

ANALIZA POZAKRYTYCZNA IDEALNYCH POWŁOK OBROTOWYCH O MAŁEJ KRZYWIŹNIE  
POŁUDNIKA, PRZY OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, ANDRZEJ WAWRZYŃIAK (WARSZAWA)

Tematem pracy jest analiza zachowania się po utracie stateczności powłoki o kształcie zbliżonym do walca kołowego, poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego i jednocześnie ściskanej osiowo. Zbadano, jaki jest wpływ zakrzywienia południka powłoki na jej pracę po utracie stateczności przy obciążeniu złożonym. Przypadki, gdy podobne powłoki obciążone były niezależnie przez ciśnienie zewnętrzne, czy też obciążenie osiowe, były już analizowane w [1, 2]. Jednakże brak dotychczas rozwiązania, gdy obciążenia działają jednocześnie. Obciążenia krytyczne rozpatrywanych konstrukcji określono w poprzedniej pracy [3]. Przybliżone rozwiązanie postawionego zadania można uzyskać metodą RITZA. W tym przypadku sprowadza się ona do założenia funkcji ugięcia wyobczonej powłoki, określenia funkcji naprężeń z równania ciągłości odkształceń oraz wykorzystania zasady minimum energii potencjalnej do określenia zależności pomiędzy obciążeniem a parametrami funkcji ugięcia. Funkcję ugięcia przyjęto w postaci

$$(1) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_0.$$

Funkcja ta, zawierając pięć swobodnych parametrów  $f_0, f_1, f_2, m, n$ , odpowiada powłoce o brzegach swobodnie podpartych i dobrze oddaje kształt wygiętej powłoki walcowej po wyobczeniu. Ponieważ założono, że rozpatrywane powłoki mało różnią się od walca kołowego, współczynnik  $\lambda = R_2/R_1$  określający kształt badanych powłok jest wielkością małą, bliską zeru  $-0,01 < \lambda < 0,1$ .  $R_1, R_2$  oznaczają głównie promienie krzywizny powierzchni środkowej powłoki. Przyjęto, że promienie te są stałe oraz że współczynniki pierwszej formy kwadratowej dla rozpatrywanych powłok są również stałe. Sposób określenia średniego promienia  $R_2$  podano w pracy [3].

Równanie ciągłości odkształceń powłoki może być zapisane w następujący sposób

$$(2) \quad \frac{1}{Eh} \left( \Delta + \frac{\lambda}{R^2} \right) \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \Delta_k w,$$

gdzie

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right)^2 \right], \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\Delta_k w = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Po podstawieniu założonego ugięcia (1) do równania (2) i rozwiązaniu go znaleziono następujące wyrażenie dla funkcji  $\Phi$ :

$$(3) \quad \frac{1}{Eh} \Phi = f_1^2 \frac{r^2 n^2}{2} \left\{ \frac{1}{[2r]} \cos \frac{2rx}{R} + \frac{1}{[2n]} \cos \frac{2ny}{R} \right\} + \\ + f_1 f_2 n^2 r^2 \left\{ \frac{1}{[3r, n]} \sin \frac{3rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - \frac{1}{[r, n]} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} \right\} + \\ + f_1 R (r^2 + \lambda n^2) \frac{1}{[r, n]} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - 2f_2 R r^2 \frac{1}{[2r]} \cos \frac{2rx}{R} + \\ + \frac{1}{Eh} \left[ pR(\lambda\zeta - 1) \frac{x^2}{2} - \zeta pR \frac{y^2}{2} \right].$$

We wzorze (3) użyto oznaczeń:

$$(4) \quad [2r] = [(2r)^2 - \lambda]^2; \quad [2n] = [(2n)^2 - \lambda]^2, \\ [ar, bn] = [(ar)^2 + (bn)^2 - \lambda]^2,$$

$$\zeta = \frac{q}{pR} (1 - 0,5\lambda\mu^2) + 0,5\lambda\mu^2, \quad \text{gdzie } \mu = L/2R, [3].$$

Przemieszczenie obwodowe powinno spełniać warunek okresowości. Wymaga to by całka

$$(5) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

była równa zeru.

Warunek ten może być spełniony tylko jako uśredniony na długości  $L$ ,

$$(6) \quad \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] dy dx = 0.$$

Po podstawieniu poprzednio obliczonych wielkości otrzymano po scałkowaniu

$$(7) \quad \frac{f_0}{R} = \frac{pR}{Eh} [1 - \zeta(\lambda + \nu)] + \frac{f_1^2 n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R}.$$

Pełna energia potencjalna  $\ni$  ugiętej powłoki

$$\ni = U_1 + U_2 + W$$

składa się z energii deformacji powierzchni środkowej  $U_1$ , energii zginania  $U_2$  oraz pracy obciążenia zewnętrznego  $W$ . Praca obciążenia zewnętrznego składa się z pracy ciśnienia  $p$  i obciążenia  $q$

$$(8) \quad W_1 = -p \int_0^L \int_0^{2\pi R} w dx dy = -p\pi L(2f_0 + f_2).$$

Po wyeliminowaniu parametru  $f_0$  otrzymano

$$(9) \quad W_1 = -p\pi RL \left\{ \frac{2pR^2}{Eh} \left[ 1 - \zeta(\lambda + \nu) + \frac{f_1^2 n^2}{4R} \right] \right\}.$$

Praca obciążenia osiowego  $q$  wynosi

$$(10) \quad W_2 = -q \int_0^{2\pi R} (-u_0 \cos \alpha + 2w_0 \sin \alpha) dy,$$

gdzie  $u_0$ ,  $w_0$  oznaczają przemieszczenie brzegów powłoki,  $\alpha$  — kąt, jaki tworzy styczna do południka w punktach  $x = D, L$  z osią powłoki.

Na podstawie (1),  $w_0 = f_0$ . Wielkość  $u_0$  określono ze wzoru

$$(11) \quad u_0 = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^L \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{w}{R} \right] dx.$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  jest mały można przyjąć:  $\cos \alpha \simeq 1$ ,  $\sin \alpha \simeq \alpha \simeq L/2R_1 = \lambda L/2R$ . Po podstawieniu do wzoru (10) otrzymano

$$(12) \quad W_2 = -2\pi(\zeta p R) LR \left\{ \frac{pR}{Eh} [\zeta(1 + \nu\lambda) - \nu] + \frac{f_1^2 r^2}{8R^2} + \frac{f_2^2 r^2}{4R^2} - \lambda \frac{f_2}{2R} \right\}.$$

Całkowita praca obciążenia zewnętrznego wynosi

$$W = W_1 + W_2.$$

Energia deformacji powierzchni środkowej określona jest przez

$$(13) \quad U_1 = \frac{1}{2Eh} \int_0^{2\pi R} \int_0^L [\Delta\Phi]^2 - (1 + \nu)L(\Phi, \Phi) dx dy.$$

Wykorzystując wyrażenie (3) dla funkcji naprężeń  $\Phi$  otrzymano po scałkowaniu

$$(14) \quad U_1 = \frac{ELh}{4R^3} \left\{ \frac{8r^8 f_1^4 n^4}{[2r]^2} + \frac{8n^8 f_1^4 r^4}{[2n]^2} + f_1^2 f_2^2 r^4 n^4 \left[ \frac{(9r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} + \frac{(r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} \right] + \frac{f_1^2 R^2}{[r, n]^2} (r^2 + n^2)^2 (r^2 + \lambda n^2)^2 + \frac{16^2}{2} \frac{r^8 f_2^2 R^2}{[2r]^2} - \frac{R}{4} f_1^2 f_2 n^2 \left[ \frac{16^2 r^8}{[2r]^2} + \frac{8r^2 (r^2 + n^2) (r^2 + n^2)^2}{[r, n]^2} \right] \right\} + \frac{LR}{Eh} [(pR)^2 (\lambda\zeta - 1)^2 + \zeta(pR)^2] + \frac{2\pi RL}{Eh} (pR)^2 \zeta (\lambda\zeta - 1).$$

Energię zginania obliczono z wzoru

$$(15) \quad U_2 = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] dx dy.$$

Po podstawieniu wyrażenia (1) dla funkcji ugięcia otrzymano po scałkowaniu

$$(16) \quad U_2 = \frac{D\pi L}{4R^3} [f_1^2(r^2+n^2)^2 + 8f_2^2r^4].$$

Równowagę powłoki w obszarze zakrytycznym określono wykorzystując zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej. Zasada ta wymaga by pochodne energii  $\Xi$  względem parametrów  $f_1, f_2, m, n$  były równe zero.

W pierwszym przybliżeniu ograniczono się do warunków

$$(17) \quad \frac{\partial \Xi}{\partial f_1} = 0; \quad \frac{\partial \Xi}{\partial f_2} = 0.$$

Po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$(18) \quad \bar{p} = \frac{pR^2}{Eh^2}, \quad v = \frac{m\pi R}{nL} = \frac{r}{n}, \quad \eta = \frac{n^2h}{R},$$

$$\xi_1 = f_1/h, \quad \xi_2 = f_2/h,$$

otrzymano, na podstawie warunków (17),

$$(19) \quad \bar{p} = \frac{16n^8\eta\vartheta}{1+\zeta\vartheta^2} \left[ \frac{\vartheta^4}{[2n]^2} + \frac{1}{[2n]^2} \right] \xi_1^2 + \frac{\eta n^8 \vartheta^4}{1+\zeta\vartheta^2} \left[ \frac{(9\vartheta^2+1)^2}{[3n\vartheta, n]^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\vartheta+1)^2}{[\vartheta n, n]^2} \right] \xi_2^2 - \frac{n^8}{4(1+\zeta\vartheta^2)} \left[ \frac{16^2\vartheta^8}{[2n\vartheta]^2} + \frac{8\vartheta^2(\vartheta^2+\lambda)(1+\vartheta^2)^2}{[\vartheta n, n]^2} \right] \xi_2 + \\ + \frac{n^8}{\eta} \frac{(\vartheta^2+1)^2(\vartheta^2+\lambda)^2}{(1+\zeta\vartheta^2)[\vartheta n, n]^2} + \frac{\eta}{12(1-\nu^2)} \frac{(1+\vartheta^2)^2}{1+\zeta\vartheta^2}$$

oraz

$$\xi_1^2 = A/B, \text{ gdzie}$$

$$A = \frac{64\vartheta^6 n^8}{[2n\vartheta]^2 \eta} + \frac{\vartheta^2 \eta}{3(1-\nu^2)} + \zeta \bar{p} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{\xi_2 \vartheta^2 \eta} \right) \right] \xi_2,$$

$$B = \frac{n^8}{\vartheta^2} \left[ \frac{16\vartheta^8}{[2n\vartheta]^2} + \frac{\vartheta^2(\vartheta^2+\lambda)(\vartheta^2+1)^2}{2[n\vartheta, n]^2} \right] - \frac{\eta \vartheta^2 n^8}{2} \left[ \frac{(9\vartheta^2+1)^2}{[3n\vartheta, n]^2} + \frac{(1+\vartheta^2)^2}{[n\vartheta, n]^2} \right] \xi_2.$$

Z pierwszego równania układu (19) można wyeliminować  $\xi_1^2$ , wykorzystując drugie równanie, otrzymuje się wtedy zależność  $\bar{p} = f(\xi_2)$ , która może być łatwo przedstawiona na wykresie.

Określmy jeszcze związek między obciążeniem  $\bar{p}$  a średnim ugięciem powłoki w stanach równowagi w obszarze zakrytycznym. Średnie ugięcie określone jest wzorem

$$(20) \quad W_{sr} = \frac{2\pi R L}{\int_0^{2\pi R} \int_0^L w dx dy},$$

co daje, po podstawieniu ugięcia (1) i scałkowaniu, wielkość

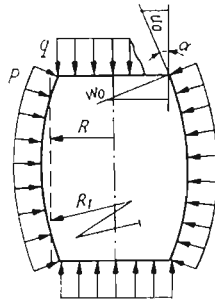
$$W_{sr} = f_0 + 0,5f_2.$$

Korzystając z wzoru (7) na  $f_0$  i dzieląc obie strony zależności (20) przez  $h$  otrzymujemy wzór na bezwymiarowe średnie ugięcie powłoki

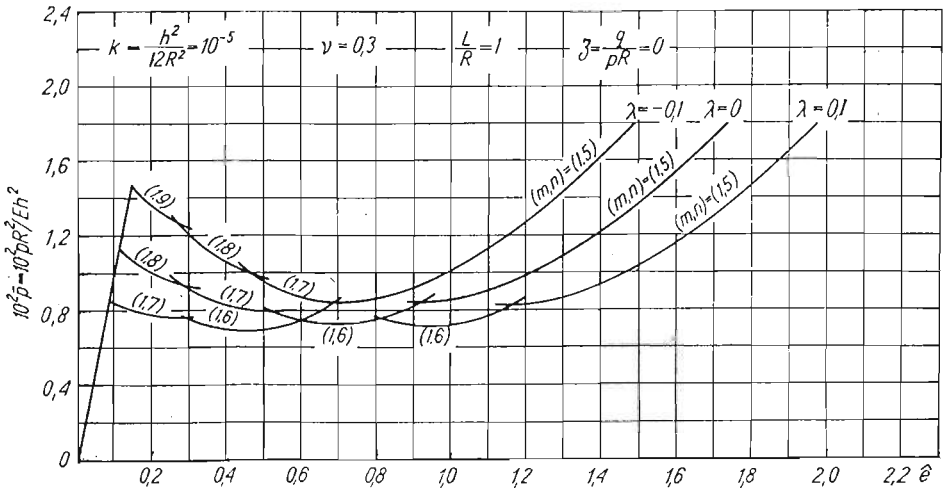
$$(21) \quad \hat{e} = \frac{W_{sr}}{h} = p[1 - \zeta(\lambda + \nu)] + \frac{1}{8} \eta \xi_1^2.$$

Opierając się na założeniach (19) i (21) wykreślono krzywe we współrzędnych  $p$  i  $\hat{e}$ . Dla danej powłoki, dla każdej pary liczb  $m$  i  $n$  otrzymamy inną krzywą. Należy przypuszczać, że stany powłoki najbliższe realizującym się w rzeczywistości stanom równowagi będą określone przez linie  $m, n = \text{const}$ , leżące najniżej na wykresie  $p = f(\hat{e})$ . Krzywe równowagi przyjmują więc postać linii girlandowych mających najniższe rzędne spośród wszystkich innych krzywych  $m, n = \text{const}$ .

Na rys. 2—10 przedstawiono wykresy obrazujące zależność  $p = f(\hat{e})$  dla  $k = h^2/12R^2 = 10^{-5}$ ,  $\nu = 0,3$  dla różnych długości powłok i różnych wartości  $\zeta$  oraz  $\lambda$ .



Rys. 1



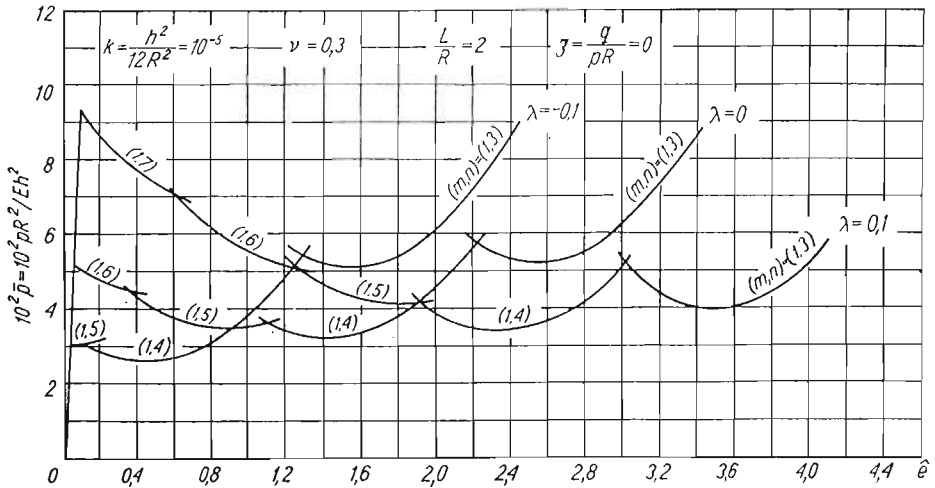
Rys. 2

Wykresy na rys. 2—4 dotyczą przypadków powłok obciążonych tylko ciśnieniem zewnętrznym  $p$  ( $\zeta = 0$ ) o długości  $L/R = 1, 2, 4$  i wartości współczynnika  $\lambda = -0,1; 0; 0,1$ .

Proste wychodzące z początku układu współrzędnych  $p = \hat{e}$  odpowiadają ścisnaniu powłok bez wybożenia. Linie girlandowe, przecinając się z nimi, określają punkty odpowiadające obciążeniom krytycznym  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$ . Punkty te pokrywają się z wynikami metody liniowej, obliczonymi w poprzedniej pracy [3]<sup>1)</sup>. Obserwujemy duży, ustającą wpływ podwójnej dodatniej krzywizny. Jednakże im mniej wypukły, a bardziej wklęsły jest południk powłoki, tym mniejszą tendencję do opadania wykazują pierwsze gałęzie krzywych girlandowych. Najszybciej, w obszarze zakrytycznym, maleją więc krzywe równowagi powłok wypukłych ( $\lambda = 0, 1$ ). Dla nich stosunek dolnego obciążenia krytycznego do górnego ma najmniejszą wartość. Natomiast dla dłuższych powłok i wklęsłym południku obserwujemy, że krzywe girlandowe na pierwszym odcinku wzrastają.

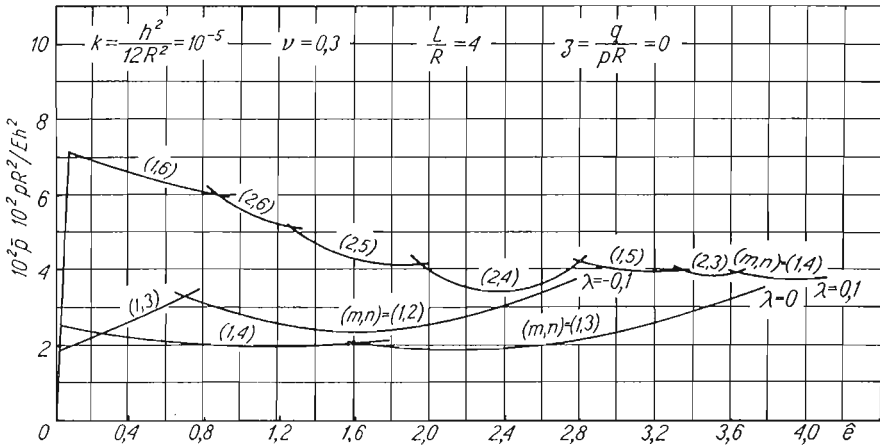
Utrata stateczności idealnej powłoki obciążonej quasi-statycznie związana jest ze zjawiskiem przeskoku. Obserwujemy, że o wiele większemu przeskokowi przy stałym obciążeniu ulegają powłoki o wypukłym południku niż powłoki o południku wklęsłym. Powłoki o dodatniej krzywiznie wykazują większe średnie ugięcie po wybożeniu niż powłoki o krzywiznie ujemnej.

Wybożenie powłoki o ujemnej krzywiznie może początkowo przebiegać bez przeskoku. Po przekroczeniu ciśnienia  $\bar{p}$  powłoka wygina się stopniowo zgodnie z przebiegiem pierwszej gałęzi krzywej. Dopiero «przejście na sąsiednią gałąź» ma charakter przeskoku (rys. 3, 4). Jeżeli po wystąpieniu przeskoku obciążenie zwiększa się dalej, mogą wystąpić dalsze przeskoki na następne gałęzie linii girlandowych. W trakcie wybożenia powłok walcowych oraz powłok o ujemnej krzywiznie poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego, liczba półfal powstających wzdłuż tworzącej powłoki jest zawsze równa jedności. Natomiast liczba fal obwodowych  $n$  maleje wraz z wzrostem ugięcia  $\hat{e}$ . (To samo dotyczy krótkich powłok o wypukłych południkach  $L/R = 1, 2$ ;  $\lambda = 0, 1$ ). Krzywa równowagi dla powłoki o większej długości  $L/R = 4$  i współczynniku  $\lambda = 0,1$  ma odcinki przy  $m = 2$ .



Rys. 3

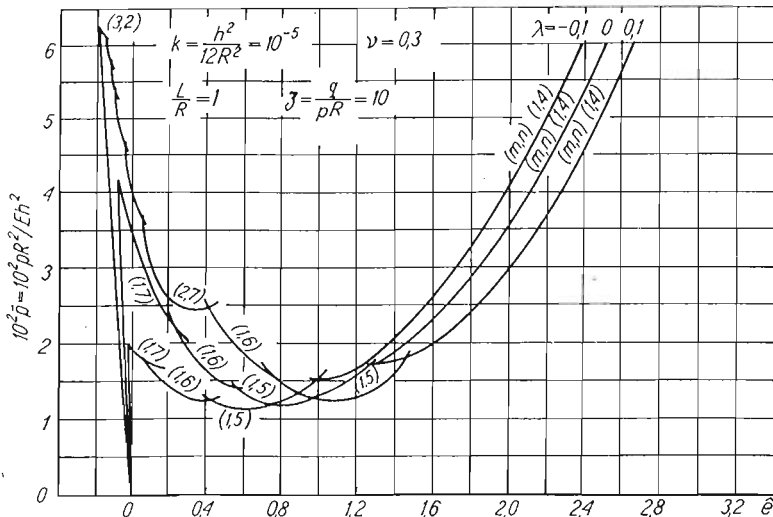
<sup>1)</sup>  $\bar{p} = pR/h(1-\nu^2)$ , gdy  $k = h^2/12R^2 = 10^{-5}$  i  $\nu = 0,3$  to  $\bar{p} \approx 10^2 \hat{p}$ .



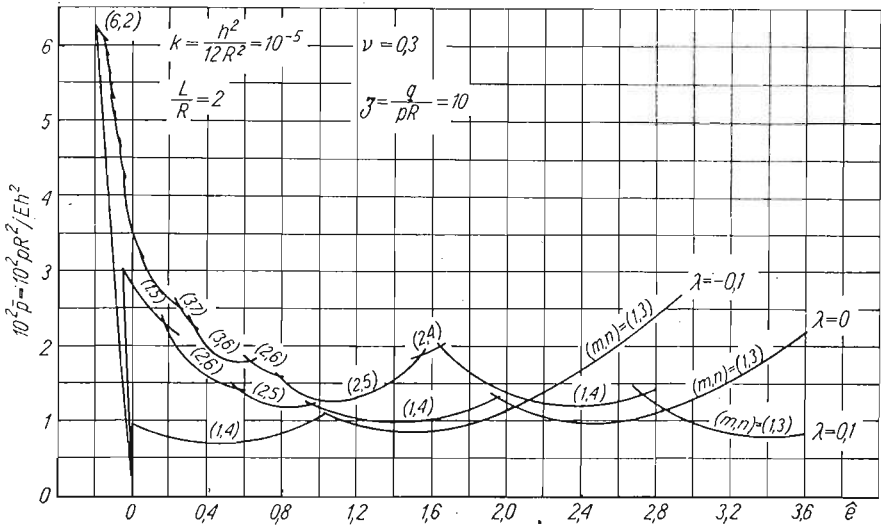
Rys. 4

Na rys. 5—7 przedstawiono wykresy zależności ciśnienia  $\bar{p}$  od średniego ugięcia  $\hat{e}$  dla powłok poddanych jednoczesnemu działaniu ciśnienia zewnętrznego  $p$  i osiowego ściskania  $q$ , przy czym  $\zeta = 10$ . Wykreślono krzywe dla trzech długości powłok  $L/R = 1, 2, 4$  oraz dla trzech wartości współczynnika  $\lambda = -0,1; 0; 0,1$ .

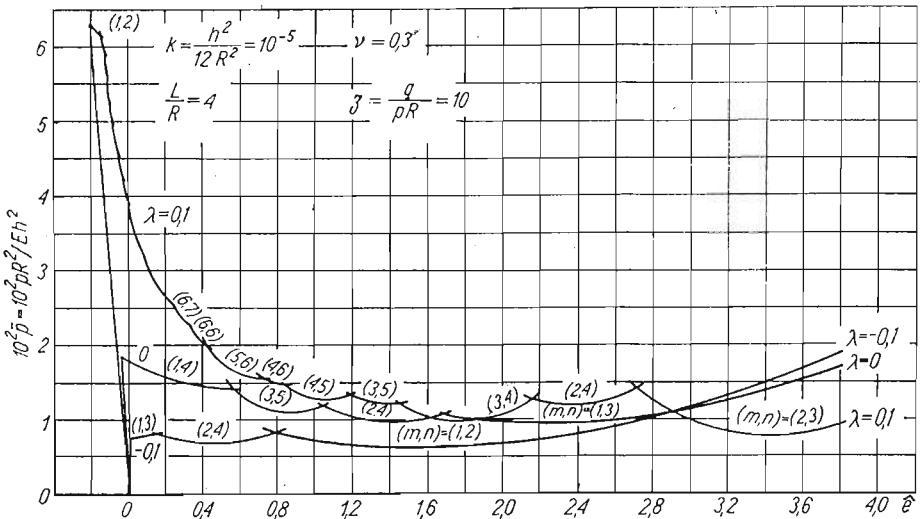
Linie równowagi powłok niewyoboczonych mają postać prostych o równaniu  $\hat{e} = \bar{p}[1 - 10(\lambda + \nu)]$ . Dodatkowo wartości obciążenia  $\bar{p}$  na tych prostych odpowiadają ujemnym wartościom ugięcia  $\hat{e}$ . Oznacza to, że w stanie pierwotnej równowagi pod wpływem ściskania osiowego punkty powłoki przemieszczają się na zewnątrz. Punkty przecięcia krzywych girlandowych z prostymi równowagi pierwotnej, wyznaczające wartości górnych obciążeń krytycznych, są zgodne, z dużą dokładnością, z wynikami metody liniowej [3]. Obserwujemy, że górne obciążenia krytyczne są tym większe im bardziej wypukły jest



Rys. 5



Rys. 6

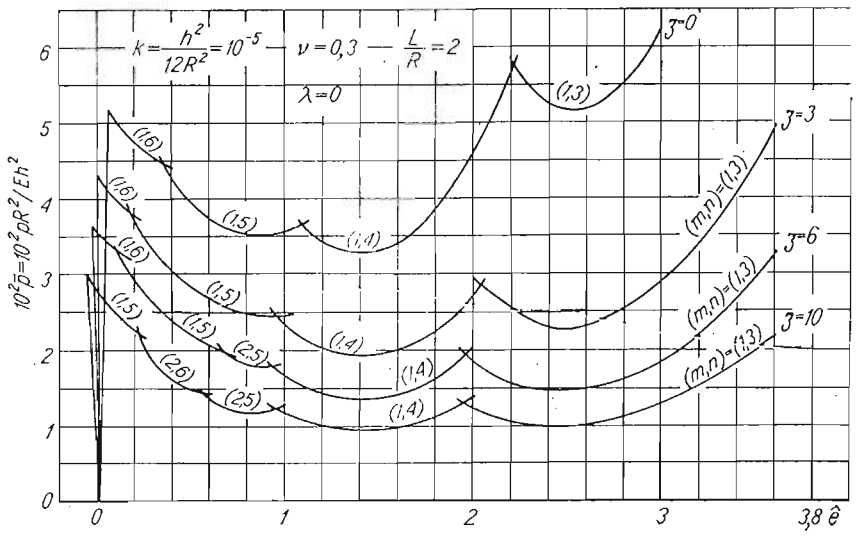


Rys. 7

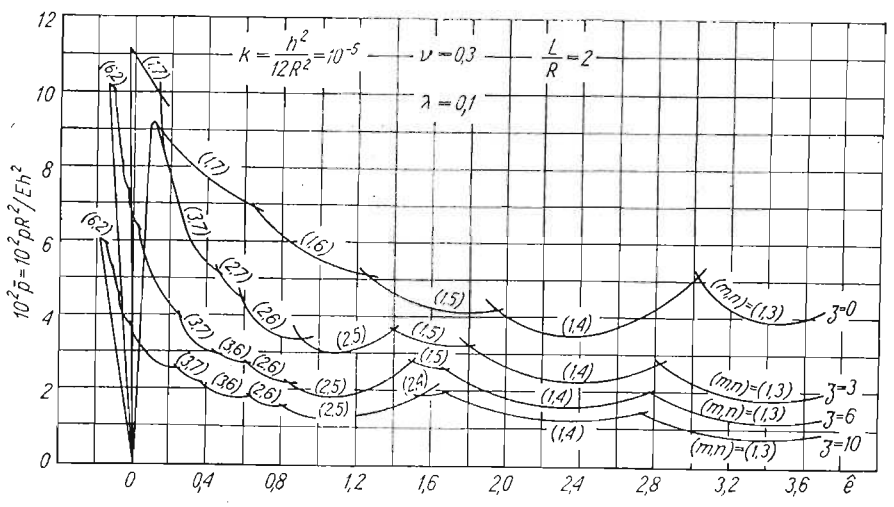
południk powłoki, lecz podobnie jak w przypadku  $\zeta = 0$ , im bardziej powłoka jest wypukła tym szybciej opada krzywa girlandowa w pierwszej części. Dla linii o parametrze  $\lambda = 0,1$  spadek ten jest gwałtowny, a wartości dolnych obciążeń krytycznych najniższe. Natomiast powłoka o wklęsłym południku  $\lambda = -0,1$  i długości  $L/R = 4$  opisana jest krzywą równowagi, której pierwsza gałąź rośnie wraz ze średnim ugięciem  $\hat{\delta}$ . Z wyjątkiem tego przypadku, wyboczenie omawianych powłok odbywa się z przeskokiem (przy stałym obciążeniu), który następuje po osiągnięciu przez obciążenie wartości górnego obciążenia krytycznego.

Na rys. 8—10 przedstawiono wykresy obrazujące dokładniej wpływ ściskania osiowego na wartość ciśnienia  $\bar{p}$  w stanach równowagi. Wykresy te dotyczą powłok o długości

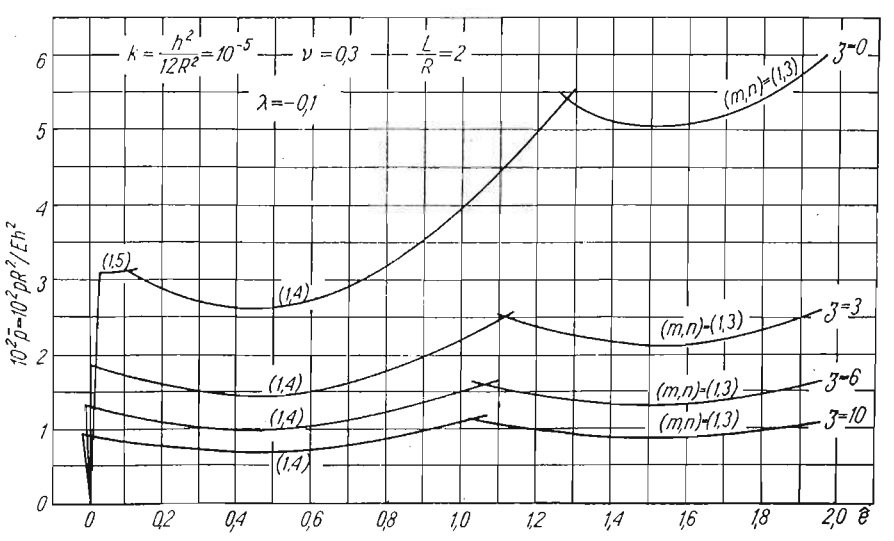




Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

$L/R = 2$  i trzech współczynników  $\lambda = -0,1; 0; 0,1$ . Dla każdej powłoki wykreślono linie równowagi odpowiadające czterem wartościom parametru  $\zeta = 0, 3, 6, 10$ .

W przypadku powłoki walcowej ( $\lambda = 0$ ) oraz powłoki o ujemnej krzywiznie Gaussa ( $\lambda = -0,1$ ) wzrost udziału ściskania  $q$  w obciążeniu powoduje we wszystkich stanach równowagi zmniejszenie wartości ciśnienia  $\bar{p}$ .

Dla powłoki o wypukłym południku istnieje taki przedział wartości  $\zeta > 0$ , dla którego górne ciśnienie krytyczne jest większe niż wtedy, gdy nie występuje ściskanie osiowe [3]. Jednak, jak wynika z rys. 9, krzywe odpowiadające wartościom  $\zeta$  z tego przedziału maleją bardzo szybko na pierwszych swoich odcinkach. W pozostałych przypadkach obciążenie  $\bar{p}$  jest tym mniejsze im intensywniejsze jest ściskanie osiowe.

Przedstawione powyżej rozważania dotyczyły powłok o idealnym kształcie, przedstawionych na rys. 1. Rzeczywiste powłoki zawsze są wykonane z pewnymi niedokładnościami kształtu. Te niedokładności zwykle powodują obniżenie górnych obciążeń krytycznych. Przymuszczalnie zmniejsza to bardzo korzyści jakie mogą być osiągnięte przez stosowanie powłok o podwójnej krzywiznie. Zagadnienie to wymaga jednak jeszcze dokładnego zbadania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. A. COOPER, *Buckling of nearly cylindrical shells under lateral pressure*, AIAA, Journ., **10** (1973) 2.
2. S. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSZKOWSKI, *On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution*, ZAMM, **51** (1971) 653 - 639.
3. S. ŁUKASIEWICZ, A. WAWRZYŃIAK, *Stateczność powłok obrotowych o malej krzywiznie południka przy obciążeniach złożonych*, Mech. Teoret. Stos. (w druku).

#### Резюме

#### ПОСЛЕКРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИДЕАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ КРИВИЗНАХ МЕРИДИАНА И КОМБИНИРОВАННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе представлено решение задачи закритической деформации оболочек вращения, находящихся под внешним поперечным давлением и осевым сжатием. Изучено влияние кривизны меридиана и взаимозависимость критических нагрузок в нелинейной области. Задача решена методом Ритца.

#### Summary

#### POSTCRITICAL ANALYSIS OF IDEAL SHELLS OF REVOLUTION

The analysis of the postbuckling behaviour of nearly cylindrical shells of revolution under simultaneous action of external pressure and axial compressive load is presented. The effects of the curvature of the generator and the correlation of both loads in the nonlinear region are examined. The problem is solved by means of the Ritz method.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ  
I MECHANIKI STOSOWANEJ  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1975 r.*