po uwzględnieniu (3.1), otrzymujemy

$$(3.3) \quad e = T^{\alpha} T^{\beta} \gamma_{\alpha\beta}.$$

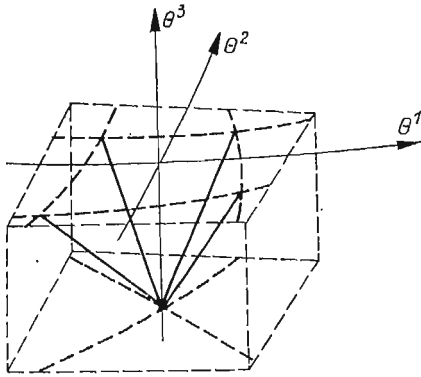
Odpowiednią zależność w odniesieniu do krzyżulców napiszemy na podstawie następującego rozumowania. Wyodrębnimy z obszaru warstwy środkowej pewną umowną bryłę zawierającą wiązkę krzyżulców zbiegających się w jednym węźle warstwy dolnej (lub górnej) (rys. 4). Wobec założenia o regularności przekrycia przyjmujemy, że bryła ta stanowi powtarzalny element warstwy środkowej. Przyrostowi długości  $\Delta l$  krzyżulca odpo-

wiada obrót bryły (odkształcenie postaciowe) pokazany na rys. 5. Oznaczając przez  $\gamma_\alpha$  składowe tego obrotu w kierunkach osi  $\theta^\alpha$  możemy napisać następujące zależności

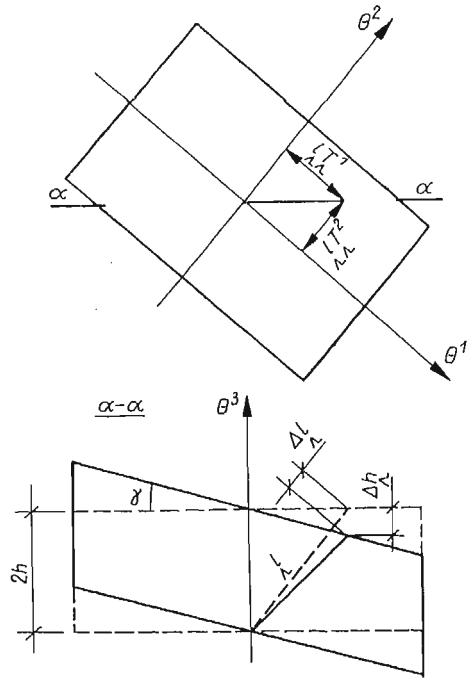
$$\frac{\Delta l}{\Delta h} = \frac{2h}{l} = T^3, \quad \Delta h = l T^\alpha \gamma_\alpha,$$

wynikające z rozważań geometrycznych. Uwzględniając równość  $e = \frac{\Delta l}{\Delta h}$  mamy

$$(3.4) \quad e = T^3 T^\alpha \gamma_\alpha.$$



Rys. 4



Rys. 5

Składowe  $\gamma_\alpha$  określające kąt odkształcenia postaciowego warstwy środkowej płyty trójwarstwowej wyrażamy za pomocą składowych stanu przemieszczenia w następujący sposób [14]

$$\gamma_\alpha = \frac{w_\beta^+ - w_\beta^-}{2h} \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{w|_\alpha^+ + w|_\alpha^-}{2},$$

skąd wobec (2.1) i (2.3) otrzymujemy

$$(3.5) \quad \gamma_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} u_\beta + v|_\alpha.$$

Podstawienie (3.5) do (3.4) daje

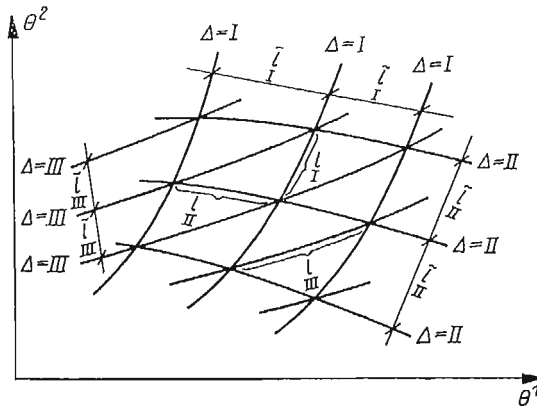
$$(3.6) \quad e = T^3 T^\alpha (\epsilon_{\alpha\beta} u_\beta + v|_\alpha).$$

## 4. Stan naprężenia i związki konstytutywne

Na skutek obciążenia ustroju w jego prętach wystąpią siły podłużne  $P$ . Zakładając jednorodność i liniową sprężystość każdego pręta i oznaczając przez  $\frac{EA}{\Delta}$  sztywność podłużną pręta, mamy

$$(4.1) \quad P = EAe.$$

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem związków konstytutywnych dla poszczególnych elementów konstrukcji.



Rys. 6

W pierwszej kolejności rozpatrzmy siatki zewnętrzne przekrycia. W przypadku siatki skonstruowanej z rodzin prętów ciągłych (por. rys. 6) potencjał sprężysty  $\sigma$  określony jest za pomocą zależności

$$(4.2) \quad \sigma = \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \frac{1}{l_{\Delta}} \int_{-l_{\Delta}/2}^{l_{\Delta}/2} P^2 / EA ds,$$

w której  $l_{\Delta}$  jest odległością sąsiednich prętów w rodzinie  $\Delta$ . Po wprowadzeniu tensora o składowych

$$(4.3) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} T^{\lambda} T^{\mu} \frac{EA}{l_{\Delta}}$$

i po podstawieniu (3.3) (4.1) do (4.2) otrzymujemy na  $\sigma$  następujące wyrażenie

$$(4.4) \quad \sigma = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu}.$$

W przypadku siatki heksagonalnej (rys. 7) wzór na potencjał sprężysty ma postać [16]

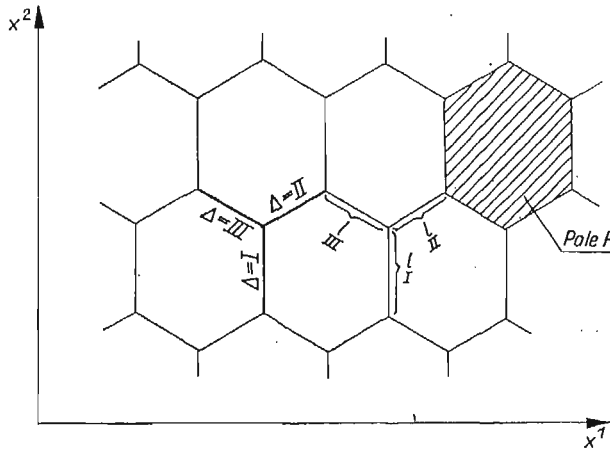
$$(4.5) \quad \sigma = \frac{1}{2F} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{P^2}{EA} ds,$$

przy czym  $F$  jest polem sześciokąta stanowiącego «oczko» siatki. Definiując następująco składowe tensora sztywności sprężystej

$$(4.6) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{F} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} T^{\alpha} T^{\beta} T^{\lambda} T^{\mu} EA l,$$

otrzymujemy na  $\sigma$  wyrażenie analogiczne do (4.4)

$$\sigma = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu}.$$



Rys. 7

Składowe stanu napięcia  $p^{\alpha\beta}$  płaskiej siatki określimy za pomocą zależności [17]

$$p^{\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}},$$

z której wobec (4.4) znajdujemy

$$(4.7) \quad p^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}.$$

Z kolei rozważymy warstwę środkową ustroju. Oznaczając przez  $\Omega$  pole podstawy bryły zawierającej jedną wiązkę krzyżulców (rys. 4), potencjał  $\sigma$  warstwy środkowej wyrazimy następująco

$$(4.8) \quad \sigma = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\Lambda=1}^{\Lambda^0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{P^2}{EA} ds,$$

gdzie  $\Delta^0$  jest liczbą krzyżulców zbiegających się w jednym węźle. Podstawiając do tego wyrażenia zależności (3.4) i (4.1) znajdujemy

$$\sigma = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\Delta=1}^{\Delta^0} T^{\alpha} T^{\beta} T^3 T^3 E A l \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Po wprowadzeniu tensora sztywności

$$(4.9) \quad C^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta=1}^{\Delta^0} T^{\alpha} T^{\beta} T^3 T^3 E A l$$

potencjał  $\sigma$  wyrazimy za pomocą związku

$$(4.10) \quad \sigma = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Składowe  $p^{\alpha}$  charakteryzujące stan naprężenia warstwy środkowej otrzymamy z zależności

$$p^{\alpha} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha}},$$

która prowadzi do

$$(4.11) \quad p^{\alpha} = C^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}.$$

Wyprowadzone w tym rozdziale związki (4.7) i (4.11) są związkami konstytutywnymi przekrycia strukturalnego. Zakładamy, że określone tymi związkami wielkości  $p^{\alpha}$  i  $p^{\alpha\beta}$  opisują stan naprężenia płyty trójwarstwowej. Podstawiając do wyrażen (4.7) i (4.11) zależności (4.3) i (4.9) oraz (3.3), (3.4) i (4.1) otrzymujemy następujące zależności ilustrujące interpretację fizyczną składowych  $p^{\alpha\beta}$  i  $p^{\alpha}$

$$(4.12) \quad p^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^{\beta} P / \tilde{l},$$

$$p^{\alpha} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta} T^{\alpha} T^3 P l.$$

Ostatnią z wielkości charakteryzujących strukturę przekrycia jest parametr  $\lambda$  określający położenie płaszczyzny obojętnej  $\pi$ . Przyjmujemy, że położenie tej płaszczyzny zależy od stosunku gęstości sztywności warstwy górnej do warstwy dolnej, skąd wynika

$$(4.13) \quad \lambda = \frac{\sum_{\Delta} \bar{R}}{\sum_{\Delta} R},$$

gdzie  $R = \frac{EA l}{F}$  w przypadku siatki heksagonalnej lub  $R = \frac{EA \tilde{l}}{F}$  w przypadku innych siatek.

## 5. Równania równowagi

Znając stan naprężenia w poszczególnych warstwach płyty można przystąpić do określenia płytowych sił wewnętrznych. Rozpatrzmy na początek momenty  $M^{\alpha\beta}$  względem płaszczyzny obojętnej wywołane napięciami występującymi w warstwach zewnętrznych. Przyjmując dodatnie zwroty napięć jak na rys. 8, otrzymujemy wyrażenie

$$(5.1) \quad M^{\alpha\beta} = \epsilon_{\lambda}^{\beta} (\bar{h} p^{\alpha\lambda} - h p^{\alpha\lambda}).$$

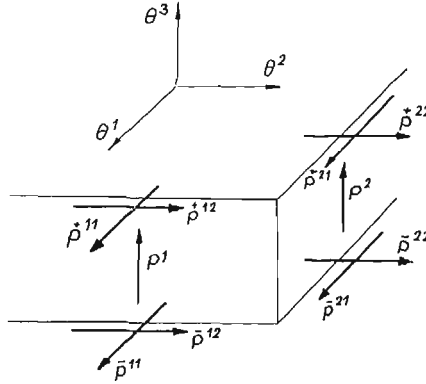


Wprowadzając oznaczenia

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= u_{\beta, \alpha}, \\ D^{\alpha\beta\nu\mu} &= \left( \frac{2h}{1+\lambda} \right)^2 (A^{+\alpha\beta\nu\mu} + \lambda^2 \bar{A}^{\alpha\beta\nu\mu}), \\ \mathring{D}^{\alpha\beta\mu\lambda} &= \epsilon_{\rho}^{\beta} \epsilon_{\pi}^{\lambda} D^{\alpha\rho\mu\pi}. \end{aligned}$$

i korzystając ze wzorów (2.2) (3.2) i (4.7), zależność (5.1) można przekształcić do postaci

$$(5.3) \quad M^{\alpha\beta} = \mathring{D}^{\alpha\beta\mu\lambda} \kappa_{\mu\lambda}$$



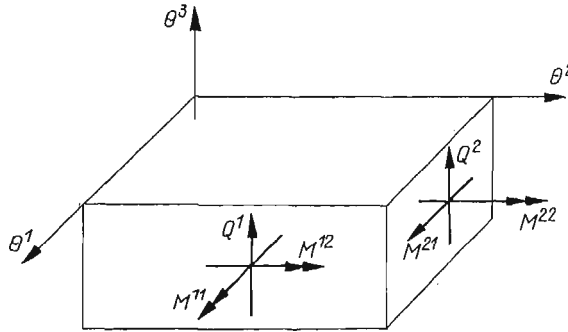
Rys. 8

Siły poprzeczne wywołane napięciami  $p^{\alpha}$  występującymi w warstwie środkowej wyznaczmy ze związku

$$Q^{\alpha} = p^{\alpha},$$

który po uwzględnieniu (4.11) przybiera postać

$$(5.4) \quad Q^{\alpha} = C^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}.$$



Rys. 9

Założymy następnie, że występujące w niektórych typach przekryć siły podłużne  $N^{\alpha\beta}$  określone zależnościami

$$N^{\alpha\beta} = \overset{+}{p}^{\alpha\beta} + \overset{-}{p}^{\alpha\beta}$$

mają niewielki wpływ na odkształcenie ustroju, wobec czego pominiemy je w dalszych rozważaniach.

Rozpatrując wycinek płyty trójwarstwowej obciążony siłami  $M^{\alpha\beta}$  i  $Q^\alpha$  (rys. 9) otrzymujemy następujące równania równowagi [14]

$$(5.5) \quad \begin{aligned} Q^\alpha|_\alpha + f &= 0, \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha + \epsilon_{\alpha}^{\beta} Q^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $f$  jest funkcją obciążenia. Podstawienie (5.3) i (5.4) do tych równań prowadzi do

$$(5.6) \quad (C^{\alpha\beta}\gamma_\beta)|_\alpha + f = 0, \quad (\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu})|_\alpha - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}\gamma_\lambda = 0.$$

Powyższe związki stanowią układ równań równowagi wyrażony w odkształceniach. Wstawiając do (5.6) zależności (3.5) i (5.2)<sub>1</sub>, wyrażamy te równania w przemieszczeniach

$$(5.7) \quad [C^{\alpha\beta}(\epsilon_{\beta}^{\lambda}u_\lambda + v|_\beta)]|_\alpha + f = 0, \quad (\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}u_\mu|_\lambda)|_\alpha - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}(\epsilon_{\lambda}^{\mu}u_\mu + v|_\lambda) = 0.$$

Rozwiązanie tego układu równań względem niewiadomych funkcji  $u_\alpha$ ,  $v$  określa stan przemieszczenia przekrycia strukturalnego przy zmiennych wartościach składowych tensorów sztywności  $\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$  i  $C^{\alpha\beta}$ .

W przypadku stałych własności mechanicznych  $A = \text{const}$ ,  $I = \text{const}$  i  $T^\alpha = \text{const}$  wartości składowych tensorów  $\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$  i  $C^{\alpha\beta}$  są jednakowe w obszarze ustroju

$$\mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \text{const}, \quad C^{\alpha\beta} = \text{const}.$$

Układ (5.7) upraszcza się wtedy do postaci

$$(5.8) \quad C^{\alpha\beta}(\epsilon_{\beta}^{\lambda}u_\lambda + v|_\beta)|_\alpha + f = 0, \quad \mathring{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}u_\mu|_\lambda - \epsilon_{\alpha}^{\beta} C^{\alpha\lambda}(\epsilon_{\lambda}^{\mu}u_\mu + v|_\lambda) = 0.$$

W zakończeniu tego rozdziału przedstawimy uproszczoną postać układu (5.7) wprowadzając założenie analogiczne do założenia Love'a–Kirchhoffa przyjmowanego w klasycznej teorii płyt [14, 18]. Przyjmujemy mianowicie, że punkty warstw zewnętrznych leżące na prostej prostopadłej do płaszczyzny  $\pi$ , po odkształceniu pozostają na prostej, która jest prostopadła do powierzchni obojętnej (rys. 3c). Konsekwencją tego założenia jest zależność

$$(5.9) \quad u_\alpha = \epsilon_{\alpha}^{\beta} v|_\beta.$$

Eliminując z równań równowagi (5.5) siły poprzeczne  $Q^\alpha$ , po przekształceniach i uwzględnieniu (5.2)<sub>1,3</sub> otrzymujemy równanie

$$(5.10) \quad (D^{\alpha\beta\lambda\mu}v|_{\lambda\mu})|_{\alpha\beta} - f = 0,$$

które w przypadku  $D^{\alpha\beta\lambda\mu} = \text{const}$  przyjmuje postać

$$(5.11) \quad D^{\alpha\beta\lambda\mu}v|_{\alpha\beta\lambda\mu} - f = 0.$$

## 6. Obliczanie sił w prętach

W wyniku rozwiązania układu równań (5.8), przy danych warunkach brzegowych wynikających ze sposobu podparcia przekrycia, otrzymujemy składowe  $v$  i  $u_\alpha$ . Siły w prętach ustroju znajdujemy na podstawie zależności (4.1), która w odniesieniu do prętów siatek zewnętrznych ma postać

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \overset{+}{P}_\Delta &= -\frac{2h}{1+\lambda} \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \epsilon_{\alpha}^{\nu} u_{\nu}|_{\beta}, \\ \overset{-}{P}_\Delta &= \frac{2h}{1+\lambda} \overset{-}{\lambda} \overset{-}{E} \overset{-}{A} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \epsilon_{\alpha}^{\nu} u_{\nu}|_{\beta}, \end{aligned}$$

co znajdujemy wykorzystując związki (2.4) i (3.1).

Wzory na siły w krzyżulcach znajdujemy podstawiając do (4.1) zależność (3.6), co daje

$$(6.2) \quad \overset{+}{P}_\Delta = \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} (\epsilon_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} + v|_{\alpha}).$$

Podczas znajdowania sił w prętach przekrycia wartości składowych stanu przemieszczenia i ich pochodnych obliczamy w przekrojach środkowych prętów.

Gdy stan przemieszczenia ustroju określamy na podstawie równania uproszczonego (5.10), wówczas siły w prętach siatek zewnętrznych znajdujemy podstawiając związek (5.9) do zależności (6.1), co daje

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \overset{+}{P}_\Delta &= \frac{-2h}{1+\lambda} \overset{+}{E} \overset{+}{A} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} v|_{\alpha\beta}, \\ \overset{-}{P}_\Delta &= \frac{2h}{1+\lambda} \overset{-}{\lambda} \overset{-}{E} \overset{-}{A} \overset{-}{T} \overset{-}{T} \overset{-}{T} v|_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Nieco inaczej postępujemy podczas obliczania sił w krzyżulcach. Z równania równowagi (5.5) znajdujemy

$$Q^{\alpha} = \epsilon_{\beta}^{\alpha} M^{\lambda\beta}|_{\lambda}.$$

Podstawiając do powyższego związku zależności (5.3), (5.2)<sub>1</sub> i (5.9), otrzymujemy

$$(6.4) \quad Q^{\alpha} = D^{\beta\alpha\lambda\mu} v|_{\beta\lambda\mu}.$$

Siły w poszczególnych prętach znajdujemy z zależności

$$(6.5) \quad \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} \overset{+}{T} P I = D^{\beta\alpha\lambda\mu} v|_{\beta\lambda\mu}$$

wynikającej z (4.16)<sub>2</sub> i (6.4) oraz z warunków równowagi węzła, w którym zbiegają się krzyżulce.

## 7. Podstawowe zależności we współrzędnych biegunowych

W przypadkach przekryć strukturalnych pierścieniowych w planie wygodnie jest posługiwać się układem współrzędnych biegunowych  $\varrho = 1$ ,  $\varphi = 2$ . Rozpatrzmy przekrycie pierścieniowe, którego siatki zewnętrzne są siatkami biegunowymi (rys. 1d). Dzięki temu jedynie  $D^{\rho\rho\rho\rho}$  i  $D^{\varphi\varphi\varphi\varphi}$  są niezerowe. Ponadto zachodzą równości  $C^{\rho\varphi} = C^{\varphi\rho} = 0$ . Uwzględniając wartości dwuwektora Ricciego w biegunowym układzie współrzędnych (por. np. [17]) z (5.2)<sub>3</sub> znajdujemy

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{D}^{\rho\varphi\rho\varphi} &= \varrho^{-2} D^{\rho\rho\rho\rho}, \\ \overset{\circ}{D}^{\varphi\rho\rho\rho} &= \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \end{aligned}$$

przy czym pozostałe składowe tensora  $\dot{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$  są równe zeru. Związki fizyczne (5.3) i (5.4) mają teraz postać

$$(7.1) \quad \begin{aligned} Q^\rho &= C^{\rho\rho} \gamma_\rho, & Q^\varphi &= C^{\varphi\varphi} \gamma_\varphi, \\ M^{\rho\rho} &= M^{\varphi\varphi} = 0, \\ M^{\rho\varphi} &= \varrho^{-2} D^{\rho\rho\rho\rho} \kappa_{\rho\varphi}, \\ M^{\varphi\rho} &= \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi} \kappa_{\varphi\rho}. \end{aligned}$$

Zamieniając pochodne kowariantne na pochodne cząstkowe, napiszemy związki geometryczne (3.5) i (5.2)<sub>1</sub> w formie

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \gamma_\rho &= \varrho^{-1} u_\rho + v_{,\rho}, & \gamma_\varphi &= -\varrho u_\rho + v_{,\varphi}, \\ \kappa_{\rho\varphi} &= u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\varphi, & \kappa_{\varphi\rho} &= u_{\rho,\varphi} - \varrho^{-1} u_\varphi, \end{aligned}$$

a równania równowagi (5.5) po uwzględnieniu (7.1)<sub>3</sub> mają postać

$$(7.3) \quad \begin{aligned} Q^\rho_{,\rho} + Q^\varphi_{,\varphi} + \varrho^{-1} Q^\rho + f &= 0, \\ M^{\varphi\rho}_{,\varphi} + \varrho Q^\varphi &= 0, \\ M^{\rho\varphi}_{,\rho} + 2\varrho^{-1} M^{\rho\varphi} + \varrho^{-1} M^{\varphi\rho} - \varrho^{-1} Q^\rho &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmijmy dalej, że sposób podparcia i obciążenia ustroju spełnia warunki kołowej symetrii, oraz przyjmijmy równość  $u_\rho = 0$ . Związki geometryczne (7.2) sprowadzą się do

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \gamma_\rho &= \varrho^{-1} u_\varphi + v_{,\rho}, & \gamma_\varphi &= 0, \\ \kappa_{\rho\varphi} &= u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\varphi, & \kappa_{\varphi\rho} &= -\varrho^{-1} u_\varphi, \end{aligned}$$

natomiast równania równowagi (7.3) otrzymujemy w postaci

$$(7.5) \quad \begin{aligned} (\varrho Q^\rho)_{,\rho} + \varrho f &= 0, & Q^\varphi &= 0, \\ (\varrho^2 M^{\rho\varphi})_{,\rho} + \varrho M^{\varphi\rho} + \varrho Q^\rho &= 0. \end{aligned}$$

Po całkowaniu równania (7.5)<sub>1</sub> otrzymamy

$$(7.6) \quad \varrho Q^\rho = - \int \varrho f d\varrho + C_1,$$

gdzie  $C_1$  jest stałą całkowania. Podstawiając (7.6) do (7.5)<sub>3</sub> otrzymujemy

$$(7.7) \quad (\varrho^2 M^{\rho\varphi})_{,\rho} + \varrho M^{\varphi\rho} = \int \varrho f d\varrho - C_1.$$

Podstawiając następnie do równań (7.6) i (7.7) związki fizyczne (7.1) i geometryczne (7.4) znajdujemy

$$(7.8) \quad \begin{aligned} C^{\rho\rho}(u_\varphi + \varrho v_{,\rho}) &= \frac{1}{\varrho} \left( C_1 - \int \varrho f d\varrho \right), \\ [D^{\rho\rho\rho\rho}(u_{\varphi,\rho} - \varrho^{-1} u_\varphi)]_{,\rho} - \varrho^2 D^{\varphi\varphi\varphi\varphi} u_\varphi &= \int \varrho f d\varrho - C_1. \end{aligned}$$

Powyższe równania są układem równań równowagi wyrażonym w przemieszczeniach.

W równaniu (7.8)<sub>2</sub> występuje tylko jedna niewiadoma  $u_\varphi$ . Po rozwiązaniu tego równania funkcję  $u_\varphi$  wstawiamy do przekształconego równania (7.8)<sub>1</sub>, co daje

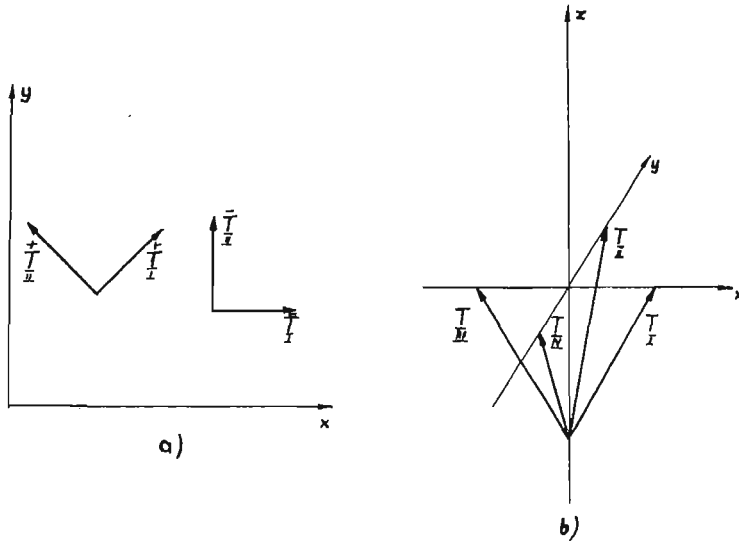
$$(7.9) \quad v = \int \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{1}{\varrho C^{\rho\rho}} \left( C_1 - \int \varrho f d\varrho \right) - u_\varphi \right] d\varrho + C_2,$$

gdzie  $C_2$  jest stałą całkowania.

8. Podstawowe zależności we współrzędnych prostokątnych

Rozpatrzmy w pierwszej kolejności przekrycie strukturalne o siatce diagonalnej pokazanej na rys. 1b. Przyjmując kierunki osi  $x = 1, y = 1$  równoległe do prętów siatki dolnej (rys. 10a) składowe wektorów kierunkowych siatek zewnętrznych otrzymujemy następującej wartości:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \bar{T}_I^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \bar{T}_I^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \bar{T}_{II}^+ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}, & \bar{T}_{II}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{T}_I^- &= 1, & \bar{T}_I^- &= 0, & \bar{T}_{II}^- &= 0, & \bar{T}_{II}^- &= 1. \end{aligned}$$



Rys. 10

Przyjmując jednakowe pola przekrojów prętów siatek zewnętrznych i oznaczając

$$R = \frac{EA}{l},$$

gdzie  $l$  jest długością prętów siatki górnej, możemy składowe  $A^{\alpha\beta\mu\lambda}$  wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \bar{A}^{xxxx} = \bar{A}^{yyyy} = \bar{A}^{xxyy} = \bar{A}^{xyxy} = \bar{A}^{yxyx} = \bar{A}^{xyyx} = \bar{A}^{yxyx} = \bar{A}^{xyxx} = \bar{A}^{yyxx} = \frac{1}{2}R, \\ \bar{A}^{xxxx} = \bar{A}^{yyyy} = R\sqrt{2}, \end{aligned}$$

przy czym pozostałe składowe  $\bar{A}^{\alpha\beta\mu\lambda}$  i  $\bar{A}^{\alpha\beta\mu\lambda}$  są równe zero.

Podstawiając otrzymane wartości do (5.2)<sub>2</sub> znajdujemy

$$(8.2) \quad \begin{aligned} D^{xxxx} = D^{yyyy} &= \left(\frac{1}{2} + \lambda^2\sqrt{2}\right) \left(\frac{2h}{1+\lambda}\right)^2 R, \\ D^{xxyy} = D^{xyxy} = D^{xyyx} = D^{yxyx} = D^{yxyx} = D^{yyxx} &= \frac{1}{2}R \left(\frac{2h}{1+\lambda}\right)^2, \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda = \sqrt{2}$ .

Następnie, wobec wartości składowych wektorów kierunkowych krzyżulców (rys. 10b)

$$(8.3) \quad \begin{aligned} T^1_I &= \frac{l}{l_k \sqrt{2}}, & T^2_I &= 0, & T^3_I &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{II} &= 0, & T^2_{II} &= \frac{l}{l_k \sqrt{2}}, & T^3_{II} &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{III} &= \frac{-l}{\sqrt{2} l_k}, & T^2_{III} &= 0, & T^3_{III} &= \frac{2h}{l_k}, \\ T^1_{IV} &= 0, & T^2_{IV} &= \frac{-l}{\sqrt{2} l_k}, & T^3_{IV} &= \frac{2h}{l_k}, \end{aligned}$$

gdzie  $l_k = \sqrt{4h^2 + l^2}/2$  jest długością krzyżulców, oraz wobec  $\Omega = 2l^2$ , składowe tensora  $C^{\alpha\beta}$  wynoszą

$$(8.4) \quad C^{xx} = C^{yy} = \frac{8h^2 EA_k}{l_k^3}, \quad C^{xy} = C^{yx} = 0,$$

przy czym założono jednakowe pola przekrojów  $A_k$  wszystkich krzyżulców.

Podstawiając (8.2) do (5.2)<sub>3</sub>, a następnie wraz z (8.4) do układu równań równowagi (5.8), otrzymujemy po przekształceniach

$$(8.5) \quad \begin{aligned} C^{xx}(u_y + v_{,x})_{,x} + C^{yy}(-u_x + v_{,y})_{,y} + f &= 0, \\ D^{xyxy} u_{x,xx} - 2D^{xyyx} u_{y,xy} + D^{yyyy} u_{x,yy} + C^{yy}(-u_x + v_{,y}) &= 0, \\ D^{yxyx} u_{y,yy} - 2D^{yxxy} u_{x,xy} + D^{xxxx} u_{y,xx} - C^{xx}(u_y + v_{,x}) &= 0. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań równowagi można przepisać w postaci analogicznej do wyprowadzonej w pracy [19] w odniesieniu do płyt trójwarstwowych:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} L_{11} v + L_{12} u_x + L_{13} u_y &= f, \\ L_{21} v + L_{22} u_x + L_{23} u_y &= 0, \\ L_{31} v + L_{23} u_x + L_{33} u_y &= 0. \end{aligned}$$

Występujące w tych równaniach operatory różniczkowe, po uwzględnieniu (8.2) i (8.4) i wprowadzeniu oznaczeń

$$(8.7) \quad \begin{aligned} C &= \frac{2h^2 EA_k}{l_k^3}, \\ D &= R \left( \frac{2h}{1+\lambda} \right)^2, \quad K = \frac{1}{2} + \lambda^2 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

wyrażamy za pomocą następujących wzorów

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -C(\partial_{xx} + \partial_{yy}), \\
 L_{12} &= L_{21} = C\partial_y, \\
 L_{13} &= L_{31} = -C\partial_x, \\
 L_{22} &= D\left(\frac{1}{2}\partial_{xx} + K\partial_{yy}\right) - C, \\
 L_{23} &= L_{32} = -D\partial_{xy}, \\
 L_{33} &= D\left(\frac{1}{2}\partial_{yy} + K\partial_{xx}\right) - C.
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

Uzależniając składowe  $v, u_x, u_y$  od funkcji przemieszczeń  $\Phi(x, y)$  za pomocą związków

$$v = \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} \\ L_{23} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi, \quad u_x = \begin{vmatrix} L_{23} & L_{12} \\ L_{33} & L_{31} \end{vmatrix} \Phi, \quad u_y = \begin{vmatrix} L_{12} & L_{22} \\ L_{13} & L_{23} \end{vmatrix} \Phi,
 \tag{8.9}$$

otrzymujemy tożsamościowe spełnienie równań (8.6)<sub>2,3</sub>.

Równanie (8.6)<sub>1</sub> prowadzi, po uwzględnieniu (8.9), do następującego równania różniczkowego

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{33} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} \Phi = f.
 \tag{8.10}$$

Równanie to, po uwzględnieniu wzorów (8.8), możemy przekształcić do następującej postaci

$$DC[-0,5DK(\partial_{xx} + \partial_{yy})(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) + CK(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) - D(K^2 - 0,75)\partial_{xx}\partial_{yy}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + 2,5C\partial_{xx}\partial_{yy}] \Phi = f.
 \tag{8.11}$$

Wzory określające składowe  $v, u_x$  i  $u_y$  znajdujemy rozwijając wyznaczniki (8.9) i uwzględniając wzory (8.8)

$$\begin{aligned}
 v &= [0,5D^2K(\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy}) + D^2(K^2 - 0,75)\partial_{xx}\partial_{yy} - DC(K + 0,5)(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + C^2] \Phi, \\
 u_x &= C\partial_y[D(K - 1)\partial_{xx} + 0,5D\partial_{yy} - C] \Phi, \quad u_y = C\partial_x[D(K - 1)\partial_{yy} + 0,5D\partial_{xx} - C] \Phi.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

Powyższe wzory określające składowe stanu przemieszczenia otrzymano na podstawie pełnego układu równań równowagi (5.8).

Natomiast przyjmując założenie «o prostych normalnych» (5.9), stan przemieszczenia ustroju określamy na podstawie uproszczonego równania równowagi (5.11), które w przypadku siatki diagonalnej przyjmuje postać

$$(K\partial_{xxxx} + 3\partial_{xx}\partial_{yy} + K\partial_{yyyy})v = \frac{f}{D}.
 \tag{8.13}$$

Równanie to wykazuje formalną analogię do równania równowagi płyty ortotropowej, wyprowadzonego przy założeniu Love'a-Kirchhoffa.

Rozpatrzmy z kolei przekrycie strukturalne o siatce równoległej (rys. 1a) i o jednakowych przekrojach prętów siatek zewnętrznych. Jedyne niezerowe składowe tensorów sztywności sprężystej to

$$(8.14) \quad \overset{\circ}{D}^{xyxy} = \overset{\circ}{D}^{yxyx} = 2D, \quad C^{xx} = C^{yy} = 2C,$$

przy czym współczynnik  $\lambda = 1$ .

W tym przypadku operatory  $L_{\alpha\beta}$  występujące w układzie równań (8.6) są określone za pomocą następujących wzorów:

$$(8.15) \quad \begin{aligned} L_{11} &= -C(\partial_{xx} + \partial_{yy}), & L_{12} &= L_{21} = C\partial_y, & L_{13} &= L_{31} = -C\partial_x, \\ L_{22} &= 2D\partial_{yy} - C, & L_{23} &= L_{32} = 0, & L_{33} &= 2D\partial_{xx} - C, \end{aligned}$$

co prowadzi do następującego równania na funkcję przemieszczeń

$$(8.16) \quad 2CD[\partial_{xxxx}(C - 2D\partial_{yy}) + \partial_{yyyy}(C - 2D\partial_{xx})]\Phi = f.$$

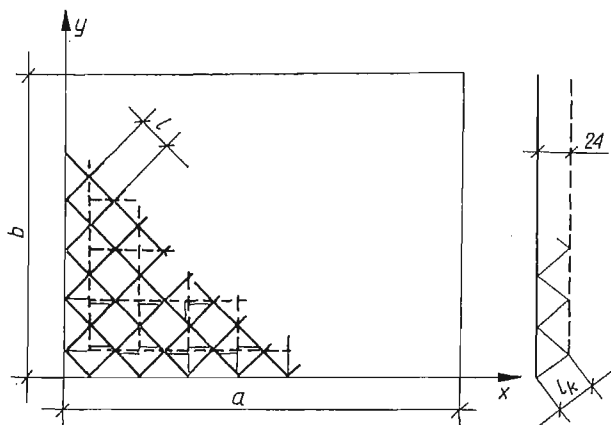
Identyczną postać tego równania otrzymano niezależnie w pracy [5].

Uproszczone równanie równowagi (5.11) ma w przypadku przekrycia o siatce równoległej postać

$$(8.17) \quad (\partial_{xxxx} + \partial_{yyyy})v = \frac{f}{2D}.$$

### 9. Przykład liczbowy. Uwagi końcowe

W tym punkcie przedstawimy przykład obliczeń prostokątnego przekrycia strukturalnego o siatce diagonalnej, swobodnie podpartego (rys. 11).



Rys. 11

Na podstawie rozważań przedstawionych w pracy [20] wiadomo, że rozwiązanie równania (8.11) przy warunkach brzegowych wynikających ze swobodnego podparcia



wszystkich krawędzi przekrycia otrzymamy, przyjmując funkcję przemieszczeń  $\Phi$  w postaci zaproponowanej przez Naviera

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \end{aligned}$$

Przedstawiając obciążenie  $f$  w postaci szeregu trygonometrycznego

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

gdzie

$$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y dx dy,$$

współczynniki  $\Phi_{mn}$  obliczamy według wzoru

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \Phi_{mn} &= \frac{f_{mn}}{CD} [0,5 DK(\alpha_m^2 + \beta_n^2)(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + CK(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + \\ &\quad + D(K^2 - 0,75)\alpha_m^2 \beta_n^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + 2,5 C\alpha_m^2 \beta_n^2]^{-1}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe rozwiązanie do wzorów (8.12) otrzymujemy zależności określające składowe  $v$ ,  $u_x$  i  $u_y$  w postaci

$$(9.3) \quad \begin{aligned} v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ u_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ u_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \end{aligned}$$

w których współczynniki rozwinięcia dane są zależnościami

$$\begin{aligned} V_{mn} &= [0,5D^2K(\alpha_m^4 + \beta_n^4) + D^2(K^2 - 0,75)\alpha_m^2 \beta_n^2 + CD(K + 0,5)(\alpha_m^2 + \beta_n^2) + C^2] \Phi_{mn}, \\ X_{mn} &= [(1 - K)CD\alpha_m^2 - 0,5CD\beta_n^2 - C^2] \beta_n \Phi_{mn}, \\ Y_{mn} &= [(1 - K)CD\beta_n^2 - 0,5CD\alpha_m^2 - C^2] \alpha_m \Phi_{mn}, \end{aligned}$$

przy czym współczynniki  $\Phi_{mn}$  określone są wzorami (9.2).

Znając stan przemieszczenia konstrukcji przystąpimy do wyznaczenia sił w prętach. Siły w prętach siatek zewnętrznych znajdujemy wstawiając do wzorów (6.1) związki (8.1) i (9.3)

$$\begin{aligned}
 \overset{+}{P}_I &= -EA \frac{2h}{1+\lambda} \left( T^1 T^1 u_{y,x} + T^1 T^2 u_{y,y} - T^2 T^1 u_{x,x} - \right. \\
 &\quad \left. - T^2 T^2 u_{x,y} \right) = -\frac{h}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(X_{mn} \beta_n - \\
 &\quad - Y_{mn} \alpha_m) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + (-X_{mn} \alpha_m + Y_{mn} \beta_m) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y], \\
 \overset{+}{P}_{II} &= -\frac{2h}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(X_{mn} \beta_n - Y_{mn} \alpha_m) \sin \alpha_m y \times \\
 &\quad \times \sin \beta_n y + (X_{mn} \alpha_m - Y_{mn} \beta_n) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y], \\
 \overset{-}{P}_I &= \frac{2h\lambda}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \alpha_m \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{-}{P}_{II} &= \frac{2h\lambda}{1+\lambda} EA \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \beta_n \sin \alpha_m x \sin \beta_n y.
 \end{aligned}
 \tag{9.4a}$$

Z kolei siły w krzyżulcach otrzymamy podstawiając do wzoru (6.2) związki (8.3) i (9.3):

$$\begin{aligned}
 \overset{P}{I} &= EA_k T^1 T^3 (u_y + v_x) = \frac{2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \alpha_m + Y_{mn}) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{P}{II} &= \frac{2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \beta_n - X_{mn}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
 \overset{P}{III} &= \frac{-2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \alpha_m + Y_{mn}) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
 \overset{P}{IV} &= \frac{-2hlEA_k}{\sqrt{2}l_k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (V_{mn} \beta_n - X_{mn}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y.
 \end{aligned}
 \tag{9.4b}$$

Wartości sił należy obliczać w przekrojach środkowych poszczególnych prętów.

W celu sprawdzenia poprawności przedstawionych rozważań przeprowadzono obliczenia numeryczne ugięć według wzorów (9.3) oraz sił w prętach według wzorów (9.4). Obliczenia te wykonano przyjmując następujące dane:

$$\begin{aligned}
 a &= b = 24 \text{ m}, & h &= 0,75 \text{ m}, \\
 l &= 2 \text{ m}, & f &= -0,2 \text{ T/m}^2,
 \end{aligned}$$

wszystkie przekroje prętów przyjęto jednakowe o polu  $A = 10 \text{ cm}^2$ .

Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymano następujące wyniki:

maksymalne ugięcie pionowe	4,1 cm,
maksymalna siła w pręcie siatki zewnętrznej	12,88 T,
maksymalna siła w krzyżulcu	6,43 T.

Wyniki te porównano z wynikami obliczeń otrzymanymi przy zastosowaniu modelu kratownicy przestrzennej (metoda odkształceń). Rozbieżności maksymalnych wielkości geometrycznych do 9% i maksymalnych wielkości statycznych do 12% przemawiają za stosowaniem przedstawionej metody.

Jednakże podczas stosowania tej metody do obliczeń statycznych należy zdawać sobie sprawę z ewentualnych błędów obarczających wyniki, a spowodowanych pominięciem wpływu sił podłużnych  $N^{\alpha\beta}$  na odkształcenia ustroju. Siły te bowiem znikają jedynie w pewnych przypadkach siatek przekryć strukturalnych, a to gdy

$$p^{+\alpha\beta} + p^{-\alpha\beta} = 0.$$

Po uwzględnieniu (2.2) (3.2) i (4.8) stwierdzamy, że równość ta ma miejsce, jeżeli

$$A^{+\alpha\beta\mu\nu} = \lambda A^{-\alpha\beta\mu\nu},$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem określonym wzorem (4.14). Natomiast w przypadkach występowania sił podłużnych  $N^{\alpha\beta}$ , rozwiązania pozbawione wspomnianego błędu możemy otrzymać traktując przekrycie strukturalne jako ustrój płytowo-tarczowy. Równania statyki uwzględniające efekt tarczowy w przekryciach strukturalnych wyprowadzono w pracy [23].

Do zalet omawianej metody należy także możliwość analizy jakościowej rozpatrywanych konstrukcji. Wyprowadzone równania w łatwy sposób pozwalają ocenić wpływ zmian poszczególnych charakterystyk na pracę przekrycia. Informacje takie są bardzo istotne przy wstępnej analizie konstrukcji.

Metoda ta może być również stosowana do analizy statycznej przekryć strukturalnych rozmaitych typów. Przy czym obliczenia można przeprowadzać na podstawie pełnego układu równań lub, w uzasadnionych przypadkach, na podstawie równania uproszczonego.

Zastosowana analogia płyty trójwarstwowej pozwala bezpośrednio korzystać z rozwiązań optymalnych dotyczących tych płyt, przedstawionych w pracach [21, 22].

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
2. R. ŚWITKA, *Obliczanie rusztów kratowych*, XVIII Konf. KI PAN i PZITB, Krynica 1972.
3. W. GUTKOWSKI, *Płyty kratowe z elementów powtarzalnych*, Rozpr. Inż., 1(1965).
4. E. SUZUKI, H. KITAMURA, M. YAMADA, *The analysis of the space truss plate by difference equations*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.
5. A. GOMULIŃSKI, M. WITKOWSKI, *Pewien sposób obliczania struktur kratowych*, Arch. Inż. Łąd., 1(1972).
6. R. PEŁA, *Statyka przestrzennej konstrukcji prętowej płyty strukturalnej*, Rozpr. Inż., 4(1971).
7. E. KUBICA, *Obliczanie ugięć przekryć siatkowych*, Prace nauk. Inst. Budow. P. Wr., 5 (1971).
8. J. D. RENTON, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.

9. J. D. RENTON, *General properties of space grids*, Int. J. Mech. Sci., 1 (1970).
10. B. KATO, K. TAKANASHI, Y. TSUSHIMA, Y. HIRATA, *A space truss of square pyramid units*, The Int. Conf. on Space Structures, University of Surrey, 1966.
11. L. KOLLAR, *Continuum method of analysis for double-layer space trusses with upper and lower chord planes of different rigidities*, Acta Technica Ac., Sci. Hung., 76 (1974) 53-63.
12. F. LEDERER, *Fachwerk und Uostplatten*, Werner-Verlag, Düsseldorf 1972.
13. L. F. I. PLANTEMA, *Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells*, Wiley and Sons. Amsterdam 1966.
14. A. С. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехтеориздат, Москва 1956.
15. Cz. WOŹNIAK, *Modele ciagle gęstych siatek prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 2 (1965).
16. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teor. Stos., 3 (1970).
17. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
18. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
19. N. J. HOFT, *Bending and buckling of rectangular sandwich plates*, NACA T.N.no 2225, 1950.
20. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inż. Łąd., 1 (1966).
21. W. DZIENISZEWSKI, *Niektóre przypadki kształtowania trójwarstwowych płyt swobodnie podpartych o równomiernej wytrzymałości*, Rozpr. Inż., 4 (1969).
22. J. GIERLIŃSKI, *Niektóre przypadki prostokątnych płyt trójwarstwowych o równej wytrzymałości opartych na układach belek*, Arch. Inż. Łąd., 1 (1973).
23. J. GIERLIŃSKI, *Równania liniowej teorii sprężystych powłok strukturalnych* (w przygotowaniu do druku).

## Р е з ю м е

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ  
СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

В работе представлен приближенный метод расчета плоских стержневых структурных перекрытий. Такого типа конструкция состоит из двух параллельных стержневых сеток, соединенных с помощью крестовин. Длины стержней внешних сеток и крестовин являются небольшими по сравнению с габаритами конструкции. Кроме того, структура системы регулярна. На основании этих предположений была выведена сплошная модель системы внешних сеток и системы крестовин. Принималось при этом, что внешние слои модельной конструкции способны переносить лишь мембранные напряжения, а внутренний слой — лишь вертикальные касательные напряжения. К определенной таким образом конструкции была применена статическая модель трехслойной плиты. На основе фундаментальной системы уравнений, описывающих такую систему, были выведены уравнения статики структурного перекрытия. Рассуждения проиллюстрированы примером.

## S u m m a r y

## APPROXIMATE CALCULATIONS OF A ROD STRUCTURAL PLATE

In the paper considered is presented a method of calculations of regular rod structural plate. This is understood to be a certain kind of spatial truss whose all nodes are situated on two parallel planes. The nodes are connected with rods forming two plane networks and a set of cross braces. The network of the considered construction is dense and regular. The basic equations were derived on applying a sandwich plate as the continuous model of lattice structure. The numerical example is given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1974 r.