

## O STATECZNOŚCI WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA OSCYLATORA I CIĘGNA W RUCHU WZGLĘDNYM

ROMAN BOGACZ (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Badania dotyczące stateczności układów ciągłych wymuszonych ruchomymi obciążeniami (zwłaszcza typu inercyjnego) są rozwijane w różnych dziedzinach fizyki i techniki zarówno ze względu na liczne zastosowania, jak również ze względów poznawczych.

Badaniu układów mechanicznych tego typu poświęcono m.in. pracę [1], w której przeprowadzono jakościową analizę wpływu prędkości ruchu siły skupionej o stałej wartości, przemieszczającej się wzdłuż belki spoczywającej na sprężystym podłożu na odkształcenia belki. W pracach [2] i [3] uogólniono powyższe rezultaty na przypadek obciążenia układem rozstawionych sił skupionych i uresorowanych mas. Autorzy pracy [3] badali również wpływ prędkości ruchu na częstość drgań własnych, jednak kierując się wykorzystaniem rezultatów w kolejnictwie ograniczyli rozważania do względnie małych prędkości ruchu wynoszących poniżej 20% prędkości krytycznej, co przy przyjętych parametrach toru i podłoża nie wymagało analizy stateczności.

Analizie stateczności układów ograniczonych obciążonych poruszającymi się masami poświęcono szereg prac. Do najbardziej znaczących należą tu prace [4 ÷ 6].

Autorzy prac [4] i [5] przedstawili odkształcenia belki o podpartych końcach w postaci sumy szeregu fal stojących, sprowadzając zagadnienie stateczności do analizy obszarów rezonansu parametrycznego równania różniczkowego zwyczajnego.

Uzyskane wyniki mają charakter przybliżony i są niekiedy obarczone istotnym błędem. Znany jest bowiem z doświadczenia fakt, że odkształcenia dla tego rodzaju obciążeń mają charakter fal bieżących, co teoretycznie rozważono w [6] i innych pracach S. KALISKIEGO, analizując przypadek obciążenia o charakterze ciągłym.

Zagadnienie stateczności, które prezentujemy w niniejszym komunikacie, stanowi uzupełnienie badań dotyczących ruchomych obciążeń skupionych, a także uogólnienie rozważań dotyczących obciążeń ciągłych, takich jak gęsto, równomiernie rozłożone oscylatory [6, 7], badanych zarówno na gruncie mechaniki elektrodynamiki, jak i elektrofononiki [8].

Rozważymy zatem stateczność układu złożonego z nieograniczonego ciężna, masy skupionej i bezmasowych elementów o własnościach lepkosprężystych łączących masę z ciężnem oraz otoczeniem. W niezaburzonym ruchu względnym masa i prostoliniowe ciężno spoczywają w dwóch inercjalnych układach współrzędnych, zachowując stałą odległość pomiędzy masą i ciężnem.

Analiza stateczności ruchu tak sprecyzowanego, uproszczonego modelu układu, poza aspektem poznawczym może być przydatna do wyjaśnienia szeregu zjawisk, które należy eliminować w pewnych dziedzinach techniki, m.in. w transporcie, włókiennictwie, a niekiedy wykorzystać np. w bardziej złożonych układach teorii pól połączonych [8].

W drugiej części pracy sformułujemy problem podając równania ruchu i warunki brzegowe dla przypadku jedno i dwupunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem, w części trzeciej podamy rozwiązanie zagadnienia oraz sposób uzyskania równań charakterystycznych. Część czwartą poświęcimy kryteriom i obszarom stateczności, część piątą analizie numerycznej dla wybranych przypadków, kończąc pracę uwagami będącymi podsumowaniem uzyskanych rezultatów.

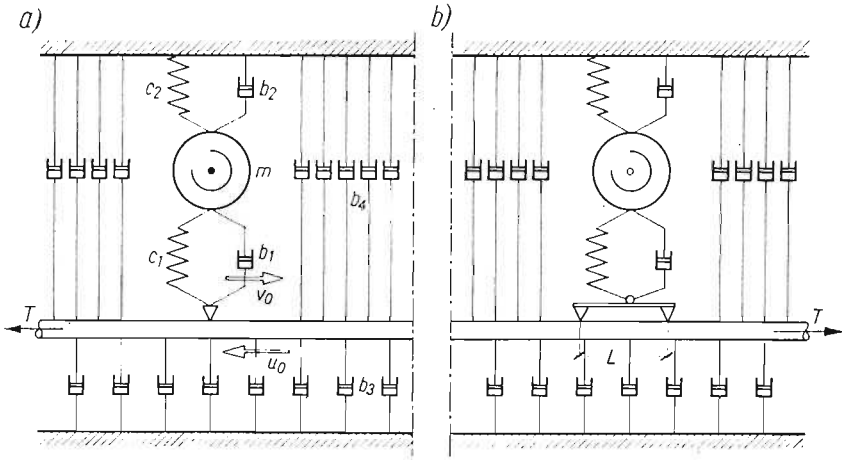
#### Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $a$  prędkość sprężystych fal poprzecznych w ciągnie,
- $b_1$  współczynnik lepkości elementu łączącego ciągnie z masą oscylatora,
- $b_2$  współczynnik lepkości elementu łączącego masę oscylatora z otoczeniem,
- $b_3$  współczynnik wewnętrzznego tłumienia ciągnia na jednostkę długości,
- $b_4$  współczynnik zewnętrznego tłumienia ciągnia na jednostkę długości,
- $c_1$  stała sprężysta elementu łączącego ciągnie z masą oscylatora,
- $c_2$  stała sprężysta elementu łączącego masę oscylatora z otoczeniem,
- $h_1, h_2$  współczynniki zanikania lub narastania fal w przestrzeni,
- $k_1, k_2$  liczby falowe,
- $L$  odległość pomiędzy punktami oddziaływania oscylatora dwupunktowego z ciągnem,
- $m$  masa oscylatora,
- $P_1$  siła w elemencie łączącym masę oscylatora z ciągnem,
- $R, Z$  zbiory liczb rzeczywistych i zespolonych,
- $T$  siła naciągu ciągnia,
- $U_0$  prędkość ruchu ciągnia względem otoczenia w kierunku przeciwnym do osi  $\xi$ ,
- $v_0$  prędkość ruchu oscylatora względem ciągnia w kierunku osi  $x$ , ( $\xi$ ),
- $W$  przemieszczenie poprzeczne ciągnia w kierunku osi  $y$  lub  $\zeta$ ,
- $x, y$  kartezjański układ współrzędnych związany z oscylatorem,
- $z_1$  przemieszczenie punktu styku oscylatora z ciągnem,
- $z_2$  przemieszczenie masy oscylatora,
- $\varepsilon_0$  dekrement zanikania i narastania drgań w czasie,
- $\xi, \zeta$  kartezjański układ współrzędnych związany z ciągnem,
- $\varrho$  liniowa gęstość masy ciągnia,
- $\omega_0$  częstość drgań układu oscylator–ciągnie.

## 2. Sformułowanie problemu, równania ruchu i warunki brzegowe

Rozważymy liniowy model układu złożony z nieskończonego, napiętego ciągnia oddziałującego z otoczeniem poprzez gęsto, równomiernie rozłożone tłumiki oraz z oscylatora (masy skupionej połączonej z ciągnem i otoczeniem elementami lepko-sprężystymi).

W niezaburzonym ruchu względnym masy i ciągnia napięcie w elementach łączących jest równe zero. Schemat układu dla przypadku jedno i dwupunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem ilustrują rys. 1a i 1b.



Rys. 1

Analizę ruchu przeprowadzimy przy następujących założeniach: prędkości względnego ruchu  $u_0, v_0$  są stałe. Tarcie w punktach oddziaływania oscylatora z cięgnem jest pomijalnie małe. Ciężno nie przenosi momentów gnących. Masy elementów łączących są pomijalnie małe. Nie uwzględnia się oddziaływań grawitacyjnych.

W celu opisu ruchu układu w stanie zaburzenia statycznej równowagi oscylatora wprowadzimy dwa inercjalne układy współrzędnych  $\xi, \zeta$  — związany z cięgnem oraz  $x, y$  związany z oscylatorem.

Osie współrzędnych skierujemy tak, aby słuszne były relacje:

$$(2.1) \quad \xi - x - v_0 t = 0; \quad \zeta - y = 0.$$

Przy przyjętych założeniach ruch cięgna opiszemy równaniem poprzecznych drgań struny. Równanie to słuszne dla  $x \neq 0$  w przypadku oscylatora jednopunktowego oraz  $|x| \neq L/2$  w przypadku oscylatora dwupunktowego po zapisaniu w układzie współrzędnych  $x, y$  przyjmie postać

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2v_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + (v_0^2 - a^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a(\beta_3 + \beta_4) \frac{\partial W}{\partial t} - a[(\beta_3 + \beta_4)v_0 - \beta_4 u_0] \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

gdzie

$$W = W(x, t), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad \beta_i = \frac{b_i}{qa} \quad (i = 3, 4).$$

Relację pomiędzy przemieszczeniem masy oscylatora  $z_2(t)$  oraz punktem styku z cięgnem  $z_1(t)$  (dla oscylatora jednopunktowego  $z_1(t) = -W(0, t)$ ) opiszemy następującym równaniem:

$$(2.3) \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} + a(\beta_1 + \beta_2) \frac{dz_2}{dt} - a\beta_1 \frac{dz_1}{dt} + a^2(\alpha_1 + \alpha_2)z_2 - a^2\alpha_1 z_1 = 0,$$

$$\alpha_j = \frac{c_j}{ma^2}, \quad \beta_j = \frac{b_j}{ma} \quad (j = 1, 2),$$

przy czym siłę oddziaływania oscylatora na cięgno określa wyrażenie

$$(2.4) \quad P_1(t) = a^2 m \left[ \alpha_1 (z_2 - z_1) + \alpha \beta_1 / a \frac{d(z_2 - z_1)}{dt} \right].$$

Czyniąc zadość warunkowi wypromieniowania żądamy zanikania rozwiązań w nieskończoności

$$(2.5) \quad W(x, t) \Big|_{\substack{x \rightarrow \pm \infty \\ v_0^2 < a^2}} \rightarrow 0.$$

Zależność pomiędzy oddziaływaniem oscylatora na cięgno i cięgna na oscylator zapiszemy

$$(2.6) \quad P_1(t) + P_2(t) = 0.$$

Natomiast warunek ciągłości przemieszczeń wyraża się wzorami:

dla oscylatora jednopunktowego

$$(2.7) \quad W_1(0, t) = W_2(0, t) = -z_1(t),$$

gdzie

$$(2.8) \quad W_1(x, t) = W(x, t)|_{x < 0} \quad \text{i} \quad W_2(x, t) = W(x, t)|_{x > 0};$$

dla oscylatora dwupunktowego

$$(2.9) \quad \begin{aligned} W^{(1)}(-L/2, t) &= W^{(0)}(-L/2, t); & W^{(0)}(L/2, t) &= W^{(2)}(L/2, t), \\ W^{(1)}(-L/2, t) + W^{(2)}(L/2, t) &= -2z_1(t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} W^{(0)}(x, t) &= W(x, t)|_{-L/2 < x < L/2}; & W^{(1)}(x, t) &= W(x, t)|_{x < -L/2}; \\ W^{(2)}(x, t) &= W(x, t)|_{x > L/2}. \end{aligned}$$

Siłę oddziaływania cięgna na oscylator dla przypadku jednopunktowego oddziaływania wyraża wzór

$$(2.10) \quad P_2(t) = a^2 \varrho \left( \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0},$$

natomiast dla przypadku dwupunktowego oddziaływania o elemencie łączącym połączonym przegubowo i symetrycznie słuszny jest związek

$$(2.11) \quad P_2(t) = 2a^2 \varrho \left( \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=-L/2} = 2\varrho a^2 \left( \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} \right) \Big|_{x=L/2}.$$

Układ równań (2.2), (2.3) wraz z podanymi wyżej warunkami w pełni opisują zagadnienie. Przystąpimy zatem do określenia postaci rozwiązania problemu oraz dyskusji jego stabilności.

### 3. Rozwiązanie zagadnienia, równania charakterystyczne

Rozwiązania układu równań (2.2), (2.3) poszukiwać będziemy w postaci

$$(3.1) \quad W(x, t) = X(x)e^{\lambda_0 t}; \quad z_j(t) = B_j e^{\lambda_0 t}; \quad p_j(t) = \pm P_0 e^{\lambda_0 t}, \quad j = 1, 2.$$

Po podstawieniu (3.1) do (2.2) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne względem  $X(x)$  o rozwiązaniach w postaci

$$(3.2) \quad X(x) = \sum_{s=1}^2 A_{ns} e^{r_s x}; \quad r = h_s + ik_s; \quad h_s, k_s \in R; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Przy czym dekrementy zanikania fal oraz liczby falowe w przypadku okresowego ruchu oscylatora określają wzory:

$$(3.3) \quad h_{1/2} = \frac{-\eta}{2(1-v^2)} \pm \frac{\sqrt{\eta^2 - 4\omega^2 + \sqrt{(\eta^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^2[1 + \beta_3 + \beta_4(1+uv)]^2}}}{2\sqrt{2}(1-v^2)},$$

$$(3.4) \quad k_{1/2} = \frac{\omega v}{1-v^2} \pm \frac{\sqrt{2}\omega[\beta_3 + \beta_4(1+uv)]}{(1-v^2)\sqrt{\eta^2 - 4\omega^2 + \sqrt{(\eta^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^2[1 + \beta_3 + \beta_4(1+uv)]^2}}}$$

gdzie  $\lambda = \lambda_0 a^{-1}$ ,  $\omega = \text{Im}(\lambda) = \frac{\omega_0}{a}$ ,  $v = v_0 a^{-1}$ ,  $u = u_0 a^{-1}$ ,  $\eta = \beta_3 v + \beta_4(v-u)$ .

Zgodnie z warunkiem wypromieniowania, po wykorzystaniu warunku zgodności (2.7) oraz na podstawie (2.8) i (3.2) otrzymamy:

$$(3.5) \quad W_n(x, t) = A_0 \{ H[-(-1)^n(v+1)] \exp[(h_1 + ik_1)x + \lambda_0 t] + H[(-1)^n(1-v)] \times \\ \times \exp[(h_2 + ik_2)x + \lambda_0 t],$$

gdzie:

$$(3.6) \quad H(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \kappa > 0, \\ 1 & \text{dla } \kappa \geq 0; \end{cases}$$

$$k_1 \omega (1 - |v|) \geq 0; \quad k_2 \omega \leq 0,$$

$$(3.7) \quad h_1(1+v) \geq 0; \quad h_2(1-v) \leq 0 \quad \text{dla } \text{Re } \lambda \geq 0.$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia oraz związki (2.7) i (2.10), otrzymamy następującą relację pomiędzy przemieszczeniem cięgna a siłą skupioną określoną przez (3.1) przyłożoną w  $x = 0$

$$(3.8) \quad W(x, t) = \frac{-P_0 A_0^{-1}}{a^2 \rho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} [W_1(x, t) H_0(-x) + W_2(x, t) H_0(x)],$$

gdzie

$$H_0(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \kappa < 0, \\ 1/2 & \text{dla } \kappa = 0, \\ 1 & \text{dla } \kappa > 0. \end{cases}$$

Kładąc w (3.8)  $x = 0$  określimy przemieszczenia  $z_1(t)$  dla przypadku oddziaływania jednopunktowego (rys. 1a), które przyjmie postać

$$(3.9) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 e^{\lambda_0 t} H(1-|v|)}{a^2 \rho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]}.$$

Związek pomiędzy obciążeniem  $p(t)$  i przemieszczeniem  $z_1(t)$  w przypadku oscylatora dwupunktowego (rys. 1b) można otrzymać wykorzystując bądź liniowość układu i stosując zasadę superpozycji, bądź (postępując podobnie jak w przypadku oscylatora jedno-

punktowego) zastępując związki (2.7) i (2.10) warunkami (2.9) i (2.11). Ostatecznie otrzymamy

$$(3.10) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 e^{2\omega t}}{2a^2 \varrho [h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} \left[ H(1 - |v|) + \frac{1}{2} e^{-(h_1 + ik_1)L} + \text{sign}(1 - |v|) e^{-(h_2 + ik_2)L} \right].$$

Analogiczną relację wyrażoną przez parametry oscylatora otrzymamy w wyniku spełnienia rozwiązaniami o postaci (3.1) równania ruchu (2.3) oraz związku (2.4). Relacja ta przyjmie postać

$$(3.11) \quad z_1(t) = \frac{-P_0 \gamma_1 e^{2\omega t}}{a^2 \varrho} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2) \lambda}{\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2) \lambda^2 + \lambda(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \lambda^2)},$$

gdzie  $\gamma_1 = \varrho m^{-1}$ .

Porównując stronami (3.9) lub (3.10) z (3.11) otrzymamy dla ustalonych parametrów układu  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_1, L$  oraz parametrów ruchu  $u, v$  równanie charakterystyczne względem  $\lambda$ . Równanie to, które symbolicznie zapiszemy w formie następującej relacji:

$$(3.12) \quad \Phi(\lambda, s) = 0,$$

gdzie

$$\lambda \in Z, \quad s \in S, \quad s = \langle u, v \rangle, \quad S = UxV, \quad u, v \in R,$$

będzie stanowić podstawę do dyskusji stateczności ruchu rozważanego układu.

#### 4. Kryteria i obszary niestateczności

Kierując się własnościami rozwiązań (3.1) zbiór parametrów ruchu  $S$  podzielimy na trzy podzbiory, które nazywać będziemy: obszarami niestateczności —  $S_I$ , obszarami quasi-stateczności —  $S_Q$  oraz obszarami stateczności —  $S_S$ . Własności poszczególnych obszarów określone są następująco:

$$(4.1) \quad S_I = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in Z^+} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\},$$

$$(4.2) \quad S_Q = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in I} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\},$$

$$(4.3) \quad S_S = S - (S_Q \cup S_I),$$

gdzie  $Z^+ = \{z: [\text{Re}(z) > 0]\}$ ,  $I = \{z: [\text{Re}(z) = 0]\}$ . Przy czym następujący zbiór elementów

$$(4.4) \quad S_{Id} = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in R^+} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\} - \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in (Z^+ - R)} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\}$$

nazywać będziemy obszarami niestateczności o charakterze dywergentnym.

Zbiór

$$(4.5) \quad S_{Io} = \left\{ s: \bigvee_{\lambda \in (Z^+ - R)} [\Phi(\lambda, s) = 0] \right\} - S_{Id}$$

nazywać będziemy obszarem oscylacyjnej utraty stateczności. Natomiast zbiór określony następująco:

$$(4.6) \quad S_{Im} = S_I - S_{Id} - S_{Io}$$

nazywać będziemy obszarem utraty stateczności o charakterze dywergentno-oscyłacyjnym lub mieszanym.

Wyznaczenie *explicite* zbioru  $S_I$  z równania (4.12) jest zwykle czasochłonne, a w przypadku równań algebraicznych stopnia wyższego aniżeli czwarty lub niewymiernych równań charakterystycznych możliwe tylko w szczególnych przypadkach.

Analizę stateczności ułatwia niekiedy wykorzystanie pomocniczych kryteriów stateczności, których spełnienie równoznaczne jest następującemu warunkowi:

$$(4.7) \quad \bigwedge_{\lambda} [\Phi(\lambda, s_0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 0]$$

dla ustalonych parametrów układu i parametrów ruchu.

W przypadku, gdy równanie charakterystyczne ma postać wielomianu powszechnie stosowane są następujące kryteria pomocnicze:

Kryterium HURWITZA (omówione m.in. w [11]) żądające dodatniości wyznacznika oraz jego głównych minorów, którego wyrazami są odpowiednie współczynniki wielomianu.

Kryterium MICHAJŁOWA (patrz [11]) polega na badaniu konfiguracji krzywej

$$(4.8) \quad \Phi_1 = f(\Phi_2)$$

danej parametrycznie dla  $-\infty < \omega < +\infty$ , gdzie:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(\omega, s_0) = \operatorname{Re}[\Phi(\lambda, s_0)|_{\lambda=i\omega} = 0], \\ \Phi_2 &= \Phi_2(\omega, s_0) = \operatorname{Im}[\Phi(\lambda, s_0)|_{\lambda=i\omega} = 0]. \end{aligned}$$

Uogólnione kryterium MICHAJŁOWA [7], w którym analizuje się ukształtowanie krzywych

$$(4.10) \quad \Phi_j(\omega, s) = 0, \quad j = 1, 2; \quad \omega \in \Omega$$

w przestrzeni  $\Omega \times U \times V$  umożliwiają przejrzysty podział parametrów na obszary stateczności i niestateczności.

W przypadkach bardziej złożonych równań charakterystycznych, w których wymienione kryteria nie obowiązują, wykorzystujemy elementy teorii funkcji zmiennej zespolonej oraz metody przybliżone i technikę cyfrową. W niniejszym komunikacie, w celu przykładowego określenia obszarów niestateczności, wykorzystamy również następujące kryteria pomocnicze będące rozwinięciem uogólnionego twierdzenia MICHAJŁOWA.

Założmy, że istnieje taki zbiór  $Q^*$ ,  $Q^* \subset Q$ , w którym  $\omega = \varphi_j(s)$  ( $j = 1, 2$ ) są ciągłymi, jednoznaczными gałęziami  $\Phi_j(\omega, s) = 0$ , tj.

$$(4.11) \quad [\omega = \varphi_j(s)] \equiv [\Phi_j(\omega, s) = 0] \quad \text{dla} \quad \langle \omega, s \rangle \in Q^*$$

oraz następujące podzbiory:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} Q_L^* &= \{q: [(\Phi(q) = 0) \wedge (q \in Q^*)]\}, \\ S^* &= \{s: \bigvee_{\omega} [\langle \omega, s \rangle \in Q^*]\}, \\ S_L^* &= \{s: \bigvee_{\omega} [\langle \omega, s \rangle \in Q_L^*]\}, \end{aligned}$$

$$S^{*(j)} = \left\{ \langle u, v \rangle: \bigvee_{0 < K < 1} [(u = u_0 + Ku_j - Ku_0) \wedge (v = v_0 + Kv_j - Kv_0) \wedge (\langle u, v \rangle \in S^*)] \right\}.$$

Zbiór parametrów ruchu  $S^*$  posiada następujące własności:

**Własność 1.** Jeżeli istnieje  $q^0 = \langle \omega^0, s^0 \rangle$ , ( $q^0 \in Q_L^*$ ) taki, że  $\varphi_j(s^0)$ , ( $j = 1, 2$ ) jest analityczna oraz spełniony jest następujący warunek

$$(4.13) \quad \bigvee_{s_1, s_2} \bigwedge_{s^{(1)}, s^{(2)}} [(s^{(1)} \in S^{*(1)}) \wedge (s^{(2)} \in S^{*(2)}) \Rightarrow (\varphi_1(s^{(1)}) - \varphi_2(s^{(1)})(\varphi_1(s^{(2)}) - \varphi_2(s^{(2)}) < 0)],$$

to istnieje niepusty zbiór  $S_I^* = S_I \cap S^*$  będący obszarem niestateczności.

**Własność 2.** Jeżeli;  $\varphi_j(s)$ , ( $j = 1, 2$ ) jest analityczna dla  $s \in S_L^*$ , istnieje taki  $q^0 \in Q_L^*$ , że spełniony jest warunek (4.13) oraz zachodzi

$$(4.14) \quad \bigvee_{s_1, s_2} [(s_1 \in S^* \cap S_S) \vee (s_2 \in S^* \cap S_S)],$$

to  $S_L^*$  jest podzbiorem obszaru quasi-niestateczności ( $S_L^* \subset S_Q$ ) i tworzy granicę pomiędzy obszarami stateczności i niestateczności.

Powyższe własności są wystarczającymi warunkami na to, aby istniał obszar niestateczności oraz granica tego obszaru.

Istnienie obszaru niestateczności przy spełnionym warunku (4.13) łatwo wykazać rozwijając  $\Phi(\lambda, s)$  w otoczeniu  $q^0$  w szereg Taylora. Układ równań otrzymany po rozdzielaniu części rzeczywistej i urojonej (w przypadku aproksymacji rozwinięcia liniowym przybliżeniem oraz wykorzystaniu faktu, że  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial v_0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial u^0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial \omega^0} \in R$ ) przyjmie postać:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} (\omega - \omega^0) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} \varepsilon + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v^0} (v - v^0) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} (u - u^0) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} (\omega - \omega^0) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \varepsilon + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v^0} (v - v^0) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^0} (u - u^0) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:  $\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-1}$ ,

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \omega^0} = \left. \frac{\partial \Phi_j(\omega, u, v)}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega^0 \\ u = u^0 \\ v = v^0}} \quad \text{oraz analogicznie} \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial u^0}, \frac{\partial \Phi_j}{\partial v^0}.$$

Wyrażenie określające dekrement narastania fali wyznaczony z powyższego układu równań wyrazi się wzorem

$$(4.16) \quad \varepsilon = \frac{\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v^0} \right) (v^0 - v) + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^0} \right) (u^0 - u)}{\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega^0} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega^0} \right)^2}.$$

W szczególnym przypadku, w którym  $q^0$  jest punktem przegięcia jednej z powierzchni  $\Phi_j$  (punkt typu parabolicznego) o płaszczyźnie stycznej będącej zarazem styczną do drugiej powierzchni, aby otrzymać związek podobny do (4.16) należy uwzględnić trzy lub więcej wyrazów szeregu. Z postaci wzoru (4.16) wynika, że w otoczeniu  $s_0$  istnieje takie  $s = s_I$ , że  $\varepsilon(s_I) > 0$ , czyli  $s_I \in S_I$ .

Wykorzystując fakt, że  $\Phi(\lambda, s)$  jest analityczna dla  $q \in Q_L^*$  łatwo wykazać własność 2.



Wymienione wyżej własności oraz kryteria pozwalają na zbadanie zagadnienia stateczności rozważanego przez nas układu. Analizie numerycznej dla wybranych przypadków poświęcimy następną część niniejszej pracy.

## 5. Analiza numeryczna

**5.1. Przypadek jednopunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem.** Równanie charakterystyczne oddziaływania ciągnia z tłumikami otrzymamy spełniając równanie (2.2) rozwiązaniami (3.1), (3.2). Przyjmie ono następującą formę:

$$(5.1) \quad \lambda^2 + (\beta_3 + \beta_4 - 2ur)\lambda - \beta_3 ur + r^2(u^2 - 1) = 0.$$

Natomiast podstawą do dyskusji stateczności oddziaływania jednopunktowego oscylatora z tłumionym ciągnem będzie równanie (3.12) zapisane następująco:

$$(5.2) \quad \frac{(1-v^2)H(1-|v|)}{[(\beta_3 + \beta_4)(\beta_3 + \beta_4 + 8\lambda)v^2 + \beta_4^2 u^2 - 2(\beta_3 + \beta_4 + 2\lambda)\beta_4 uv + 4(\lambda - \beta_3 - \beta_4)\lambda]^{1/2}} + \frac{\gamma_1 [\lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2]}{(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)\lambda^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \lambda^2)\lambda + \alpha_1 \alpha_2} = 0.$$

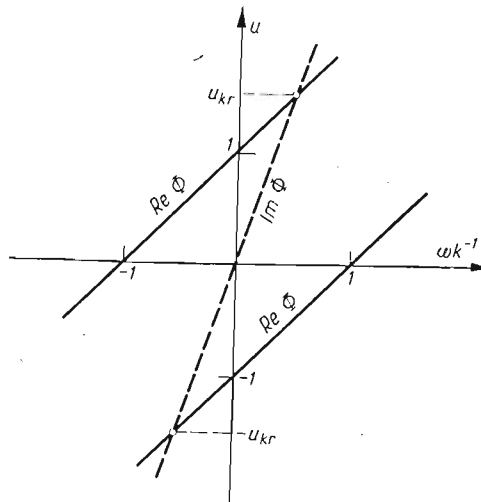
Stosując do (5.1) uogólnione kryterium MICHAJŁOWA otrzymamy następujące wyrażenie określające granicę obszaru niestateczności:

$$(5.3) \quad u_{kr} = \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_4}$$

oraz obszar niestateczności

$$(5.4) \quad U_I = \left\{ u : |u| > \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_4} \right\}; \quad U_I \times V = S_I^{(1)} \subset S_I.$$

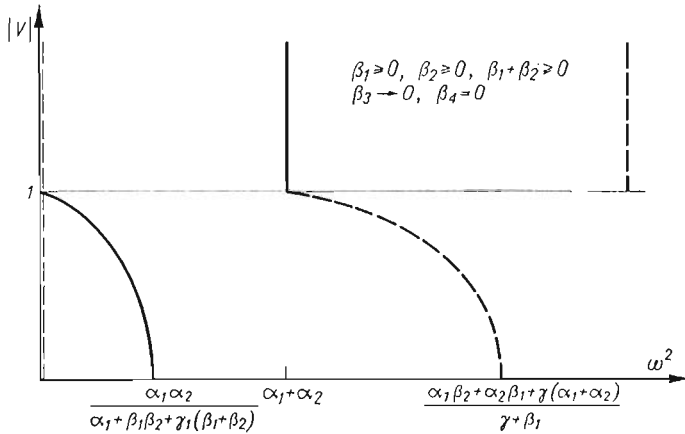
Konfigurację krzywych  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  [określonych wzorem (4.9)] na płaszczyźnie fazowej  $\omega k^{-1}, u$  dla równania (5.1) przedstawiono na rys. 2.



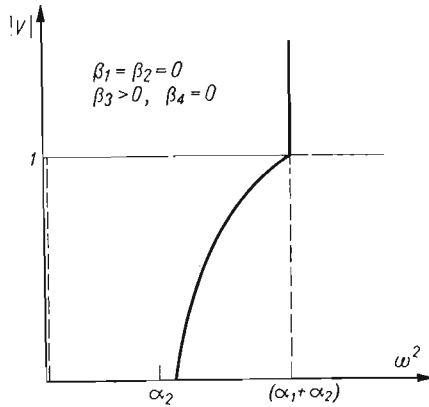
Rys. 2

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy  $\beta_3 = 0$  ze wzoru (5.3) otrzymujemy znaną w literaturze wartość prędkości krytycznej tłumików przemieszczających się wzdłuż struny. Rezultat ten podany jest m.in. w pracy [10] poświęconej analizie stateczności struny, której gęstość opisana jest funkcją losową.

Obraz płaszczyzny fazowej  $\omega, v$  ilustrujący stateczność oddziaływania oscylatora z cięgnem uzyskany na podstawie równania charakterystycznego (5.2) dla wybranych parametrów układu przedstawiono na rys. 3 i 4.



Rys. 3



Rys. 4

Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 3 dla  $|u| < 1$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$ ,  $\beta_3 \rightarrow 0$ ,  $\beta_4 \rightarrow 0$  można wnioskować, że gdyby  $\Phi_1$  oraz  $\Phi_2$  określić w przestrzeni  $\omega, u, v$ , to uogólnione kryterium stateczności MICHAJŁOWA byłoby spełnione dla całego zakresu prędkości  $v$  poza wartością  $v = 1$

$$(5.5) \quad \{\langle u, v \rangle : (|u| < 1) \wedge (v \neq 1)\} \subset S_S.$$

Natomiast z wykresu przedstawionego na rys. 4 dla  $\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 > 0, \beta_4 = 0$  wynika, że pomimo zmiany konfiguracji krzywych  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  dla  $|v| < 1$  obszar

$$(5.6) \quad \{ \langle u, v \rangle : [(u \in R) \wedge (|v| < 1)] \} \subset S_S$$

pozostaje obszarem stateczności, a obszar

$$(5.7) \quad \{ \langle u, v \rangle : [(u \in R) \wedge (|v| > 1)] \} \subset S_Q$$

przechodzi w obszar quasi-niestateczności.

Fakt, że wartość prędkości ciągną względem otoczenia nie ma wpływu na stateczność wynika z braku względnego tłumienia ciągną ( $\beta_4 = 0$ ).

W przypadku  $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_3 = \beta_4 = 0$  możemy badać stateczność oscylatora współdziałającego z ciągnem wykorzystując kryterium stateczności HURWITZA. Jest ono równoważne warunkom:

dla  $|v| \leq 1$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} & [(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)(1 - v^2) + 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1][\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1]^{-1} > 0, \\ & [(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(1 - v^2) + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma_1][\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1]^{-1} > 0, \\ & [(\alpha_1 + \alpha_2)2\gamma_1 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(1 - v^2)][(\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)(1 - v^2) + 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1] > \\ & > \alpha_1 \alpha_2 [\beta_1(1 - v^2) + 2\gamma_1] \end{aligned}$$

oraz dla  $|v| > 1$ .

$$(5.9) \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

Z (5.8) wynika, że dla  $|v| < 1$  ruch oscylatora jest stateczny. Pokrywa się to z wnioskiem (5.6) uzyskanym dla  $\beta_3 > 0$ . Podobnie, obszar (5.7) jest obszarem asymptotycznej stateczności jedynie wtedy, gdy  $\beta_1 + \beta_2 > 0$ .

Na uwagę zasługuje fakt, że ukształtowanie obszarów stateczności w rozważanych dotychczas przypadkach różni się zasadniczo od obszarów uzyskanych w [7] dla układu gęsto, równomiernie rozłożonych oscylatorów. Szereg jakościowo nowych efektów wynika z analizy dwupunktowego oddziaływania pojedynczego oscylatora z układem ciągłym, co będzie teraz przedmiotem rozważań.

**5.2. Oddziaływanie dwupunktowe.** Równanie charakterystyczne dla przypadku dwupunktowego oddziaływania z ciągnem (rys. 1b), otrzymane po wykorzystaniu związków (3.10) i (3.11), wyrazi się następująco:

$$(5.8) \quad \frac{H(1 - v^2) + \frac{1}{2}e^{-(h_1 + ik_1)L} + \frac{1}{2}\text{sign}(1 - v^2)e^{-(h_2 + ik_2)L}}{2\gamma_1 L[h_1 - h_2 + i(k_1 - k_2)]} = \\ = \frac{\lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 \lambda^3 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2)\lambda^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)\lambda + \alpha_1 \alpha_2}.$$

Oznaczając:  $A = \lambda L, 4\gamma_1 L = \gamma_2, \alpha_j L^2 = \kappa_j; (j = 1, 2), \beta_i L = \delta_i (i = 1, 2, 3, 4), \omega L = \Theta, \varepsilon_0 a^{-1} L = \sigma$  oraz kładąc  $\delta_3 = \delta_4 = 0$ , co znacznie upraszcza rachunkową część pracy, otrzymamy

$$(5.9) \quad (1 + \delta_1 F)A^3 + [\delta_1 + \delta_2 + (\kappa_1 + \delta_1 \delta_2)F]A^2 + [\kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_1 \delta_2 + \kappa_2 \delta_1)F]A + \\ + \kappa_1 \kappa_2 F = 0,$$

gdzie

$$F = F(A, v) = \frac{\exp\left(\frac{-A}{1-|v|}\right) + \left[2 + \exp\left(\frac{-A}{1-|v|}\right)\right] H(1-v^2) - H(v^2-1) \exp\left(\frac{-A}{|v|-1}\right)}{\gamma_2(v^2-1)^{-1}}$$

Szereg wniosków dotyczących wpływu poszczególnych rodzajów tłumienia, uzyskanych dla przypadku jednopunktowego oddziaływania, pozostaje słusznych. Aby umożliwić porównanie wyników uzyskanych dla pojedynczego oscylatora z rezultatami prac [6, 7], uzyskanymi dla oscylatorów swobodnych, rozważymy bardziej szczegółowo przypadek  $\kappa_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Jeżeli w (5.9) uwzględnić, że  $A = \sigma + i\Theta$  oraz zażądać niezależnego spełnienia równania zarówno przez część rzeczywistą jak urojoną, wówczas otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \sigma^2 + A(\sigma, \Theta)\sigma + \kappa_1 - \Theta^2 - B(\sigma, \Theta)\Theta &= 0 \\ 2\sigma\Theta + A(\sigma, \Theta)\Theta + B(\sigma, \Theta)\sigma &= 0, \end{aligned} \quad \text{dla } |v| \geq 1,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(\sigma, \Theta) &= \frac{v^2-1}{\gamma_2} e^{-\frac{\sigma}{v+1}} \left( \cos \frac{\Theta}{v+1} - e^{-\frac{2\sigma}{v^2-1}} \cos \frac{\Theta}{v-1} \right), \\ B(\sigma, \Theta) &= \frac{v^2-1}{\gamma_2} e^{-\frac{\sigma}{v+1}} \left( \sin \frac{\Theta}{v+1} - e^{-\frac{2\sigma}{v^2-1}} \sin \frac{\Theta}{v-1} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z postaci układu równań (5.10) wynika, iż  $\sigma$  jest parzystą funkcją  $\Theta$ . Wystarczy więc rozważyć zakres  $\Theta \geq 0$ . Kładąc w równaniach (5.10)  $\sigma = 0$  otrzymać możemy zależności określone wzorami (4.9), które mogą posłużyć do badania stateczności z wykorzystaniem własności podanych w części 4.

W celu uwypuklenia wpływu poszczególnych parametrów na konfigurację obszarów niestateczności na rys. 5÷7 naniesiono wyniki oszacowań przy różnych założeniach.

Wykresy przedstawione na rys. 5 uzyskano przyjmując, że

$$(5.11) \quad \left| \exp\left(\frac{-A}{|v|-1}\right) - \exp\left(\frac{-A}{|v|+1}\right) \right| \leq 2,$$

ilustrują one wpływ parametrów  $\kappa_1$ ,  $\gamma_2$  na kształt obszaru, w którym znajdować się może krzywa  $\Phi_1$  dana równaniem  $\Phi_1(\Theta, v) = 0$ . Na rys. 6 naniesiono obszary  $\sigma(\Theta, v) \geq 0$ , których granicami są krzywe  $\Phi_2$ . Obszary te wyznaczono wykorzystując warunek

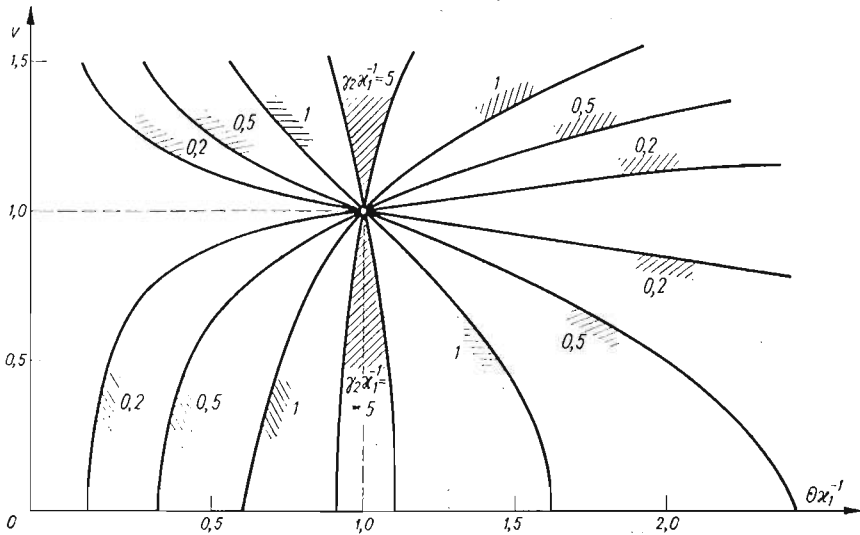
$$(5.12) \quad \sigma \geq 0 \Rightarrow A(\sigma, \Theta) \leq 0,$$

którego słuszność można wykazać stosując do równania (5.9) twierdzenie Rouché.

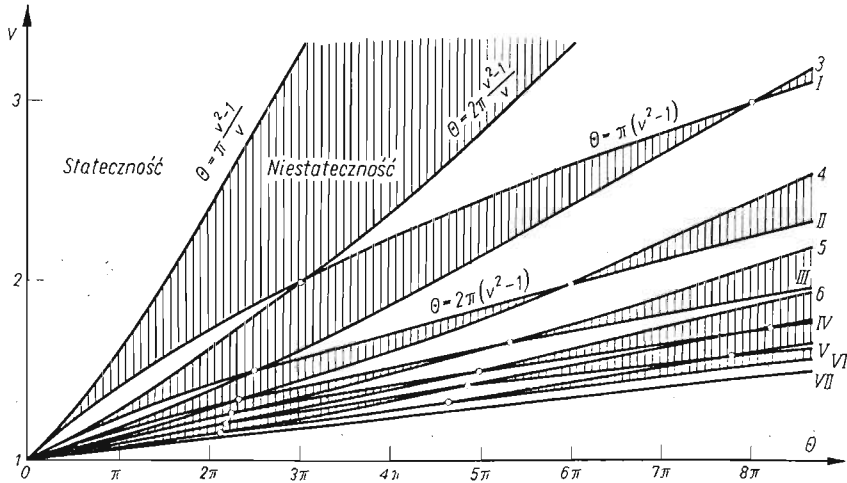
Nałożenie obszarów z rys. 5 i 6 pozwala na oszacowanie odpowiadającego  $\sigma \geq 0$  zakresu prędkości  $v$  w zależności od  $\kappa_1$  i  $\gamma_2$ . Oszacowanie jest tym lepsze, im większa jest wartość parametru  $\gamma_2$  oraz im mniejsza wartość  $\kappa_1$ . Charakterystyczny jest fakt, że może istnieć taka graniczna wartość  $v = v_c$ , że

$$V_{cs} = \{v: (|v| > v_c)\}$$

jest zakresem stateczności ruchu układu. Łatwo zauważyć, że jeżeli  $\kappa_1 \rightarrow 0$  (np. jeśli  $L \rightarrow 0$ ), to  $v_c \rightarrow 1$ , co pokrywa się z rezultatami uzyskanymi dla przypadku jednopunktowego oddziaływania oscylatora z ciągnem.



Rys. 5

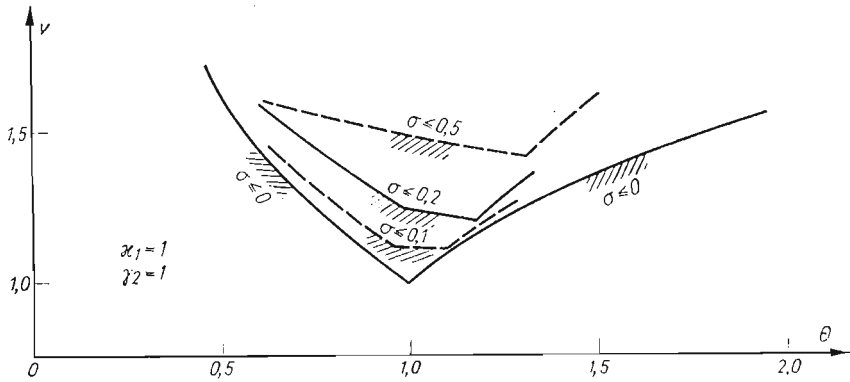


Rys. 6

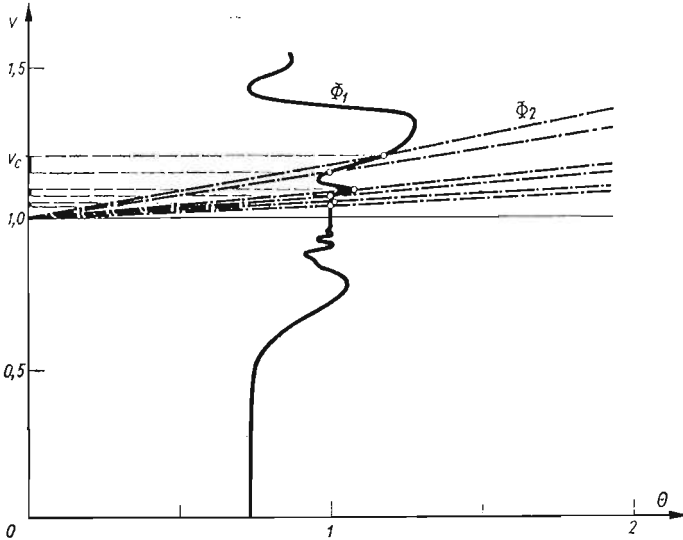
Na rys. 7 naniesiono obszary możliwych rozwiązań niestatecznych o dekrementach:  $\sigma > 0$ ;  $\sigma > 0,1$ ;  $\sigma > 0,2$ ;  $\sigma > 0,5$  dla  $\kappa_1 = \gamma_2 = 1$ .

Z kształtu wykresów wynika, że większe wartości dekrementu narastania drgań są możliwe przy większych wartościach prędkości ruchu.

Ukształtowanie krzywych  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  na płaszczyźnie  $\Theta, v$  oraz konfigurację zakresów niestateczności dla  $\kappa_1 = \gamma_2 = 1$  ilustruje rys. 8.



Rys. 7



Rys. 8

Widzimy, że w przypadku tym, typowym dla dwupunktowego oddziaływania obszar niestateczności składa się z nieskończonej, przeliczalnej liczby zakresów niestateczności o charakterze oscylacyjnym, z których pierwszy z dokładnością do 0,02 jest następujący  $1,15 < |v| < 1,20$ , a pozostałe należą do zbioru  $1,0 < |v| < 1,09$ .

Przy prędkości  $v = 1$  możliwa jest utrata stateczności ciągu, która w zależności od wartości współczynników tłumienia może mieć charakter dywergentny lub oscylacyjny.

#### 6. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że układ oscylator-ciężno-otoczenie w ruchu względnym w przypadku ciągu tłumionego tłumikami o charakterystyce  $\beta_4 > 0$  jest niestateczny przy prędkościach ruchu ciągu względem otoczenia  $|u_0| > a(1 + \beta_3/\beta_4)$ .

Jednopunktowe oddziaływanie oscylatora powoduje utratę stateczności układu tylko przy prędkości względnego ruchu równej prędkości poprzecznych fal sprężystych w ciągnie.

Dwupunktowe oddziaływanie oscylatora powoduje utratę stateczności przy prędkościach ruchu z ograniczonego przedziału, w którym znajduje się przeliczalny (dla nietłumionego układu nieskończony) zbiór zakresów niestateczności. Z uwagi na liniowość diskutowanego przez nas układu rozwiązania niestateczne narastają nieograniczenie. W realnych, nieliniowych układach występowałyby cykle graniczne, które po przyjęciu nieliniowych równań ruchu można wyznaczyć stosując procedurę podaną w pracy [9].

Wydaje się, że rezultaty uzyskane dla względnie prostego modelu pozostaną jakościowo słuszne dla bardziej złożonych układów tego typu i pozwolą wyjaśnić niektóre z istotnych problemów dotyczących stateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. T. KENNEY, *Stady-state vibrations of beams on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech. 4, 21, (1954).
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Dynamika mas skupionych poruszających się po belce leżącej na sprężystym podłożu*, Rozpr. Inż., 2, 13 (1965).
3. А. П. Филипов, С. С. Кохманюк, *Динамические воздействия подвижных нагрузок на стержни*, Наукова Думка, Киев 1967.
4. В. В. Болотин, Труды МИИТ 74, Транскельдифиздат М. 1950.
5. H. D. NELSON, R. A. CONVER, *Dynamic instability of beam carrying moving masses*, J. Appl. Mech., 4, 38 (1971).
6. S. KALISKI, *Perfect resonance of viscoelastic surface waves in bounded body, with a set of oscillators or masses moving over the surface*, Arch. Appl. Mech., 6, 20 (1968).
7. R. BOGACZ, *Interaction between a moving set of nonlinear oscillators and a travelling wave*, Proc. Vibr. Probl., 1, 9 (1968).
8. S. KALISKI, *The perfect self-excited piezoquartz resonator with an external electron stream*, Proc. Vibr. Probl., 4, 9 (1968).
9. R. BOGACZ, *Об основных видах решений некоторой самовозбуждающейся нелинейной системы с бегущей волной*, Труды Пятой Международной Конференции по Нелинейным Колебаниям, Киев 1969.
10. S. KALISKI, S. WOROSZYŁ, *O pewnym samowzbudnym falowym układzie stochastycznym*, Biul. WAT, 1973.
11. И. Г. Арманович, Г. А. Луниц, Л. Э. Эльсгольц, *Теория Устойчивости*, Наука, Москва 1965.

#### Резюме

#### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С НАПРЯЖЕННОЙ СТРУНОЙ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Работа посвящена анализу устойчивости системы, состоящей из осциллятора, движущегося вдоль неограниченной струны, которая в свою очередь движется по отношению к окружающей среде. Полагается, что скорость относительного движения постоянна.

Представлены критерии устойчивости для случаев одно и двухточечного взаимодействия осциллятора со струной. Определены области неустойчивости. Их структура в случае одного осциллятора существенно отличается от структуры таких областей для системы осцилляторов, движущихся вдоль струны или для случая электронов, взаимодействующих с поверхностными волнами.

## S u m m a r y

## ON STABILITY OF INTERACTION BETWEEN AN OSCILLATOR AND A TIE IN RELATIVE MOTION

The paper is devoted to stability analysis of the system consisting of an oscillator which moves along the unbounded tie (string). The tie and the surroundings are also in relative motion. The velocities of motion are assumed to be constant.

The criterions of instability are given. Existence of instability regions in the case of one and two points of interactions between the oscillator and the tie is proved. The configuration of instability regions in the case of single oscillator is fundamentally different from that occurring in the case of the set of oscillators which moves along the string or in the case of electrons interacting with surface waves.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 grudnia 1975 r.*

---