MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 14 (1976)

ZMODYFIKOWANA METODA SIŁ NOWACKIEGO W DYNAMICE PŁYT Z UWZGLĘDNIENIEM ODKSZTAŁCEŃ POSTACIOWYCH I BEZWŁADNOŚCI OBROTOWEJ

WACŁAW MIERZEJEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy [1] opisano metodę rozwiązywania problemów dynamiki płyt wykorzystującą znane częstości i postacie drgań własnych płyt podpartych swobodnie na dwu przeciwległych brzegach. Rozwiązanie zagadnień drgań swobodnych i wymuszonych uzyskuje się w niej przez rozpatrzenie drgań wymuszonych płyt zastępczych o bardziej elementarnych warunkach brzegowych, na części powierzchni których przyłożone jest obciążenie uzupełniające służące do realizacji dowolnych warunków brzegowych. Przyjęcie tych obciążeń uzupełniających opisanych odpowiednio gładkimi funkcjami pozwala na efektywne obliczanie sił wewnętrznych w rozpatrywanych płytach. Celem obecnej pracy jest zastosowanie omawianej metody do problemów dynamiki płyt z uwzględnieniem sił tnących i bezwładności obrotowej.

Dotychczas uzyskane wyniki dotyczące problemów płyt z uwzględnieniem sił tnących i bezwładności obrotowej są nieliczne, a rozwiązywanie zagadnień dotyczących dowolnych warunków brzegowych napotyka duże trudności obliczeniowe. Zasadnicze trudności występują również i przy zastosowaniu do takich płyt metody elementów skończonych ze względu na złe uwarunkowanie macierzy sztywności [4].

2. Postacie drgań własnych płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach

Stosując oznaczenia przyjęte w [2] można zapisać równania równowagi płyty drgającej swobodnie następująco:

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_x+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]-k^2Gh\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\varrho h^3}{12}\omega^2\psi_x,\\
(2.1)\qquad &\frac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi_y+(1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]-k^2Gh\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\varrho h^3}{12}\omega^2\psi_y,\\
&k^2Gh(\nabla^2 w+\Phi) = -\varrho h\omega^2 w,
\end{aligned}
$$

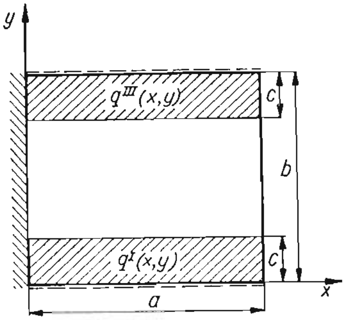
gdzie $\Phi = \frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}$, zaś ψ_x, ψ_y są funkcjami obrotu.

W pracy [3] uzyskano rozprzężenie powyższego układu równań oraz wykazano, że w przypadku płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach istnieje ścisłe, zamknięte rozwiązanie postaci drgań własnych (przestępne równanie częstości można rozwiązać metodami przybliżonymi):

$$
\begin{aligned}
W_{mn} &= X_{mn}(x)\sin\frac{n\pi}{b}y,\\
\psi_{xmn} &= X^{I}_{mn}(x)\sin\frac{n\pi}{b}y,\\
\psi_{ymn} &= X^{II}_{mn}(x)\cos\frac{n\pi}{b}y.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

3. Drgania płyty wspornikowej

Zastosowanie proponowanej metody pokazane zostanie na przykładzie obliczenia częstości i postaci drgań własnych płyty wspornikowej. Schemat realizacji warunków brzegowych w przekrojach $y = c$, $y = b-c$ płyty zastępczej pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Amplitudy obciążeń uzupełniających $q^{I}(x, y)$ i $q^{III}(x, y)$ zakłada się w następującej postaci:

$$
q^{J}(x, y) = \sum_{i=1}^{3}\left(q_i^{J}(x, y)+m_{xi}^{J}(x, y)+m_{yi}^{J}(x, y)\right),
\tag{3.1}
$$

gdzie $q_i^J(x, y)$ oznacza obciążenie normalne do powierzchni płyty, $m_{xi}^J(x, y)$, $m_{yi}^J(x, y)$ — — obciążenia momentami.

Należy stwierdzić, że do realizacji warunków brzegowych można przyjąć:

$$
q^{J}(x, y) = \sum_{i=1}^{3} q_i^{J}(x, y),
$$

tzn. $m_{xi}^J(x, y) \equiv 0$, $m_{yi}^J(x, y) \equiv 0$.

Taka postać obciążenia, odznaczająca się prostotą, nie jest jednak — jak to zostanie pokazane dalej — korzystna ze względu na zbieżność szeregów opisujących odkształcenia.

Przyjęto następującą budowę składowych obliczeń:

$$
\begin{aligned}
q_i^J(x,y) &= g_i^J(y) f_i^J(x),\\
m_{xi}^J(x,y) &= g_i^J(y) f_i^{IJ}(x),\\
m_{yi}^J(x,y) &= G_i^J(y) f_i^{IIJ}(x).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Funkcje $g_i^J(x)$ są dobierane tak, aby spełniały konieczne warunki szybkiej zbieżności omówione w pracy [1]. W przypadku funkcji $G_i^J(y)$ należy spełnić następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d^{2j+1}G_i^J(y)}{dy^{2j+1}}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2 \dots t-1,\\
&G_i^J(y)|_{y=c} = 0, \quad \left.\frac{d^j G_i^J(y)}{dy^j}\right|_{y=c} = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, 2 \dots k.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Obciążenia (3.2) przedstawia się w postaci szeregów:

$$
\begin{aligned}
q_i^J(x,y) &= \sum_m \sum_n a_n^{iJ} c_{mn}^{iJ} X_{mn}(x) \sin\frac{n\pi}{b} y,\\
m_{xi}^J(x,y) &= \sum_m \sum_n a_n^{iJ} c_{mn}^{iJ} X_{mn}^I(x) \sin\frac{n\pi}{b} y,\\
m_{yi}^J(x,y) &= \sum_m \sum_n b_n^{iJ} c_{mn}^{iJ} X_{mn}^{II}(x) \cos\frac{n\pi}{b} y,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

gdzie a_n^{iJ} — oznacza współczynniki sinusowych szeregów opisujących $g_i^J(y)$, b_n^{iJ} — współczynniki consinusowych szeregów opisujących funkcje $G_i^J(y)$.

Ze względu na szczególną budowę funkcji obciążenia (3.2) można wykazać istnienie związków:

$$
\begin{aligned}
\sum_s c_{sn}^{iJ} X_{sn}(x) &= \sum_s c_{sr}^{iJ} X_{sr}(x),\\
\sum_s c_{sn}^{iJ} X_{sn}^I(x) &= \sum_s c_{sr}^{iJ} X_{sr}^I(x),\\
\sum_s c_{sn}^{iJ} X_{sn}^{II}(x) &= \sum_s c_{sr}^{iJ} X_{sr}^{II}(x).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Mnożąc pierwszy ze związków (3.5) przez $hX_{kn}\sin^2\frac{n\pi}{b}y$, drugi przez $\frac{h^3}{12}X_{kn}^I\sin^2\frac{n\pi}{b}y$, ostatni przez $\frac{h^3}{12}X_{kn}^{II}\cos^2\frac{n\pi}{b}y$, sumując je stronami, a następnie całkując obie strony powstałej równości po obszarze płyty zastępczej otrzymuje się zależności:

$$
c_{kn}^{iJ} = u_{kn} \sum_s c_{sr}^{iJ} b_{kn}^s, \tag{3.6}
$$

gdzie:

$$u_{kn} = \frac{1}{\iint \left[hW_{kn}^2 + \frac{h^3}{12}(\psi_{xkn}^2 + \psi_{ykn}^2)\right] dx\,dy},$$

$$b_{kn}^s = \iint \left[\left(hX_{sr}X_{kn} + \frac{h^3}{12}X_{sr}^I X_{kn}^I\right)\sin^2\frac{n\pi}{b}y + \frac{h^3}{12}X_{sr}^{II}X_{kn}^{II}\cos^2\frac{n\pi}{b}y\right]dx\,dy.$$

Związki (3.6) pozwalają wyrazić współczynniki c_{kn}^{iJ} przy $n \neq r$ przez c_{kr}^{iJ}. Obciążenie (3.2) wywołuje odkształcenie płyty, które zapisać można następująco:

$$
\begin{aligned}
w_i^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} W_{mn}(x, y),\\
\psi_{xi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} \psi_{mn}(x, y), \qquad (3.7)\\
\psi_{yi}^J(x, y) &= \sum_m \sum_n h_{mn}^{iJ} \psi_{mn}(x, y).
\end{aligned}
$$

Podstawiając (3.4) i (3.7) do równań drgań wymuszonych, wykorzystując warunek ortogonalności, otrzymać można związki:

$$h_{mn}^{iJ} = \frac{u_{mn}}{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \sum_k c_{kn}^{iJ} t_{mn}^{iJk}, \qquad (3.8)$$

gdzie

$$t_{mn}^{iJk} = \frac{1}{\varrho} \iint [a_n^{iJ}(W_{kn}W_{mn} + \psi_{xkn}\psi_{xmn}) + b_n^{iJ}\psi_{ykn}\psi_{ymn}]\,dx\,dy.$$

Podstawiając do równań opisujących warunki brzegu swobodnego dla $y = c$ funkcje odkształceń opisane zależnościami (3.7), (3.8) i ortogonalizując wyrażenia stojące po lewej stronie otrzymanych równań względem $X_{jr}(x)$ otrzymuje się po uwzględnieniu (3.6) równania:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \sum_{J}^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{iJs} q_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iJl} q_{mn}^j\right] = 0,\\
&\sum_{i=1}^{3} \sum_{J}^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{iJs} r_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iJl} r_{mn}^j\right] = 0, \qquad (3.9)\\
&\sum_{i=1}^{3} \sum_{J}^{I,III} \sum_s c_{sr}^{iJ} \left[\sum_m \frac{u_{mr}}{k^2 - k_{mr}^2} t_{mr}^{iJs} s_{mr}^j + \sum_m \sum_{n \neq r} \frac{u_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} \sum_l b_{ln}^s u_{ln} t_{mn}^{iJl} s_{mn}^j\right] = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie:

$$q^j_{mn} = \left[-\frac{n\pi}{b}\int\limits_0^a X^{II}_{mn}X_{jr}dx + \nu\int\limits_0^a (X^I_{mn})'X_{jr}dx\right]\sin\frac{n\pi}{b}c,$$

$$r^j_{mn} = \left[\frac{n\pi}{b}\int\limits_0^a X_{mn}X_{jr}dx + \int\limits_0^a X^{II}_{mn}X_{jr}dx\right]\cos\frac{n\pi}{b}c,$$

$$s^j_{mn} = \left[\int\limits_0^a (X^{II}_{mn})'X_{jr}dx + \frac{n\pi}{b}\int\limits_0^a X^I_{mn}X_{jr}dx\right]\cos\frac{n\pi}{b}c.$$

Warunkiem, który pozwoli uprościć układ równań (3.9) doprowadzając do równości $c^{iI}_{sr} = c^{iIII}_{sr}$ oraz usunie konieczność spełnienia warunków brzegowych dla $y = b-c$ jest w przypadku postaci symetrycznych dobór obciążeń $q^J(x, y)$, $m^J_x(x, y)$ symetrycznych względem $y = \frac{b}{2}$, co sprowadza się do równości:

$$g^I_i(y) = g^{III}_i(b-y),$$

oraz antysymetrycznych obciążeń $m^J_{yi}(x, y)$:

$$G^I_i(y) = -G^{III}_i(b-y).$$

W przypadku postaci antysymetrycznych należy spełnić:

$$g^I_i(y) = -g^{III}_i(b-y),$$
$$G^I_i(y) = G^{III}_i(b-y).$$

Ograniczając liczbę wyrazów szeregów

$$l = j = s = m \leqslant L,$$
$$n \leqslant N,$$

otrzymuje się układ $3L$ równań.

Równanie częstości wynika z warunku istnienia nietrywialnego rozwiązania.

Znaczne uproszczenie obliczeń można osiągnąć przy takiej konstrukcji funkcji $g^J_i(y)$ i $G^J_i(y)$, która doprowadziłaby do równości współczynników $a^{iJ}_n = b^{iJ}_n$. Przyjęcie obciążenia w postaci:

$$\begin{aligned} q^J_i(x, y) &= h\sum_m\sum_n a^{iJ}_n c^{iJ}_{mn} W_{mn}(x, y),\\ m^J_{xi}(x, y) &= \frac{h^3}{12}\sum_m\sum_n a^{iJ}_n c^{iJ}_{mn}\psi_{xmn}(x, y),\\ m^J_{yi}(x, y) &= \frac{h^3}{12}\sum_m\sum_n a^{iJ}_n c^{iJ}_{mn}\psi_{ymn}(x, y)\end{aligned} \tag{3.10}$$

upraszcza związki (3.8) do postaci:

$$h^{iJ}_{mn} = \frac{1}{\varrho(\omega^2-\omega^2_{mn})} a^{iJ}_n c^{iJ}_{mn}. \tag{3.11}$$

Ponieważ w tym przypadku współczynniki h_{mn}^{ij} nie wyrażają się przez wszystkie współczynniki c_{kn}^{ij} $k = 1, 2, 3 \ldots$, jak w przypadku związków (3.8), należy sądzić, że oprócz uproszczenia obliczeń, można tą drogą zwiększyć zbieżność szeregów opisujących odkształcenia płyty.

4. Uwagi końcowe

Stosowanie proponowanej metody wymaga znajomości częstości i postaci drgań własnych płyt zastępczych lub ich uprzedniego obliczenia. Natomiast jej zaletą jest możliwość efektywnego zwiększenia zbieżności szeregów opisujących poszukiwane odkształcenia oraz siły wewnętrzne.

Literatura cytowana w tekście

1. W. MIERZEJEWSKI, *Rozwiązywanie problemów dynamiki płyt prostokątnych w oparciu o zmodyfikowaną metodę sił Nowackiego*, Mech. Teor. i Stos., 1, **14** (1976).
2. R. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates*, J. Appl. Mech., 1, **18** (1951).
3. R. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, A. SHACKNOW, *Flexural vibrations of rectangular plates*, J. Appl. Mech. 3, **23** (1956).
4. E. BIELEWICZ, L. DZIEMIDOWICZ-TKACZ, *Pewna metoda numeryczna w teorii płyt grubych*, II Konferencja «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji», Gdańsk 1975.

Р е з ю м е

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СИЛ НОВАЦКОГО В ДИНАМИКЕ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ

В работе представлено применение метода сил Новацкого к проблеме собственных колебаний консольной пластины. Этот метод можно применять к решению динамических задач для прямоугольных пластин с различными краевыми условиями. Преимуществом метода является возможность эффективного увеличения сходимости рядов, определяющих искомые усилия.

S u m m a r y

THE MODIFIED NOWACKI METHOD IN DYNAMICS OF PLATES, THE INFLUENCE OF SHEARING FORCES AND THE ROTARY INERTIA BEING TAKEN INTO ACCOUNT

This paper presents the application of the modified method of Nowacki to solving the boundary-value problem of a cantilever plate, account being taken of the shearing forces and rotary inertia. This method can be used in dynamic problems of rectangular plates with arbitrary boundary conditions. Advantage of this method consists in the possibility of increasing the convergence of the series for the displacements and internal stresses.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ
I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lutego 1976 r.