MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 14 (1976)

TWIERDZENIE WZAJEMNE I FUNKCJA GREENA DLA UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z LOSOWYM WYMUSZENIEM

HENRYK WALUKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W pracy [4b] sformułowaliśmy i udowodniliśmy twierdzenie wzajemne (typu twierdzenia Bettiego w teorii sprężystości) w zakresie dwóch pierwszych momentów dla zagadnienia stacjonarnego:

$$E\{F(t)\}^{T(1)}E\{Y(t)\}^{(2)} = E\{F(t)\}^{T(2)}E\{Y(t)\}^{(1)}, \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{K_{kk}^{(F)}(s)\}^{T(1)}\{K_{kk}^{(Y)}(\tau-s)\}^{(2)}ds = \int_{-\infty}^{\infty} \{K_{kk}^{(F)}(s)\}^{T(2)}\{K_{kk}^{(Y)}(\tau-s)\}^{(1)}ds. \tag{1.2}$$

Wskaźniki (1) i (2) oznaczają dwa układy przyczyn i skutków.

Twierdzenie (1.2) dotyczy funkcji autokorelacyjnych losowych obciążeń $\{F(t)\}$ i losowych przemieszczeń $\{Y(t)\}$ dla układów o n stopniach swobody. Istotnym założeniem twierdzenia (1.2) było, że obciążenia działające na układ są nieskorelowane, tzn. $K_{kl}^{(F)}(\tau) = 0$ dla $k \neq l$. Następnie wykazaliśmy, że w przypadku obciążeń skorelowanych można zawsze za pomocą transformacji podobieństwa przejść do takich współrzędnych sił i przemieszczeń, że dla przetransformowanych funkcji autokorelacyjnych zachodzi twierdzenie (1.2).

W przypadku obciążeń dowolnie skorelowanych istniała jednak zasadnicza trudność teoretyczna: nie można było wprowadzić pojęcia funkcji Greena dla funkcji autokorelacyjnych reakcji układu.

Obecnie wszystkie trudności zostały pokonane. Sformułujemy twierdzenie wzajemne dla momentów drugiego rzędu i obciążeń dowolnie skorelowanych. Twierdzenie (1.2) wyniknie wówczas jako przypadek szczególny. Wprowadzimy pojęcie funkcji Greena w tym ogólnym przypadku. Wykażemy wreszcie, że dla obciążeń o zdeterminowanej częstości nasze twierdzenie przechodzi ściśle w dobrze znaną postać twierdzenia Mexwella-Betti dla harmonicznych drgań wymuszonych. Dla wykonania powyższego planu musimy ednak nieco rozszerzyć aparat matematyczny stosowany w [4b].

2. Iloczyn wewnętrzny w przestrzeni macierzy zespolonych

Wiadomo, że zbiór przekształceń liniowych pewnej przestrzeni wektorowej może być sam uważany za przestrzeń wektorową [1, s. 197]. Ponieważ macierze gęstości widmowych są, ogólnie biorąc, zespolone, wprowadzimy iloczyn wewnętrzny w przestrzeni n^2-wymiarowej zespolonej za pomocą wzoru

$$\langle [A], [B] \rangle \overset{\text{df}}{=} \operatorname{tr}([A]^*[B]), \tag{2.1}$$

gdzie $[A]$ i $[B]$ są kwadratowymi macierzami o wymiarze $n \times n$, o elementach zespolonych. Nawiasy łamane oznaczają iloczyn wewnętrzny, tr(...) oznacza ślad macierzy, gwiazdka zaś macierz zespoloną sprzężoną, transponowaną, tzn. $[A]^* = [\overline{A}]^T$.

Musimy przede wszystkim sprawdzić, czy (2.1) spełnia znane [1,s.139] aksjomaty iloczynu wewnętrznego. Należy zaznaczyć, że w literaturze spotyka się pewne różnice przy formułowaniu tych aksjomatów. Stąd wynika konieczność podawania obok definicji aksjomatów

1) $$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$$

2) $$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle:$$

3) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ dla każdego x; $\langle x, x \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

x, y, z są tutaj dowolnymi elementami zespolonej przestrzeni wektorowej; α i β są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Sprawdzimy aksjomat 1):

$$\langle [A], [B] \rangle = \operatorname{tr}([A]^*[B]) = \operatorname{tr}([\mathrm{B}]^T[\overline{A}]) = \overline{\operatorname{tr}([B]^*[A])} = \overline{\langle [B], [A] \rangle}; \text{ c.b.d.o.}$$

Dla aksjomatu 2) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\langle \alpha[A] + \beta[B], [C] \rangle = \operatorname{tr}\big((\overline{\alpha}[A]^* + \overline{\beta}[B]^*)[C]\big) = \\ = \operatorname{tr}(\overline{\alpha}[A]^*[C] + \overline{\beta}[B]^*[C]) = \overline{\alpha} \operatorname{tr}([A]^*[C]) + \\ + \overline{\beta} \operatorname{tr}([B]^*[C]) = \overline{\alpha} \langle [A], [C] \rangle + \overline{\beta} \langle [B], [C] \rangle; \text{ c.b.d.o.}\end{aligned}$$

W przypadku aksjomatu 3) otrzymamy:

$$\langle [A], [A] \rangle = \operatorname{tr}([A]^*[A]) = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{n1}|^2 + \ldots + |a_{nn}|^2 \geqslant 0; \text{ c.b.d.o.}$$

W powyższych przekształceniach wykorzystano znane zależności; niektóre z nich będą potrzebne w dalszym ciągu:

$$\operatorname{tr}([A] = \operatorname{tr}([A]^T); \quad \operatorname{tr}([\overline{A}]) = \overline{\operatorname{tr}([\mathrm{A}])}; \quad \operatorname{tr}([A] + [B]) = \operatorname{tr}([A]) + \operatorname{tr}([B]);$$
$$\operatorname{tr}(\alpha[A]) = \alpha \operatorname{tr}([A]).$$

Kreski pionowe oznaczają moduły odpowiednich elementów macierzowych.

3. Twierdzenie wzajemne dla funkcji korelacyjnych

Podstawową zależność pomiędzy macierzami gęstości widmowych na wejściu i wyjściu układu przyjmiemy w postaci [2, s. 158]

$$[G^{(Y)}(\omega)] = [H(\omega)]\,[G^{(F)}(\omega)][H(\omega)]^*, \tag{3.1}$$

gdzie deterministyczna macierz funkcji przenoszenia $[H(\omega)]$ opisuje układ

$$(3.2)\qquad [H(\omega)] = (-\omega^2[M]+i\omega[C]+[K])^{-1},$$

natomiast $[M]$, $[C]$, $[K]$ są, odpowiednio, macierzami bezwładności, tłumienia i sztywności, a ω jest częstością kątową.

Funkcje korelacyjne i gęstości widmowe są, jak wiadomo, związane parą transformat Fouriera:

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} [K^{(F)}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [G^{(F)}(\omega)]\exp(i\omega\tau)d\omega, \\ [G^{(F)}(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [K^{(F)}(\tau)]\exp(-i\omega\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Twierdzenie. Jeżeli macierz funkcji przenoszenia $[H(\omega)]$ jest symetryczna ze spolona, to

$$(3.4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(1)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^2\rangle ds = \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(2)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)}\rangle ds.$$

Dowód. Założenie oznacza, że $[H] = [H]^T$ i $[\overline{H}] = [H]^*$. Utworzymy iloczyn wewnętrzny $\langle \overline{[G^{(F)}]}^{(1)}, [G^{(Y)}]^{(2)}\rangle$ i wykorzystamy kolejno definicję (2.1), założenie, własność śladu macierzy transponowanej oraz własność dla dowolnych macierzy $n\times n$:

$$\mathrm{tr}([A]\,[B]\,[C]\,[D]) = \mathrm{tr}([B]\,[C]\,[D]\,[A]),$$

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} \langle \overline{[G^{(F)}]}^{(1)}, [G^{(Y)}]^{(2)}\rangle &= \mathrm{tr}([G^{(F)}]^{(1)T}[H][G^{(F)}]^{(2)}[H]^*) = \\ &= \mathrm{tr}([G^{(F)}]^{(1)T}[H]^T[G^{(F)}]^{(2)}[\overline{H}]) = \mathrm{tr}([H]^*[G^{(F)}]^{(2)T}[H][G]^{(1)}) = \\ &= \mathrm{tr}([G^{(F)}]^{(2)T}[H][G^{(F)}]^{(1)}[H]^*) = \langle \overline{[G^{(F)}]}^{(2)}, [G^{(Y)}]^{(1)}\rangle. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zależność (3.5) ma charakter twierdzenia wzajemnego dla macierzy gęstości widmowych. Zapiszemy (3.5) w postaci rozwiniętej

$$(3.6)\qquad G_{11}^{(F)(1)}G_{11}^{(Y)(2)}+G_{12}^{(F)(1)}G_{12}^{(Y)(2)}+\ldots+G_{n1}^{(F)(1)}G_{n1}^{(Y)(2)}+\ldots+G_{nn}^{(F)(1)}G_{nn}^{(Y)(2)} = |(1) \rightleftarrows (2).$$

Symbol po prawej stronie równości w (3.6) oznacza przestawienie indeksów (1) i (2).

Wykonujemy teraz na (3.6) odwrotną zespoloną transformację Fouriera i korzystamy z twierdzenia o splocie. Mamy zatem

$$(3.7)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \big(K_{11}^{(F)(1)}(s)K_{11}^{(Y)(2)}(\tau-s)+K_{12}^{(F)(1)}(s)K_{12}^{(Y)(2)}(\tau-s)+\ldots$$
$$+K_{n1}^{(F)(1)}(s)K_{n1}^{(Y)(2)}(\tau-s)+\ldots+K_{nn}^{(F)(1)}(s)K_{nn}^{(Y)(2)}(\tau-s)\big)ds = |(1) \rightleftarrows (2).$$

Stąd otrzymujemy już tezę twierdzenia (3.4), c.b.d.o.

Jeżeli założymy, że $K_{kl}^{(F)} = 0$ dla $k \neq l$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, to w równaniu (3.7) pozostaną tylko wyrazy o dwóch indeksach identycznych (autokorelacje) i (3.7) przechodzi dokładnie w twierdzenie (1.2).

4. Funkcja Greena

Wprowadzając funkcję Greena uczynimy twierdzenie (3.4) podstawą rozwiązywania problemów dynamicznych w zakresie funkcji korelacyjnych.

Niech obciążenie zewnętrzne działające w i-tym stopniu swobody posiada funkcję korelacyjną w postaci delty Diraca $\delta(\tau)$:

$$K_{ii}^{(F)}(\tau) = 2\pi C\delta(\tau), \quad (C = \text{const}, \ C > 0);$$

zakładamy przy tym, że pozostałe funkcje korelacyjne obciążeń są równe zeru. Oznaczając ten stan obciążeń wskaźnikiem (1), otrzymamy z (3.4) po zmianie argumentu

$$(4.1) \qquad K_{ii}^{(Y)(2)}(\tau) = \frac{1}{2\pi C}\int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(2)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)}\rangle ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Macierz $[K^{(Y)}(\tau-s)]^{(1)}$ nazwiemy funkcją Greena dla funkcji autokorelacyjnych reakcji układu.

Możemy więc sformułować ważne stwierdzenie. Znajomość rozwiązania dla białego szumu pozwala wyznaczyć ze wzoru (4.1) funkcję korelacyjną reakcji dla dowolnego obciążenia (o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa).

Wniosek ten, według posiadanych przez nas informacji, jest nowy[1]. Wprowadzona funkcja Greena jest na ogół niesymetryczna, spełnia natomiast warunek

$$(4.2) \qquad [K^{(Y)}(\tau-s)] = [K^{(Y)}(s-\tau)]^T.$$

5. Przypadki szczególne

Przyjmiemy obciążenie zewnętrzne w postaci

$$(5.1) \qquad \{F(t)\} = \{f\}\cos(\omega_0 t+\Psi),$$

gdzie $\{f\}$ jest deterministycznym (rzeczywistym) wektorem amplitud, ω_0 ustaloną częstością, a Ψ jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[-\pi, +\pi]$. Taki proces wektorowy jest stacjonarny i ergodyczny względem wartości przeciętnej i funkcji korelacyjnych (por. [3, s. 120]).

Na podstawie realizacji procesu wyznaczymy funkcje korelacyjne (ψ jest wartością zmiennej losowej Ψ):

$$(5.2) \qquad K_{kl}^{(F)}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_k\cos(\omega_0 t+\psi)f_l\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\psi)dt = \frac{1}{2}f_kf_l\cos(\omega_0\tau).$$

Macierz funkcji korelacyjnych przyjmie zatem postać

$$(5.3) \qquad [K^{(F)}(\tau)] = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)\begin{bmatrix} f_1^2, f_1f_2, \cdots f_1f_n \\ f_2f_1, f_2^2, \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ f_nf_1, \ \ldots, & f_n^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\{f\}\{f\}^T\cos(\omega_0\tau).$$

[1] Uwaga dotyczy układów zdeterminowanych z losowymi wymuszeniami. W innych zagadnieniach dynamiki statystycznej (np. w teorii ośrodków statystycznie niejednorodnych) znane są koncepcje stochastycznych funkcji Greena.

Znajdziemy teraz macierz korelacyjną reakcji, na podstawie relacji analogicznej do (3.3)

$$(5.4)\qquad [K^{(Y)}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} [G^{(Y)}(\omega)]\exp(i\omega\tau)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega)][G^{(F)}(\omega)][H(\omega)]^* \exp(i\omega\tau)d\omega.$$

Ze wzoru (3.3) i (5.3) otrzymamy macierz gęstości widmowych obciążeń

$$(5.5)\qquad [G^{(F)}(\omega)] = \frac{1}{4}\{f\}\{f\}^T\big(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\big),$$

gdzie $\delta(\ldots)$ oznacza deltę Diraca.

Podstawiając (5.5) do (5.4) otrzymamy

$$(5.6)\qquad [K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4}\big([H(-\omega_0)]\{f\}\{f\}^T[H(-\omega_0)]^*\exp(-i\omega_0\tau)+ + [H(\omega_0)]\{f\}\{f\}^T[H(\omega_0)]^*\exp(i\omega_0\tau)\big).$$

Zauważmy, że

$$[H(-\omega_0)] = [\overline{H(\omega_0)}] = [H(\omega_0)]^*,$$

oraz

$$[H(-\omega_0)]^* = [H(\omega_0)]^T = [H(\omega_0)].$$

Wynika to ze wzoru (3.2), przy wykorzystaniu założenia o symetrii $[H(\omega)]$.

Rozpatrzmy przede wszystkim przypadek statyczny, tzn. $\omega_0 = 0$. Wówczas $[H(\omega_0)] = [H(\omega_0)]^* = [K]^{-1}$ (wzór 3.2). Pamiętając, że $[K]^{-1}\{f\} = \{y\}$, gdzie $\{y\}$ jest wektorem przemieszczeń (niezależnym od czasu), możemy wyznaczyć macierz korelacyjną (5.6)

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2}[K]^{-1}\{f\}\{f\}^T[K]^{-1} = \frac{1}{2}\{y\}\{y\}^T,$$

przy czym wykorzystano symetrię macierzy sztywności $[K]$. Widoczne jest, że macierz korelacyjna nie zależy od τ. Podstawiamy powyższą macierz do związku (3.4):

$$(5.7)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \langle [K^{(F)}(s)]^{(1)}, [K^{(Y)}(\tau-s)]^{(2)}\rangle ds = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \{f\}^{(1)}\{f\}^{T(1)}, \{y\}^{(2)}\{y\}^{T(2)}\rangle ds =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle \begin{bmatrix} f_1^{2(1)}, f_1^{(1)}f_2^{(1)}, & \ldots & f_1^{(1)}f_n^{(1)} \\ f_2^{(1)}f_1^{(1)}, f_2^{2(1)}, & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ f_n^{(1)}f_1^{(1)} & \ldots & f_n^{2(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1^{2(2)}, y_1^{(2)}y_2^{(2)}, & \ldots & y_1^{(2)}y_n^{(2)} \\ y_2^{(2)}y_1^{(2)}, y_2^{2(2)}, & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ y_n^{(2)}y_1^{(2)}, & \ldots & y_n^{2(2)} \end{bmatrix}\right\rangle ds =$$

$$= \frac{1}{4}(f_1^{2(1)}y_1^{2(2)}+f_1^{(1)}f_2^{(1)}y_1^{(2)}y_2^{(2)}+\ldots+f_n^{(1)}f_1^{(1)}y_n^{(2)}y_1^{(2)}+\ldots$$

$$+f_n^{2(1)}f_n^{2(2)})\int_{-\infty}^{\infty} ds = \frac{1}{4}(f_1^{(1)}y_1^{(2)}+f_2^{(1)}y_2^{(2)}+\ldots+f_n^{(1)}y_n^{(2)})^2 2\pi\delta(0) = |(1) \rightleftarrows (2).$$

W ostatnim przekształceniu powyższego wzoru wykorzystano zależność znaną z kombinatoryki

$$(a_1+a_2+\ldots+a_s)^2 = \sum \frac{2}{k_1!k_2!\ldots k_s!} a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_s^{k_s},$$

gdzie $k_1+k_2+\ldots k_s = 2$ oraz $k_i = 0, 1, 2$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Całkę $\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds$ zastąpiono symbolem $2\pi\delta(0)$. Obie strony (5.7) scałkujemy, uwzględniając, że

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(0)dx = 1.$$

Mnożąc z kolei obustronnie (5.7) przez stałą $2/\pi$ i wyciągając pierwiastek, otrzymamy

$$\{f\}^{(1)T}\{y\}^{(2)} = \{f\}^{(2)T}\{y\}^{(1)}. \tag{5.8}$$

Otrzymaliśmy więc znaną ze statyki postać twierdzenia Maxwella-Betti.

Powrócimy teraz do wzoru (5.6), który przepiszemy w postaci

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4}\big([\overline{H(\omega_0)}]\{f\}\{f\}^T[H(\omega_0)]^T\exp(-i\omega_0\tau)+ + [H(\omega_0)]\{f\}\{f\}^T[H(\omega_0)]^*\exp(i\omega_0\tau)\big). \tag{5.9}$$

Wprowadzimy oznaczenie:

$$[N] = [\overline{H(\omega_0)}]\{f\}\{f\}^T[H(\omega_0)]^T. \tag{5.10}$$

Wówczas (5.9) możemy zapisać w formie skróconej

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{4}\big([N]\exp(-i\omega_0\tau)+[\overline{N}]\exp(i\omega\tau)\big) = = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}[N]\cos(\omega_0\tau)+\mathrm{Im}[N]\sin(\omega_0\tau)\big). \tag{5.11}$$

Jeżeli

$$\mathrm{Im}[N] = [0], \tag{5.12}$$

to

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[N]\cos(\omega_0\tau). \tag{5.13}$$

Fakt ten ma dobre uzasadnienie w deterministycznej teorii drgań wymuszonych układów z tłumieniem lepkim. Wiadomo bowiem, że przy wymuszeniu typu (5.1) reakcje układu opisanego macierzą (3.2) są nie tylko przesunięte w fazie z wymuszeniem, ale również nie są w fazie między sobą, np.

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1\cos(\omega_0 t+\theta_1) \\ y_2\cos(\omega_0 t+\theta_2) \\ \vdots \\ y_n\cos(\omega_0 t+\theta_n) \end{Bmatrix}. \tag{5.14}$$

Stąd, jak łatwo sprawdzić, otrzymalibyśmy ze wzoru typu (5.2):

$$K_{kl}^{(Y)}(\tau) = \frac{1}{2} y_k y_l \cos(\omega_0 \tau + \theta_l - \theta_k) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.15}$$

Występowanie przesunięcia fazowego w (5.15) jest zgodne ze wzorem (5.11). Otrzymaliśmy zatem interesujący wniosek: aby składowe reakcji były między sobą w fazie musi być spełniony warunek (5.12).

Przejdziemy do wyprowadzenia twierdzenia wzajemnego dla tego przypadku;

$[N]$ jest teraz rzeczywiste, tzn.

$$[N] = [\overline{N}] = [H(\omega_0)]\{f\}\{f\}^T[H(\omega_0)]^*.$$

Oznaczając

$$[H(\omega_0)]\{f\} = \{\hat{y}\}, \tag{5.16}$$

gdzie $\{\hat{y}\}$ jest zespolonym wektorem amplitud ($[H(\omega_0)]$ — zespolone, $\{f\}$ — rzeczywiste), otrzymamy

$$[K^{(Y)}(\tau)] = \frac{1}{2}\{\hat{y}\}\{\hat{y}\}^* \cos(\omega_0 \tau). \tag{5.17}$$

Przekształcenia analogiczne do wykonywanych we wzorze (5.7) doprowadzą nas do zależności

$$\{f\}^{(1)T}\{\hat{y}\}^{(2)}\{f\}^{(1)T}\{\bar{\hat{y}}\}^{(2)} = \{f\}^{(2)T}\{\hat{y}\}^{(1)}\{f\}^{(2)T}\{\bar{\hat{y}}\}^{(1)}. \tag{5.18}$$

Załóżmy teraz, że macierz tłumienia $[C] \to [0]$. Wówczas ze wzoru (5.16) wynika, że

$$\{\hat{y}\} = \{y\},$$

gdzie $\{y\}$ jest rzeczywistym wektorem amplitud. Ponieważ teraz $\{\bar{\hat{y}}\} = \{y\}$, zależność (5.18) przechodzi w

$$(\{f\}^{(1)T}\{y\}^{(2)})^2 = (\{f\}^{(2)T}\{y\}^{(1)})^2. \tag{5.19}$$

Wyciągając obustronnie pierwiastek otrzymujemy twierdzenie wzajemne dla amplitud w zagadnieniu drgań harmonicznych. Trzeba jednak zauważyć, że w przypadku $[C] = [0]$ traci sens metoda widmowa, na której opiera się wyprowadzenie twierdzenia (3.4). Układ traci bowiem własność asymptotycznej stabilności [3].

Z rozważań zawartych w p. 5 można wyciągnąć wniosek metodologiczny. Podejście probabilistyczne do zagadnienia relacji wzajemnej w zagadnieniu stacjonarnym dało prosty wynik — wzór (3.4). Próba formułowania podobnych zależności przy podejściu deterministycznym wydaje się beznadziejna. Wskazuje na to relacja (5.18) (uzyskana ponadto przy silnym ograniczeniu (5.12)).

6. Uwagi końcowe

Przedstawione rezultaty mają, naszym zdaniem, nie tylko wartość metodologiczną. Mamy tu do czynienia z pewnym nowym elementem: relacją wzajemną na losowym (makroskopowym) poziomie rzeczywistości. Twierdzenia (3.4) i (1.1) mogą być łatwo sprawdzone eksperymentalnie.

Podziękowanie

Panu prof. dr hab. inż. EUGENIUSZOWI BIELEWICZOWI, mojemu promotorowi, składam serdeczne podziękowanie za cenne uwagi i sugestie.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BYRON, R. FULLER, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, tom 1, PWN, Warszawa, 1973, (tłum. z ang.).
2. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill, 1967.
3. K. SOBCZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.
4. H. WALUKIEWICZ, a) *An algebraic solution of wind effects on structures problem and reciprocal theorem for random wind load*, Proc. of 2nd U. S. Conference on Wind Engineering, Colorado State University 1975; b) *Reciprocal theorem for discrete systems with random excitations*, Jour. of Techn. Physics, 3 (1976).

Р е з ю м е

ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ И ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

В работе сформулированы и доказаны теоремы о взаимности (типа теоремы Бетти) для случайной, стационарной задачи в пределах двух первых моментов. На основании этих соотношений, введено понятие функции Грина для автокорреляционных функций выходного процесса (при случайных процессах на входе). В работе обобщаются результаты, доказанные в [4б].

S u m m a r y

RECIPROCAL THEOREM AND GREEN'S FUNCTION FOR DISCRETE SYSTEMS WITH RANDOM EXCITATIONS

The paper is dealing with the derivation and proofs of reciprocal Betti type theorems for random problems of stationary type, within the scope of the first- and second-order moments. On the basis of these relations, the notion of Green function for autocorrelation with respect to the system response, for the random excitation problem have been introduced. In the paper the author discusses a generalization for the results of the work [4b].

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1976 r.