MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 14 (1976)

O OPERATOROWYM PODEJŚCIU DO FORMUŁOWANIA ZASAD WARIACYJNYCH DLA OŚRODKÓW PLASTYCZNYCH

JÓZEF JOACHIM TELEGA (RADOM)

1. Wstęp

W ostatnich latach ukazały się prace, w których konsekwentnie zastosowano operatorowe podejście do zagadnień wariacyjnych mechaniki i fizyki matematycznej [1 - 4]. Sformułowano również dualne zasady ekstremalne, co jest bardzo istotne w zastosowaniach, gdyż pozwala oszacować rozwiązania.

W niniejszej pracy przedstawimy możliwości zastosowania metody zaproponowanej przez SEWELLA [3] do: 1) przyrostowych zagadnień brzegowych dla ośrodka sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem geometrycznej nieliniowości, 2) płaskiego stanu odkształcenia sztywno-idealnie plastycznego ośrodka ściśliwego o niestowarzyszonym prawie płynięcia.

W części drugiej omówimy istotę tzw. swobodnej zasady wariacyjnej, zaproponowanej przez SEWELLA [3]. Podstawowe równania sprężysto-plastycznego ośrodka ze wzmocnieniem, przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości, podane zostały w części trzeciej. Zasady ekstremalne dla tego ośrodka podane zostały w części czwartej. W części piątej podane zostały podstawowe równania płaskiego stanu odkształcenia ośrodków plastycznych o niestowarzyszonym prawie płynięcia, w części zaś szóstej sformułowano zasadę minimum dla tego typu ośrodków.

2. Swobodna zasada wariacyjna

SEWELL [3] operuje pojęciem *swobodnej zasady wariacyjnej*, która jest wygodnym formalizmem, pozwalającym formułować zasady wariacyjne dla operatorów potencjalnych. Podamy obecnie te elementy teorii SEWELLA, które wykorzystamy w części czwartej i szóstej.

2.1. Niech E, F będą przestrzeniami prehilbertowskimi z iloczynami skalarnymi oznaczonymi odpowiednio przez $(,)$, $\langle,\rangle$. Niech E', F' będą podprzestrzeniami przestrzeni odpowiednio E, F. Na E' działa operator liniowy $T: E' \to F$. T^* jest operatorem sprzężonym, $T^*: F' \to E$. Operator sprzężony T^* określa się ze związku (por. [5])

$$\forall_{x \in E'}, \forall_{u \in F'} (x, T^*u) = \langle u, Tx \rangle. \tag{2.1}$$

Zakładamy ponadto, że $T^{**} = T$.

Weźmy równania operatorowe

$$T^*u = y, \quad Tx = v, \tag{2.2}$$

gdzie $y \in E$, $v \in F$ są nie określonymi na razie elementami.

Równania (2.2) można zapisać w formalnie macierzowej postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} : E' \times F' \to E \times F.$$

Przestrzeń $E \times F$ jest produktem kartezjańskim przestrzeni E, F. Symbolem $\{,\}$ oznaczamy iloczyn skalarny na $E \times F$. Jeśli

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad A_1, A_2 \in E \times F,$$

to

$$\{A_1, A_2\} = (x_1, x_2) + \langle u_1, u_2 \rangle. \tag{2.4}$$

Pojęcia te można uogólnić na przypadek dowolnej, skończonej liczby przestrzeni.

Istotnym pojęciem będzie dla nas różniczka Gateaux. Niech $f[x]$ będzie funkcjonałem na E', f: $E' \to R$, R — zbiór liczb rzeczywistych. Różniczkę Gateaux określa się następująco:

$$\delta f[x, h] = \frac{d}{d\alpha} f[x + \alpha h]\Big|_{\alpha=0}, \quad h \in E. \tag{2.5}$$

W przypadku, gdy $\delta f[x, h]$ jest — dla ustalonego $x \in E'$ i $h \in E$ — operatorem liniowym i ograniczonym, to

$$\delta f[x, h] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, h\right), \quad h \in E, \tag{2.6}$$

gdzie $\partial f/\partial x$ nosi nazwę gradientu funkcjonału f. Łatwo wykazać, że

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \partial Q / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

gdzie $Q[x, u]$ jest funkcjonałem biliniowym

$$Q[x, u] = \frac{1}{2}[(x, T^*u) + \langle u, Tx \rangle] = (x, T^*u) = \langle u, Tx \rangle.$$

Przedstawienie (2.7) jest możliwe, ponieważ operator liniowy

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{bmatrix}$$

jest operatorem symetrycznym, [4].

W (2.2) elementy y, v były dowolne. Do dalszych rozważań przyjmiemy, że elementy te są określone przez gradient funkcjonału $H[x, u]$, tzn.

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \partial H / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Równania (2.2) mają teraz postać

$$T^* u = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad Tx = \frac{\partial H}{\partial u}. \tag{2.9}$$

Przykładem równań (2.9) są równania Hamiltona mechaniki analitycznej

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Z (2.7) i (2.8) otrzymujemy swobodną zasadę wariacyjną

$$\partial (Q - H) / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0. \tag{2.10}$$

Zależność (2.10) jest równoważna następującym wzorom

$$\delta (Q - H) = 0 \tag{2.11}$$

i

$$\left(T^* u - \frac{\partial H}{\partial x}, \delta x \right) + \left\langle Tx - \frac{\partial H}{\partial u}, \delta u \right\rangle = 0. \tag{2.12}$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$L[x, u] = Q - H. \tag{2.13}$$

Swobodną zasadę wariacyjną można wówczas zapisać następująco

$$\partial L / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \theta \Leftrightarrow \delta L = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \delta x \right) + \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, \delta u \right\rangle = 0, \tag{2.14}$$

gdzie θ jest elementem zerowym przestrzeni $E \times F$.

Swobodna zasada wariacyjna pozostaje słuszna w przypadku, gdy funkcjonał nie jest dany zależnością (2.13).

Rozpatrzmy sens swobodnej zasady wariacyjnej (w pracy [3] wyjaśnienia takiego nie ma). Załóżmy, że dane zagadnienie opisywane jest równaniem operatorowym $P[x, u] = \theta$. Jeśli dla tego zagadnienia można stosować swobodną zasadę wariacyjną, to fakt ten oznacza, iż operator P jest potencjalny, tzn. istnieje funkcjonał L taki, że (por. [5])

$$P[x, u] = \partial L / \partial \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \theta.$$

B-skł — 104

Zapiszmy swobodną zasadę wariacyjną w postaci równań operatorowych

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \theta_E, \tag{2.15a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \theta_F, \tag{2.15b}$$

gdzie θ_E, θ_F są elementami zerowymi odpowiednio w przestrzeniach, E, F.

2.2. Ciekawy jest przypadek, gdy funkcjonał $L[x, u]$ jest funkcjonałem siodłowym, tzn. wklęsłym ze względu na x, a wypukłym ze względu na u. Ścisła definicja brzmi następująco: *funkcjonał L jest funkcjonałem siodłowym, jeżli*

$$L[x_1, u_1] - L[x_2, u_2] - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\bigg|_1, x_1 - x_2\right) - \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}\bigg|_2, u_1 - u_2\right\rangle \geqslant 0, \tag{2.16}$$

gdzie przez $[x_1, u_1] \in E\times F$, $[x_1, u_2] \in E\times F$ oznaczono pary różnych elementów. «Siodłowość» jest słaba lub silna w zależności od tego, czy w (2.16) mamy słabą czy silną nierówność.

Jeśli funkcjonał L jest funkcjonałem siodłowym to słuszne są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2.1. Dowolne rozwiązanie układu równań (2.15) minimalizuje funkcjonał

$$J = L - \left(\frac{\partial L}{\partial x}, x\right) \tag{2.17}$$

w klasie rozwiązań równania (2.15a).

Twierdzenie 2.2. Dowolne rozwiązanie układu równań (2.15) maksymalizuje funkcjonał

$$K = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, u\right\rangle \tag{2.18}$$

w klasie rozwiązań równania (2.15b).

Twierdzenie 2.3.

$$\min J = \max K = L[x^*, u^*],$$

gdzie $[x^*, u^*]$ jest rozwiązaniem równań (2.15).

Twierdzenie 2.4. a) Rozwiązanie ze względu na x jest jednoznaczne, jeśli funkcjonał L jest względem x ściśle wklęsły (w (2.16) mamy silną nierówność, gdy $x_1 \neq x_2$). b) Rozwiązanie ze względu na u jest jednoznaczne, jeśli funkcjonał L jest ściśle wypukły względem u, czyli w (2.16) dla $u_1 \neq u_2$ nierówność jest silna.

Przedstawione powyżej rozważania łatwo uogólnić na przypadek dowolnej, skończonej liczby przestrzeni z iloczynami skalarnymi. Praktyczne zastosowania podane zostaną w punktach czwartym i szóstym.

Uwaga. Twierdzenia 2.1–2.4 pozostają słuszne i wtedy, gdy równanie (2.15a) zastąpimy trzema warunkami

$$\frac{\partial L}{\partial x} \leqslant \theta_E, \tag{2.19a}$$

$$x \geqslant \theta_E, \tag{2.19b}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}, x\right) = 0, \tag{2.19c}$$

zachowując równanie (2.15b); można również postapić tak: zostawiamy równanie (2.15a), a (2.15b) zastępujemy przez:

$$\frac{\partial L}{\partial u} \geqslant \theta_F, \tag{2.20a}$$

$$u \geqslant \theta_F, \tag{2.20b}$$

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial u}, u \right\rangle = 0. \tag{2.20c}$$

Siodłowość funkcjonału pozwala sformułować dwa ekstremalne twierdzenia dualne. Odbywa się to bez badania drugiej wariacji funkcjonału.

3. Związki podstawowe w opisie Eulera

3.1. Niech ξ^A, $A = 1, 2, 3$, oznacza ustalony, krzywoliniowy układ odniesienia. Współrzędne Lagrange'a względem ξ^A oznaczmy przez a^α, współrzędne Eulera przez x^i; $i, \alpha = 1, 2, 3$. W aktualnej konfiguracji tensory: prędkości odkształceń ε_{ij} i prędkości obrotów ω_{ij} określone są następująco (por. [6]):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}) = \frac{1}{2}(d_{ji}+d_{ij}), \tag{3.1}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i}), \tag{3.2}$$

gdzie $d_{ij} = v_{j,i}$, v_i — współrzędne kowariantne wektora prędkości przemieszczeń, $v_i = v_i(x^k)$; przecinek oznacza różniczkowanie kowariantne względem współrzędnych x^i.

Niech σ^{ij} będzie tensorem naprężenia Eulera, ϱ gęstością ośrodka w konfiguracji odkształconej, a f^j jednostkową siłą masową. Równania równowagi mają postać

$$\sigma^{ij}_{,i}+\varrho f^j = 0. \tag{3.3}$$

Zapiszmy równania te w formie przyrostowej

$$\dot{\sigma}^{ij}_{,i}+\sigma^{ij}_{,i}v^k_{,k}-\sigma^{jk}_{,i}v^i_{,k}+\varrho \dot{f}^j = 0, \tag{3.4}$$

przy czym kropka oznacza pochodną materialną.

Wprowadzając nominalny tensor prędkości naprężenia

$$\dot{s}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij}+\sigma^{ij}v^k_{,k}-\sigma^{jk}v^i_{,k} \tag{3.5}$$

i uwzględniając tę zależność w (3.4) mamy

$$\dot{s}^{ij}_{,i}+\varrho \dot{f}^j = 0. \tag{3.6}$$

Prędkość sił działających na element dS powierzchni ciała odkształconego wynosi wówczas

$$d\dot{P}^j = \dot{F}^j dS = n_i \dot{s}^{ij} dS. \tag{3.7}$$

3.2. Niech τ^{ij} będzie tensorem naprężenia Kirchhoffa odniesionym do konfiguracji aktualnej.

Pochodna Jaumanna tego tensora dana jest wzorem

$$\frac{D\tau^{ij}}{Dt} = \frac{D\sigma^{ij}}{Dt} + \sigma^{ij} v^{k}_{,k}, \tag{3.8}$$

przy czym pochodna Jaumanna tensora naprężenia Eulera ma postać [7]

$$\frac{D\sigma^{ij}}{Dt} = \dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{ik}\omega^{j}_{k} - \sigma^{kj}\omega^{i}_{k}. \tag{3.9}$$

Przyjmujemy równanie konstytutywne podane przez HILLA [8, 9] dla sprężysto-plastycznych ośrodków ze wzmocnieniem, przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości

$$\frac{D\tau^{ij}}{Dt} = K^{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^{p}_{kl}), \tag{3.10}$$

gdzie K^{ijkl} jest tensorem stałych sprężystych, a ε^{p}_{ij} częścią plastyczną tensora prędkości odkształceń, przy czym

$$\varepsilon^{p}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{h} m_{ij} m_{kl} \dfrac{D\tau^{kl}}{Dt}, & \text{gdy} \quad m_{ij}\dfrac{D\tau^{ij}}{Dt} > 0, \\ 0 \quad, & \text{gdy} \quad m_{ij}\dfrac{D\tau^{ij}}{Dt} \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

W ostatniej zależności h jest skalarną funkcją będącą miarą wzmocnienia, zaś m_{ij} oznaczają współrzędne normalnej zewnętrznej do aktualnej powierzchni plastyczności w sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Korzystając z (3.11) można przekształcić (3.10) do postaci

$$\frac{D\tau^{ij}}{Dt} = K^{ijkl}\varepsilon_{kl} - \begin{cases} K^{ijkl} m_{kl} \dfrac{m_{pq}K^{pqrs}\varepsilon_{rs}}{h + m_{pq}K^{pqrs}m_{rs}}, & \text{gdy} \quad m_{ij}\dfrac{D\tau^{ij}}{Dt} > 0, \\ 0 \quad, & \text{gdy} \quad m_{ij}\dfrac{D\tau^{ij}}{Dt} \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Powyższy związek fizyczny można przedstawić w postaci [12]

$$\dot{s}^{ij} = \frac{\partial E(\mathbf{d})}{\partial d_{ij}}, \tag{3.13}$$

gdzie

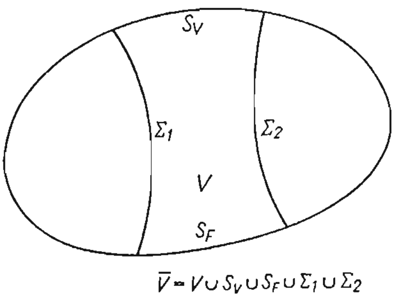
$$E(\mathbf{d}) = \frac{1}{2}\dot{s}^{ij}d_{ij} = \frac{1}{2}\frac{D\tau^{ij}}{Dt}\varepsilon_{ij} - \sigma^{ij}\varepsilon^{k}_{i}\varepsilon_{kj} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}d^{k}_{i}d_{jk}. \tag{3.14}$$

4. Zasada wariacyjna w opisie Eulera

Dla ośrodka, którego równanie konstytutywne podane zostało w punkcie poprzednim, sformułujemy zasadę wariacyjną, będącą analogonem znanej z teorii sprężystości zasady HU-WASHIZU [6, 10]. Zastosujemy aparat przedstawiony w części drugiej.

Niech V będzie obszarem otwartym w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Brzeg tego obszaru składa się z dwóch części: S_v, S_Γ. Do rozważań wprowadzamy dwie powierzchnie nieciągłości: Σ_1, Σ_2 (rys. 1). Symbolem $\overline{V}$ oznaczamy domknięcie obszaru V, czyli $\overline{V}$ to poprostu obszar domknięty reprezentujący ośrodek w konfiguracji aktualnej. Wprowadzamy przestrzeń prehilbertowską E, złożoną z elementów $\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{d} \ldots,$ (tensorów niesymetrycznych). Elementy te mają postać

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{s}^{ij}(x) \\ \dot{s}^{ij}(x) \\ \dot{s}^{ij}(x) \\ \dot{s}^{ij}(x) \\ \dot{s}^{ij}(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in V \\ x \in S_v \\ x \in S_F \\ x \in \Sigma_1 \\ x \in \Sigma_2 \end{matrix}. \tag{4.1}$$



Rys. 1

Zakładamy ponadto, że funkcje $\dot{\mathbf{s}}(x)$, $\mathbf{d}(x), \ldots, x \in \overline{V}$ są całkowalne. Iloczyn skalarny na E definiujemy następująco

$$(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{d}) \stackrel{\text{df}}{=} \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dV + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dS_v + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} dS_F + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} d\Sigma_1 + \int \dot{s}^{ij} d_{ij} d\Sigma_2. \tag{4.2}$$

Przestrzeń F budujemy z elementów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \ldots,$ postaci

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_j(x) \\ v_j(x) \\ v_j(x) \\ v_j(x) \\ v_j(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in V \\ x \in S_v \\ x \in S_F \\ x \in \Sigma_1 \\ x \in \Sigma_2 \end{matrix}. \tag{4.3}$$

Zakładamy, że funkcje $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{w}(x), \ldots, x \in V$ są całkowalne. Wprowadzamy na F iloczyn skalarny

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int v_j w^j dV + \int v_j w^j dS_v + \int v_j w^j dS_F + \int v_j w^j d\Sigma_1 + \int v_j w^j d\Sigma_2. \tag{4.4}$$

Podprzestrzeń E' składa się z tych funkcji $\dot{\mathbf{s}}(x)$, $x \in \overline{V}$, które mają następujące własności (oprócz całkowalności):

1) są jednowartościowe i ciągłe w

$$\overline{V} \setminus \Sigma_2 = V \cup S_v \cup S_F \cup \Sigma_1,$$

2) są nieciągłe na Σ_2, tak że skok na Σ_2 wynosi

$$\dot{s}^{ij}(x) = \lim_{y \to x^+} \dot{s}^{ij}(y) - \lim_{z \to x^-} \dot{s}^{ij}(z), \tag{4.5}$$

gdzie y, $z \in \overline{V} \setminus \Sigma_2$, przy czym y dąży do x od strony Σ_2^+, zaś z — od strony Σ_2^-; Σ_2^+, Σ_2^- oznaczają strony powierzchni Σ_2,

3) funkcje te posiadają w podobszarach obszaru V ciągłe pochodne $\dot{s}^{ij}_{,k}$.

Podprzestrzeń F' tworzą te elementy przestrzeni F, które są:

a) jednowartościowe i ciągłe w

$$\overline{V} \setminus \Sigma_1 = V \cup S_v \cup S_F \cup \Sigma_2;$$

b) nieciągłe na powierzchni Σ_1, przy czym skok na powierzchni Σ_1 wynosi

$$v_j(x) = \lim_{y \to x^+} v_j(y) - \lim_{z \to x^-} v_j(z), \quad y \in \overline{V} \setminus \Sigma_1, \quad z \in \overline{V} \setminus \Sigma_1; \tag{4.6}$$

c) posiadają ciągłe, w podobszarach obszaru V, pochodne $v_{j,k}$.

Wprowadźmy operator T: $E' \to F$ oraz operator sprzężony T^*: $F' \to E$

$$T^*\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{j,i} \\ -n_i v_j \\ 0 \\ -m_i v_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} V \\ S_v \\ S_F, \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{matrix} \qquad T\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} -\dot{s}^{ij}_{,i} \\ 0 \\ n_i \dot{s}^{ij} \\ 0 \\ m_i \dot{s}^{ij} \end{bmatrix} \begin{matrix} V \\ S_v \\ S_F, \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{matrix} \tag{4.7}$$

gdzie $\mathbf{n}(n_i)$ jest wektorem normalnym do $S_v \cup S_F$, zaś $\mathbf{m}(m_i)$ — wektorem normalnym do $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, skierowanym od strony „$-$" do „$+$".

Równanie (2.1) ma teraz postać

$$(\dot{\mathbf{s}}, T^*\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, T\dot{\mathbf{s}} \rangle. \tag{4.8}$$

Po rozpisaniu otrzymujemy

$$\int \dot{s}^{ij} v_{j,i} dV - \int \dot{s}^{ij} n_i v_j dS_v - \int \dot{s}^{ij} m_i v_j d\Sigma_1 = -\int v_j \dot{s}^{ij}_{,i} dV + \\ + \int v_j n_i \dot{s}^{ij} dS_F + \int v_j m_i \dot{s}^{ij} d\Sigma_2. \tag{4.9}$$

Rozpatrzmy operator

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : E' \times F' \times E' \to E \times F \times E,$$

dany związkami

$$T^*\mathbf{v} = \partial H / \partial \dot{\mathbf{s}}, \tag{4.10a}$$

$$T\dot{\mathbf{s}} = \partial H / \partial \mathbf{v}, \tag{4.10b}$$

$$0 = \partial H / \partial \mathbf{d}, \tag{4.10c}$$

gdzie

$$H[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})] = \int [\dot{s}^{ij} d_{ij} - E(\mathbf{d}) - + \varrho \dot{f}^j v_j] dV - \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \\ + \int \dot{F}^{j*} v_j dS_F - \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1 + \int \hat{\dot{F}}^j v_j d\Sigma_2. \tag{4.11}$$

W ostatniej zależności $E(\mathbf{d})$ jest funkcją określoną wzorem (3.14); $\dot{f}^j$, v_j^*, $\dot{F}^j$, h_j, $\hat{\dot{F}}^j$ są danymi wektorami.

Równania (4.10), po uwzględnieniu (4.7), (4.11) przyjmują postać

(4.12) $$v_{j,i} = d_{ij} \quad \text{w } V,$$

(4.13) $$v_j = v_j^* \quad \text{na } S_v,$$

(4.14) $$v_j = h_j \quad \text{na } \Sigma_1,$$

(4.15) $$-\dot{s}^{ij}_{,i} = \varrho \dot{f}^j \quad \text{w } V,$$

(4.16) $$n_i \dot{s}^{ij} = \dot{F}^{j*} \quad \text{na } S_F,$$

(4.17) $$m_i \dot{s}^{ij} = \hat{\dot{F}}^j \quad \text{na } \Sigma_2,$$

(4.18) $$0 = \dot{s}^{ij} - \frac{\partial E}{\partial d_{ij}} \quad \text{w } V.$$

Sens związków (4.12)—(4.18) jest oczywisty i nie wymaga komentarzy.

Zgodnie z zależnością (2.12) budujemy funkcjonał, [11]

(4.19) $$L[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}] = Q - H = (\dot{\mathbf{s}}, T^*\mathbf{v}) - H[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}] = \\ = \int [\dot{s}^{ij}(v_{j,i} - d_{ij}) + E(\mathbf{d}) - \varrho \dot{f}^j v_j] dV + \int \dot{s}^{ij} n_i (v_j^* - v_j) dS_v - \\ - \int \dot{F}^{j*} v_j dS_F + \int \dot{s}^{ij} m_i (h_j - v_j) d\Sigma_1 - \int \hat{\dot{F}}^j v_j d\Sigma_2 .$$

Ze swobodnej zasady wariacyjnej $\delta L = 0$, czyli ze związku [por. (2.13)]

(4.20) $$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}}, \delta \dot{\mathbf{s}}\right) + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \delta \mathbf{v} \right\rangle + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}}, \delta \mathbf{d}\right) = 0$$

otrzymujemy równania (4.12) — (4.18); mówiąc inaczej, równania te są równaniami Eulera dla funkcjonału (4.19).

W rozpatrywanej zasadzie wariacyjnej mamy trzy niezależne pola: $\dot{\mathbf{s}}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{v}$. Problem można zredukować do dwu niezależnych pól. Zgrupujmy w tym celu w (4.19) wyrazy zawierające tensor $\mathbf{d}$ i zastosujmy transformację Legendre'a

(4.21) $$W(\dot{\mathbf{s}}) = \dot{s}^{ij} d_{ij} - E(\mathbf{d}).$$

Funkcjonał (4.19) przechodzi wówczas w

(4.22) $$L_1[\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{v}] = \int [\dot{s}^{ij} v_{j,i} - W(\dot{\mathbf{s}}) - \varrho \dot{f}^j v_j] dV + \int \dot{s}^{ij} n_i (v_j^* - v_j) dS_v - \\ - \int \dot{F}^{j*} v_j dS_F + \int \dot{s}^{ij} m_i (h_j - v_j) d\Sigma_1 - \int \hat{\dot{F}}^j v_j d\Sigma_2 .$$

Funkcjonał typu (4.22) rozpatrywał również NEALE [12], ale bez uwzględnienia nieciągłości.

Powróćmy do funkcjonału (4.19). Załóżmy, że funkcja $E(\mathbf{d})$ jest wypukła. Wówczas funkcjonał L jest funkcjonałem siodłowym, wklęsłym ze względu na $\dot{\mathbf{s}}$ i wypukłym ze względu na $\mathbf{v}$ i $\mathbf{d}$, przy czym zmienne $\mathbf{v}$ i $\mathbf{d}$ traktujemy łącznie. Ściśle rzecz traktując, funkcjonał L jest liniowy względem $\dot{\mathbf{s}}$. Funkcjonał liniowy można traktować jako słabo wklęsły. Warunek na siodłowość funkcjonału przyjmuje postać [por. (2.16)]

(4.23) $$L[\dot{\mathbf{s}}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{d}_1] - L[\dot{\mathbf{s}}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{d}_2] - \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}}\right|_1, \dot{\mathbf{s}}_1 - \dot{\mathbf{s}}_2\right) - \\ - \left\langle \left.\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right|_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \right\rangle - \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}}\right|_2, \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2\right) \geqslant 0.$$

Z twierdzeń 2.1, 2.2 otrzymujemy parę zadań dualnych, co ujmiemy w postaci wniosków:

W n i o s e k 4.1. Dowolne rozwiązanie równania (4.10), czyli równań (4.12)—(4.18), minimalizuje funkcjonał

$$J = L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{s}}}, \dot{\mathbf{s}}\right) = \int [E(\mathbf{d}) - \varrho \dot{f}^j v_j] dV - \int \dot{F}^{j*} v_j dS_F - \int \dot{\hat{F}}^j v_j d\Sigma_2 \tag{4.24}$$

w klasie rozwiązań równania (4.10a) [równanie to jest równoważne równaniom (4.12)—(4.14)].

W n i o s e k 4.2. Dowolne rozwiązanie równania (4.10) maksymalizuje funkcjonał

$$K = L - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}}, \mathbf{d} \right\rangle = \tag{4.25}$$

$$= \int \left[E(\mathbf{d}) - d_{ij} \frac{\partial E}{\partial d_{ij}} \right] dV + \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1$$

w klasie rozwiązań równań (4.10b), (4.10c) [równania (4.10b), (4.10c) są równoważne równaniom (4.15)—(4.18)].

Wiemy, że $\frac{\partial F}{\partial d_{ij}} = \dot{s}^{ij}$, stosując ponadto transformację Legendre'a, przekształcamy (4.25) do postaci

$$K = -\int W(\dot{\mathbf{s}}) dV + \int n_i \dot{s}^{ij} v_j^* dS_v + \int m_i \dot{s}^{ij} h_j d\Sigma_1 . \tag{4.26}$$

Jeśli w opisie materialnym zastosować niesymetryczny tensor naprężenia Lagrange'a, to otrzyma się formalnie takie same zasady, jak w opisie Eulera.

U w a g a. Potencjał $E(\mathbf{d})$ jest wypukły, jeśli

$$E(\mathbf{d}_1) - E(\mathbf{d}_2) - [\operatorname{grad} E(\mathbf{d}_2)](\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \geqslant 0 .$$

5. Związki podstawowe płaskiego stanu odkształcenia ośrodków ściśliwych

W pracy [13] zostały wyprowadzone równania opisujące płaski stan odkształcenia ośrodków ściśliwych. Równania te otrzymano z teorii trójwymiarowej zaproponowanej w [14].

Ogólny związek fizyczny dla izotropowego, idealnie plastycznego ośrodka ma — w przypadku trójwymiarowym — postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}), \text{ przy warunku } \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} \mathbf{D} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} \neq 0, \tag{5.1}$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ jest tensorem naprężenia, a $\mathbf{D} = (D_{ij})$ tensorem prędkości odkształcenia. Występujący w (5.1) warunek jednorodności implikuje istnienie warunku plastyczności

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \tag{5.2}$$

Występuje powiązanie między warunkiem plastyczności a prawem płynięcia.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia prawo płynięcia ma postać

$$(5.3)\qquad D_{\alpha\beta} = \mu\left[\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{\gamma\gamma} - g\varphi - \frac{1}{3}h\varphi^2\right)\delta_{\alpha\beta}\right], \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2,$$

gdzie: $\mu = \dfrac{3\mathrm{tr}^{1/2}\mathbf{E}^2}{3g+h\varphi}$, $\mu \geqslant 0$; argumentem funkcji g, h, φ jest $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{E} = (E_{\alpha\beta}, E_{33})$, $E_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{D}\delta_{\alpha\beta}$.

Naprężenie σ_{33} wyraża się wzorem

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\alpha\alpha} + \frac{1}{3}h\varphi^2 - g\varphi - h\right), \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Warunek plastyczności (5.2) ma postać następującą:

$$(5.4)\qquad F(\sigma_{\alpha\beta}) = 2\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\alpha})^2 - \left(g^2 + \frac{2}{3}gh\varphi + \frac{1}{9}h^2\varphi^2\right)\left(2 - \frac{1}{3}\varphi^2\right) = 0.$$

Prawo płynięcia (5.3) nie jest stowarzyszone z warunkiem plastyczności (5.4). Łatwo wykazać, że potencjał plastyczny dany jest zależnością

$$(5.5)\qquad G(\sigma_{\alpha\beta}) = 2\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - (\sigma_{\alpha\alpha})^2 + 2\int\left(g\varphi + \frac{1}{3}h\varphi^2\right)d\sigma_{\alpha\alpha} + G_1 = 0,$$

przy czym G_1 jest stałą całkowania. Przykłady podano w [13].

6. Zasada wariacyjna dla płaskiego płynięcia ośrodków ściśliwych

Sformułujemy zasadę minimum, która charakteryzuje mnożnik plastyczny μ z poprzedniego punktu. Oznaczmy przez Ω rozpatrywany obszar płaski o brzegu $\partial\Omega$. Niech brzeg ten składa się z dwu części: S_1 i S_2; przez l_1, l_2 oznaczmy linie nieciągłości, odpowiednio pola prędkości przemieszczeń i pola naprężenia. Przestrzeń E składa się z elementów $\boldsymbol{\sigma}$ o postaci

$$(6.1)\qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\beta}(x) \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) \\ \sigma_{\alpha\beta}(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in \Omega \\ x \in S_1 \\ x \in S_2. \\ x \in l_1 \\ x \in l_2 \end{matrix}$$

Iloczyn skalarny ma postać podobną do (4.2). Będziemy nadal oznaczać go przez (,). Przestrzeń F składa się z elementów $\mathbf{V}$ o postaci

$$(6.2)\qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_\alpha(x) \\ V_\alpha(x) \\ V_\alpha(x) \\ V_\alpha(x) \\ V_\alpha(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \in \Omega \\ x \in S_1 \\ x \in S_2. \\ x \in l_1 \\ x \in l_2 \end{matrix}$$

Iloczyn skalarny w tej przestrzeni oznaczać będziemy symbolem $\langle , \rangle$, ma on postać podobną do (4.4). Łatwo jest teraz podać definicje podprzestrzeni E', F', więc nie będziemy ich powtarzać.

Wprowadźmy jeszcze trzecią przestrzeń G, składającą się z funkcji skalarnych μ, określonych na Ω. Podprzestrzeń G' składa się z funkcji klasy C^1. W przestrzeni G wprowadzamy następujący iloczyn skalarny:

$$\{\mu, \lambda\} = \int \mu\lambda d\Omega, \quad \mu, \lambda \in G. \tag{6.3}$$

Ponieważ obecnie tensor naprężenia jest symetryczny, więc operatory T, T^* będą miały nieco inną postać niż w (4.7); mianowicie mamy

$$T^*\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \\ -n_{(\alpha}V_{\beta)} \\ 0 \\ -m_{(\alpha}V_{\beta)} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Omega \\ S_1 \\ S_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{matrix}, \qquad T\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \\ 0 \\ n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \\ 0 \\ m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Omega \\ S_1 \\ S_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{matrix}, \tag{6.4}$$

gdzie $\mathbf{n}(n_\alpha)$ jest wektorem jednostkowym normalnym do $\partial\Omega$, zaś $\mathbf{m}(m_\alpha)$ — wektorem jednostkowym normalnym do $l_1 \cup l_2$.

Weźmy dwa funkcjonały

$$H_1[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{V}, \mu] = \int \left[\frac{1}{2}\mu\big(G(\boldsymbol{\sigma}) + F(\boldsymbol{\sigma})\big) + X_\alpha V_\alpha\right] d\Omega - \int n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} V^*_\beta dS_1 + \\ + \int P_\alpha V_\alpha dS_2 - \int m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} h_\beta dl_1 + \int \hat{P}_\alpha V_\alpha dl_2, \tag{6.5}$$

$$H_2[\boldsymbol{\sigma}, \mu] = \int \frac{1}{2}\mu[G(\boldsymbol{\sigma}) - F(\boldsymbol{\sigma})] d\Omega \tag{6.6}$$

i rozpatrzmy równanie operatorowe

$$\begin{bmatrix} 0 & T^* & 0 \\ \mathrm{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{V} \\ \mu \end{bmatrix} = \partial H_1 / \partial \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{V} \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial H_2 / \partial \boldsymbol{\sigma} \\ 0 \\ -\partial H_2 / \partial \mu \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Prawa strona równania (6.7) nie jest gradientem jednego funkcjonału. Wynika to stąd, że mamy do czynienia z niestowarzyszonym prawem płynięcia.

Po rozpisaniu równanie (6.7) przyjmuje postać:

$$T^*\mathbf{V} = \frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = \mu \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}, \ \Omega, \\ V_\alpha = V^*_\alpha, \ S_1, \\ V_\alpha = h_\alpha, \ l_1, \end{cases}$$

$$T\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{V}} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = X_\beta, \ \Omega, \\ n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} = P_\beta, \ S_2, \\ m_\alpha \sigma_{\alpha\beta} = \hat{P}_\beta, \ l_2, \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu} \Leftrightarrow F(\sigma_{\alpha\beta}) = 0.$$

Ostatnie równanie oznacza, że ośrodek jest uplastyczniony w każdym punkcie. Pełny układ zależności opisujących początkowe płynięcie plastyczne dla rozpatrywanych ośrodków o niestowarzyszonym prawie płynięcia można zapisać następująco:

$$T^*\mathbf{V} = \frac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{6.8}$$

$$T\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{V}}, \tag{6.9}$$

$$0 \geqslant \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu}, \tag{6.10}$$

$$\mu \geqslant 0, \tag{6.11}$$

$$\left\{\mu, \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu}\right\} = 0. \tag{6.12}$$

Z przeprowadzonych przez SEWELLA [3] rozważań wynika, że na dowolnym rozwiązaniu układu (6.10)—(6.12) funkcjonał

$$\left\{\mu, \frac{\partial H_1}{\partial \mu} - \frac{\partial H_2}{\partial \mu}\right\} = \int \mu F(\boldsymbol{\sigma})\, d\Omega, \tag{6.13}$$

osiąga minimum, w klasie rozwiązań dopuszczalnych określonych przez (6.10), (6.11). Funkcjonał (6.13) charakteryzuje więc tylko mnożnik plastyczny μ (por. [15]). Powstaje problem budowania ogólniejszych i bardziej praktycznych zasad wariacyjnych dla ośrodków o niestowarzyszonym prawie płynięcia. Zagadnienie to zostanie rozpatrzone w przyszłości, przy zastosowaniu aparatu rozwiniętego w pracach [4, 5].

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. ARTHURS, *Complementary variational principles*, Clarendon Press, Oxford 1970.
2. J. T. ODEN, J. N. REDDY, *On dual-complementary variational principles in mathematical physics*, Int. J. Eng. Sci., **12** (1974), 1 - 29.
3. M. J. SEWELL, *The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity generated from a single functional*, J. Struct. Mech., Part 1: **2** (1973), 1 - 32, Part 2: **2** (1973), 135 - 158.
4. E. TONTI, *On the variational formulation for linear initial value problems*, Ann. Mat. Pura Appl., **95** (1972), 331 - 359.
5. M. M. ВАЙНБЕРГ, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Москва 1956.
6. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciala stalego*, PWN, Warszawa 1969.
7. W. PRAGER, *An elementary discussion of stress-rate*, Quart. Appl. Math., **18** (1963), 403 - 408.
8. R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plactic solids*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958), 236 - 249.
9. R. HILL, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids, **7** (1959), 209 - 225.
10. K. WASHIZU, *Vaiational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1968.
11. J. J. TELEGA, *Variational principles for rate boundary-value problems in finite plasticity*, Euromech 54, «Finite deformations in plasticity», Warszawa 1974.
12. K. W. NEALE, *A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity*, Int. J. Solids Struct., **8** (1972), 865 - 876.

13. J. J. TELEGA, *On plane plastic motion of compressible solids*, ZAMM, (w druku).
14. A. SAWCZUK, P. STUTZ, *On formulation of stress-strain relations for soils at failure*, ZAMP **19** (1968), 770 - 778.
15. Q. S. NGUYEN, H. D. BUI, *Sur les matériaux elastoplastiques à écrouissage positif ou négatif*, J. Méc., **13** (1974), 321 - 342.

Резюме

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМУЛИРОВАНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ДЛЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

В работе представлено применение свободного вариационного принципа к: 1) инкрементальной краевой задаче для упруго-пластической среды, с учетом геометрической нелинейности, 2) плоскому деформированному состоянию идеально-пластической среды с учетом объемных деформаций.

Summary

AN OPERATOR APPROACH TO THE FORMULATION OF VARIATIONAL PRINCIPLES FOR PLASTIC SOLIDS

In the paper the application of a «free variational principle» is considered with regard to: 1) rate boundary-value problem of elastic-plastic solids; geometrical nonlinearity is taken into account; 2) plane flow of perfectly-plastic, compressible solids.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
OŚRODEK W RADOMIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1976 r.