MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 14 (1976)

ŚREDNIE NAPRĘŻENIA W STOCHASTYCZNYM OŚRODKU WIELOSKŁADNIKOWYM

ANDRZEJ TRZĘSOWSKI (WARSZAWA)

1 Wstęp

Tematem pracy jest problem istnienia funkcjonalnego związku między średnim naprężeniem a średnim odkształceniem w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym (nazywanym też ośrodkiem wielofazowym).[1]

W teorii stochastycznych ośrodków z gładkim rozkładem niejednorodności dawno znany jest formalny algorytm poszukiwania postaci funkcjonalnego związku między średnim naprężeniem a średnim odkształceniem (np. [4, 5]). Nie znano jednak dotychczas matematycznych warunków poprawności tego algorytmu, a o wzorach uzyskanych tą drogą zakładano, że obowiązują również w przypadku stochastycznych ośrodków wieloskładnikowych. W pracy podano warunki dostateczne stosowalności wyżej wymienionego algorytmu w przypadku ośrodków wieloskładnikowych; uzyskane wyniki obowiązują również dla ośrodków z gładkim rozkładem niejednorodności. Zaadaptowanie wspomnianego algorytmu do przypadku skokowej niejednorodności wymagało uprzedniego sformułowania deterministycznych warunków dla rozważanych losowych pól opisujących ośrodek wieloskładnikowy. W rozdz. 2 pracy podano szkic rozumowania prowadzący do sformułowania tych warunków (ścisłe ich sformułowanie podane jest w pracy [1]).

Do pracy dołączono «Dodatek», w którym skonstruowano podstawową w rozważaniach funkcyjną przestrzeń $L_2(\Omega\times G;\nu)$ oraz podano oznaczenia stosowane w pracy.

2. Diasprężysty opis ciała skokowo-niejednorodnego

Rozważmy ciało niejednorodne, nieograniczone o rozkładzie współczynników sprężystości danym gładką funkcją $\mathbf{c}(x)$, $x\in R^3$ i znajdujące się w stanie równowagi:

$$L\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{k}(x), \qquad x\in R^3, \tag{1}$$

gdzie oznaczono[2]

$$L\boldsymbol{\varepsilon}(x) = -\operatorname{div}[\mathbf{c}(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(x)], \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}')(x).$$

W teorii ośrodków wielofazowych interesuje nas porównanie naprężenia $\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ w ciele niejednorodnym, z naprężeniem $\mathbf{T}_0(x) = \mathbf{c}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ w pewnym ciele jedno-

[1] «Ośrodkiem wieloskładnikowym» nazywamy klasę ciał skokowo niejednorodnych o takim samym typie niejednorodności.

[2] Symbol „·" oznacza pełne nasunięcie tensora.

rodnym o współczynnikach sprężystości $\mathbf{c}_0$. Np. możemy mieć do czynienia z sytuacją, kiedy dla tensora fluktuacji współczynników sprężystości wokół poziomu $\mathbf{c}_0$

$$\mathbf{c}''(x) = \mathbf{c}(x) - \mathbf{c}_0$$

istnieje pewna miara ϕ małości odchyłek taka, że

$$\phi(\mathbf{c}'') < 1 .$$

Oznaczmy

$$\tau(x) = \mathbf{c}''(x) \cdot \varepsilon(x),$$

$$\mathbf{X}(x) = \operatorname{div} \tau(x),$$

$$\underset{\circ}{L}\, \varepsilon(x) = -\operatorname{div}[\mathbf{c}_0 \cdot \varepsilon(x)].$$

W tych oznaczeniach równanie (1) jest równoważne równaniu

$$\underset{\circ}{L}\varepsilon(x) = \mathbf{X}(x) + \mathbf{k}(x), \qquad x \in R^3. \tag{2}$$

W ten sposób przedstawiliśmy niejednorodność przez wprowadzenie dodatkowych sił objętościowych $\mathbf{X}(x)$ w pewnym ośrodku jednorodnym. To formalne postępowanie można zinterpretować w ramach teorii defektów. Załóżmy mianowicie, że nośnik tensora fluktuacji $\mathbf{c}''$

$$\operatorname{supp} \mathbf{c}'' = \overline{\{x \in R^3 : \mathbf{c}''(x) = \mathbf{0}\}} \quad {}^{3)}$$

jest zbiorem zwartym (tj. domkniętym i ograniczonym). Wtedy możemy $\mathbf{X}(x)$ reprezentować przez funkcjonał (dystrybucję)

$$\mathbf{X}(x) = \int\limits_{\operatorname{supp} \mathbf{c}''} \tau(y) \cdot \nabla_x \delta_{x-y} dy, \tag{3}$$

gdzie δ_x — delta Diraca. ∇_x — gradient przy różniczkowaniu po zmiennych $x = (x_1, x_2, x_3)$. Całki typu $\mathbf{X}(x)$ rozważane są w teorii defektów.[4] Z uwagi na symetrię tensora τ: $\tau(x) = \tau(x)^t$ — pole $\mathbf{X}(x)$, $x \in R^3$ może być, w języku teorii defektów, interpretowane jako objętościowy rozkład (o gęstości τ i skoncentrowany w zbiorze $\operatorname{supp} \mathbf{c}''$) podwójnych sił bez momentu. W ten sposób możemy więc interpretować niejednorodność jako defekt jednorodności. Sprężyste ciało niejednorodne z tak reprezentowaną niejednorodnością nazywane jest *ciałem diasprężystym* [9]; tensorowa funkcja τ bywa nazywana tensorem polaryzacji [4].

Równanie (2) z $\mathbf{X}(x)$ określonym formułą (3) ma rozwiązanie postaci:

$$\varepsilon(x) = \mathbf{L} \cdot \tau(x) + \overline{\int\limits_{R^3}} \mathbf{U}(x, x') \cdot \tau(x') dx' + \varepsilon_0(x), \tag{4}$$

gdzie oznaczono $\mathbf{L} = \int\limits_{S(0,1)} \nabla \mathbf{e}(z) \otimes \mathbf{n}(z) dS(z)$, $S(\mathbf{0}, 1)$ — sfera o środku $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ i promieniu $R = 1$, $\mathbf{e}(z)$ — rozwiązanie podstawowe dla operatora Lamé'go materiału o stałych sprężystości $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{n}(z)$ — wersor normali.

$$\mathbf{U}(x, x') = \nabla\nabla \mathbf{e}(x - x'), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0^t), \quad \mathbf{u}_0(x) = \int\limits_{R^3} \mathbf{e}(x - x') \cdot \mathbf{k}(x') dx',$$

---

[3] Symbol $\overline{A}$ oznacza, że bierzemy domknięcie zbioru A.

[4] O ich matematycznym sensie — patrz [1, 2].

gdzie $\fint_{R^3}$ jest symbolem całki w sensie wartości głównej Cauchy'ego. A więc tensor polaryzacji spełnia równanie całkowe

$$\tau(x) = \mathbf{L}(x)\cdot\tau(x) + \fint_{R^3} \mathbf{G}(x, x')\cdot\tau(x')dx' + \sigma_0(x), \tag{5}$$

gdzie oznaczono: $\mathbf{L}(x) = \mathbf{c}''(x):\mathbf{L}$, $\mathbf{G}(x, x') = \mathbf{c}''(x):\mathbf{U}(x, x')$, $\sigma_0(x) = \mathbf{c}''(x)\cdot\varepsilon_0(x)$.[5] Zauważmy, że o ile dla $\varepsilon(x)$ będącego rozwiązaniem (1) funkcja τ powinna być klasy C^1, to równania całkowe (4) i (5) dopuszczają nawet nieciągłe tensory polaryzacji (np. klasy $L_2(G)$, $G \subset R^3$ obszar, którego domknięcie $\bar{G}$ jest zwarte). Można więc spodziewać się, że równania (4) i (5) będą obowiązywać również w przypadku liniowo-sprężystego ciała ze skokowym rozkładem niejednorodności, tj. opisywanym przez funkcję prostą

$$\mathbf{c}(x) = \sum_{\alpha=0}^{N} \chi_\alpha \mathbf{c}_\alpha,$$

gdzie $\mathbf{c}_0$ jest tensorem współczynników sprężystości, w nieskończonym ośrodku, w którym w obszarach G_α ($\alpha = 1 \dots N$) znajdują się inkluzje o stałych sprężystości $\mathbf{c}_\alpha$; χ_α jest funkcją charakterystyczną obszaru G_α oraz $G_0 = R^3 / \bigcup_{\alpha=1}^{N} \bar{G}_\alpha$.

Nazwijmy «odkształceniem ośrodka skokowo-niejednorodnego» symetryczną tensorową funkcję $\varepsilon(x)$ walencji 2 i klasy $L_2(R^3)$ taką, że spełniona jest «zasada prac wirtualnych» dla dowolnej wektorowej funkcji $\mathbf{v} \in C_0(R^3)$[6]

$$\int_{R^3} \varepsilon(x)\cdot\mathbf{c}(x)\cdot\varepsilon(\mathbf{v})(x)dx = \int_{R^3} \mathbf{k}(x)\cdot\mathbf{v}(x)dx, \tag{6}$$

gdzie oznaczono $\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}')$. Definicja ta dopuszcza możliwość, że pole odkształceń ε spełniające (6) jest postaci

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}'), \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{u}: R^3 \to R^3$ jest funkcją klasy $L_2(R^3)$, ciągłą, dla której jest określony gradient w sensie SOBOLEWA $\nabla\mathbf{u} \in L_2(R^3)$.

Pytamy się, czy tak zdefiniowane odkształcenie ośrodka skokowo-niejednorodnego spełnia równanie (4) [a zatem i (5)].

W pracy [1] rozważano ten problem w przypadku, gdy ciało zajmuje nie całą przestrzeń R^3, ale ograniczony podobszar $G \subset R^3$ ($0 < \mathrm{vol}\, G < \infty$), którego domknięcie $\bar{G}$ jest postaci $\bar{G} = \bigcup_{\alpha=0}^{N} \bar{G}_\alpha$, przy czym $G_\alpha \cap G_\beta = \phi$ dla $\alpha \neq \beta$ oraz jeżeli Γ jest brzegiem obszaru G, to $\Gamma \cap \bar{G}_\alpha = \phi$ dla $\alpha = 1 \dots N$. Rozkład niejednorodności w tym obszarze opisywany jest przez ograniczoną funkcję tensorową $\mathbf{c}(x)(x \in G)$ taką, że $\mathbf{c}(x) = \mathbf{c}_\alpha$ dla $x \in G_\alpha$. Z założeń o podziale obszaru G na podobszary G_α wynika więc, że rozważane są ciała skokowo-niejednorodne, jednorodne przy brzegu Γ obszaru G.

---

[5] Symbol „:" oznacza nasuwanie tensorowe po dwu sąsiednich wskaźnikach.

[6] $C_0(R^3)$ jest zbiorem funkcji klasy C^∞ o zwartych nośnikach.

Przy dodatkowych założeniach o gładkości brzegów inkluzji G_α, $\alpha = 1, \ldots, N$, oraz brzegu Γ, pole odkształceń $\varepsilon(x)(x \in G)$ klasy $L^2(G)$, postaci (7) i spełniające odpowiednią zasadę prac wirtualnych (uogólnioną na funkcje różniczkowalne w sensie Sobolewa)[7)], spełnia także równanie całkowe [1]:

$$\varepsilon(x) = \mathbf{L} \cdot \tau(x) + \int\limits_{G} \mathbf{U}(x, x') \cdot \tau(x') dx' + \varepsilon_0(x), \tag{8}$$

$$\tau(x) = \mathbf{c}''(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot \mathbf{c}''(x) \mathbf{c}''(z) = \mathbf{c}(x) - \mathbf{c}_0 .$$

Tensor $\mathbf{L}$ został podany w omówieniu wzoru (4); $\mathbf{U}(x, x')$ jest tensorową funkcją walencji 4 o osobliwości rzędu r^{-3}, $r = ||x - x'||$; $\varepsilon_0(x)$ jest odkształceniem ciała jednorodnego o stałych sprężystości $\mathbf{c}_0$, zajmującego obszar G i obciążonego tymi samymi siłami zewnętrznymi, co rozważane ciało niejednorodne.

Siły powierzchniowe w ciele skokowo-niejednorodnym opisywane są symetryczną funkcją tensorową walencji 2, klasy $L_2(G)$ i postaci

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}(x) \cdot \varepsilon(x), \tag{9}$$

gdzie $\mathbf{c}(x)$ jest funkcją rozkładu niejednorodności, a $\varepsilon(x)$ dane jest równaniem (8).

3. Stochastyczny opis ośrodka wieloskładnikowego

W pracy rozważany jest ośrodek wieloskładnikowy składający się z ciał skokowo-niejednorodnych [por. 1, odnośnik 1)], których stan opisywany jest równaniami (8) i (9). Ośrodek wieloskładnikowy posiada stochastyczną strukturę spełniającą następujące założenia:

A. Każde ciało niejednorodne zajmuje taki sam obszar $G \subset R^3$ oraz składa się z tych samych liniowo-sprężystych materiałów o stałych sprężystości $\mathbf{c}_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots, N$. Materiał o stałych sprężystości $\mathbf{c}_\alpha$ zajmuje podobszar $G_\alpha \subset G$, ale rozmieszczenie, kształt i wielkości obszarów G_α są zmiennymi losowymi. Przy brzegu obszaru G zawsze występuje materiał o stałych $\mathbf{c}_0$.

B. Jedyną przyczyną losowości funkcji tensorowych opisujących ciało lub jego stan jest wymieniona wyżej losowość geometrii rozkładu niejednorodności w obszarze G. Oznacza to, że wszystkie losowe funkcje tensorowe rozpatrywać będziemy jako odwzorowania

$$\mathbf{A} : \Omega \times G \to T_p,$$

gdzie $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ jest pewną ustaloną przestrzenią probabilistyczną, a T_p — przestrzenią euklidesowych tensorów walencji p nad R^3. W ten sposób eliminujemy z rozważań np. przypadek losowych warunków na brzegu obszaru G.

C. Funkcja opisująca rozkład sił objętościowych w ośrodku jest deterministyczna. Założenie to jest idealizacją pominięcia wpływu fluktuacji sił objętościowych na odkształcenie i jest dokładnie spełnione, gdy ośrodki składowe mają taki sam ciężar objętościowy.

[7)] W przypadku ograniczonego obszaru G zamiast wzoru (6) należy rozważyć zasadę prac wirtualnych dla odpowiedniego problemu brzegowego [1].

D. Rozważany ośrodek wielofazowy jest jednorodny statystycznie, tj. jeśli

$$\mathbf{c}: \Omega \times G \to T_4$$

jest losową funkcją rozkładu niejednorodności, to istnieje taki tensor $\mathbf{C} \in T_4$, że w dowolnym punkcie $x \in G$ wartością oczekiwaną $\mathbf{c}$ jest

$$(E\mathbf{c})(x) = \mathbf{C}.$$

E. Wszystkie rozważane losowe funkcje tensorowe są klasy $L_2(\Omega \times G; \nu)$ (por. Dodatek, 2).

Jeżeli $\omega \in \Omega$ jest ustalonym zdarzeniem losowym oraz $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\omega, x)$ funkcją rozkładu niejednorodności odpowiadającą temu zdarzeniu (por. założenia A i B), to przez $\varepsilon = \varepsilon(\omega, x)$ i $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\omega, x)$ oznaczamy odkształcenie i naprężenie zdefiniowane wzorami (8) i (9) i odpowiadające funkcji $\mathbf{c}(\omega, x)$, $x \in G$. Przy dowolnych $\omega \in \Omega$ i $x \in G$ otrzymujemy losowe funkcje tensorowe zwane «odkształceniem» oraz «naprężeniem» w ośrodku wielofazowym

$$\varepsilon, T: \Omega \times G \to T_2.$$

Dla uproszczenia oznaczeń będziemy losowe funkcje tensorowe $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times G$ oznaczali również symbolem $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x)$, $x \in G$.

4. Losowe odkształcenia

Równanie (8) zapisać możemy w postaci

$$\varepsilon(x) = \mathbf{Z}(x, x') * \tau(x') + \varepsilon_0(x), \tag{10}$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\mathbf{Z}(x, x') * \tau(x') = \int_{\bar{G}} \mathbf{Z}(x, x') \cdot \tau(x') dx' = \mathbf{L} \cdot \tau(x) + \int_{\bar{G}} \mathbf{U}(x, x') \cdot \tau(x') dx'. \tag{11}$$

$$\mathbf{Z}(x, x') = \mathbf{L}\delta(x - x') + \mathbf{U}(x, x')$$

oraz $\delta(x-x')$ jest deltą Diraca interpretowaną jako jądro tożsamościowego operatora całkowego [2].

Rozważmy liniowe operacje:

$$\begin{gathered} Z: L_2(G) \to L_2(G), \\ Z(\tau)(x) = \mathbf{Z}(x, x') * \tau(x'), \\ S, A: L_2(\Omega \times G, \nu) \to L_2(\Omega \times G; \nu), \\ S(\varepsilon) = \mathbf{c}'' \cdot \varepsilon, \\ A = (I - E) \circ Z \circ S, \end{gathered} \tag{12}$$

gdzie E — operator wartości oczekiwanej (Dodatek, 2), I — operator tożsamościowy.

Wiadomo, że: $||Z|| = M < \infty$ (np. [3]), $||E|| \leqslant 1$ (Dodatek, 2). Zbadajmy, przy jakich założeniach operacja S będzie ograniczona. Przeprowadźmy formalny rachunek:

$$|||S(\varepsilon)|||^2 = E||S(\varepsilon)||^2 = E\int_G \left(\mathbf{c}''(x):(\mathbf{c}''(x)\right)\cdot\left(\varepsilon(x)\otimes\varepsilon(x)\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant E\int_G ||\mathbf{c}''(x):\mathbf{c}''(x)||_4||\varepsilon(x)\otimes\varepsilon(x)||_4 dx \leqslant \beta^2|||\varepsilon|||^2$$

W powyższych przekształceniach skorzystano z oszacowania przeprowadzonego w Dodatku, p. 4 oraz założono istnienie liczby β zdefiniowanej w (13):

$$\beta = \operatorname*{supess}_{x\in G}\alpha(x) > 0,$$

(13) $$\alpha(x) = \sup_{a\in R}\left\{a: P\left(m(x) > a\right) > 0\right\},$$

$$m(x) = ||\mathbf{c}''(x):\mathbf{c}''(x)||_4^{1/2}.$$

Jeżeli więc istnieje liczba $\beta > 0$, to powyższe rachunki są poprawne oraz S jest liniowym ograniczonym operatorem z $||S|| \leqslant \beta$; wtedy liniowym ograniczonym operatorem jest też A oraz [por. (12)]

(14) $$||A|| \leqslant M\beta||I-E|| \leqslant 2M\beta.$$

U w a g a. Rozważmy losową funkcję tensorową $\mathbf{m}(x) = \bigotimes_1^4 \mathbf{c}''(x)$.

Ponieważ

$$m^4(x) = \mathbf{m}(x)|_{ijklklmnmnpqpqij},$$

więc (13) można interpretować jako warunek nakładany na losową funkcję $\mathbf{m}(x)$.

Równanie (10) może być, w przestrzeni $L_2(\Omega\times G; \nu)$, napisane w postaci:

$$\varepsilon(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x'):\mathbf{c}''(\omega, x) * \varepsilon(\omega, x) + \varepsilon_0(x),$$

$$\varepsilon(\omega, x) = (Z\circ S)(\varepsilon)(\omega, x) + \varepsilon_0(x).$$

Stąd otrzymujemy równanie

(15) $$\bar{\varepsilon}(x) = \varepsilon(\omega, x) - A(\varepsilon)(\omega, x),$$

gdzie A jest operatorem zdefiniowanym w (12) oraz oznaczono $\bar{\varepsilon} = E\varepsilon$. Jeżeli spełniony jest warunek (13) oraz dodatkowo

(16) $$2M\beta < 1,$$

to ze wzoru (14) wynika, że równanie (15) ma rozwiązanie w postaci szeregu Neumanna

(17) $$\varepsilon = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n\right)(\bar{\varepsilon}).$$ [8]

U w a g a. Jeżeli spełnione są warunki (13) i (15) oraz przez $\varepsilon' = (\boldsymbol{I}-E)\varepsilon$ oznaczymy fluktuację losowego odkształcenia, to z wzoru (14)

$$E||\varepsilon'||^2 \leqslant 4M^2\beta^2E||\varepsilon||^2.$$

[8] Porównaj np. [4], [5]. Dotychczas nie znano jednak warunków poprawności tego rodzaju przedstawienia losowych odkształceń.

Ponieważ

$$E\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \int_G E(A_{ij})^2(x)dx,$$

to warunek (14) narzuca związek między momentami rzędu $2(E(\varepsilon_{ij})^2)$, a momentami centralnymi rzędu $2(E(\varepsilon'_{ij})^2)$ — losowego odkształcenia ε.

5. Średnie naprężenia

Jeżeli losowe odkształcenie można przedstawić wzorem (17), to

$$\tau = \mathbf{c}'' \cdot \varepsilon = \mathbf{c}'' \cdot \bar{\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\varepsilon}).$$

Ponieważ $\|S \circ A^n\| \leqslant \|S\| \, \|A\|^n \leqslant \beta \|A\|^n$ i $\|A\| < 1$, więc ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \|S \circ A^n\|$ i

$$E \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\varepsilon}) = \sum_{n=1}^{\infty} E\big(\mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\varepsilon})\big),$$

skąd

$$\bar{T} = ET = \mathbf{C} \cdot \bar{\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} E\big(\mathbf{c}'' \cdot A^n(\bar{\varepsilon})\big). \tag{18}$$

Zbadajmy postać wyrazów szeregu we wzorze (18); oznaczmy $I' = I - E$,

$$A(\bar{\varepsilon})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) \overset{1}{\underset{*}{}} I'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) \cdot \bar{\varepsilon}(x_1)] = \mathbf{Z}(x, x_1) : I'\mathbf{c}''(\omega, x_1) \overset{1}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_1) =$$
$$= \mathbf{A}_1(\omega)(x, x_1) \overset{1}{\underset{*}{}} (x_1),$$

$$A^2(\bar{\varepsilon})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) \overset{1}{\underset{*}{}} I'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) \overset{2}{\underset{*}{}} \mathbf{c}''(\omega, x_2) \cdot \bar{\varepsilon}](x_2) =$$
$$= \mathbf{Z}(x, x_1) : I'[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) : \mathbf{c}''(\omega, x_2)] \overset{2}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_2) = \mathbf{A}_2(\omega)(x, x_1, x_2) \overset{2}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_2),$$

$$A^3(\bar{\varepsilon})(\omega, x) = \mathbf{Z}(x, x_1) : I'\big[\mathbf{c}''(\omega, x_1) : \mathbf{Z}(x_1, x_2) : I'(\mathbf{c}''(\omega, x_2) : \mathbf{Z}(x_2, x_3) :$$
$$: I'\mathbf{c}''(\omega, x_3))\big] \overset{3}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_3) = A_3(\omega)(x, x_1, x_2, x_3) \overset{3}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_3)$$

etc.

$$A^n(\bar{\varepsilon})(\omega, x) = A_n(\omega)(x, x_2, \ldots, x_n) \overset{n}{\underset{*}{}} \bar{\varepsilon}(x_n) = \int_{\overset{n}{\underset{1}{X}} G} \mathbf{A}_n(\omega)(x, x_1, \ldots, x_n) \cdot \bar{\varepsilon}(x_n) dx_1, \ldots dx_n.$$

Oznaczmy

$$\mathbf{Z}_n(x, x_1, \ldots, x_n) = \bigotimes_{l=1}^{n} \mathbf{Z}(x_{i-1}, x_l), \qquad x_0 = x, \tag{19}$$

$$\mathbf{C}_n(\omega, x_1, \ldots, x_n) = I'\Big(\mathbf{c}''(\omega, x_1) \otimes I'\Big(\mathbf{c}''(\omega, x_2) \otimes I'\Big(\ldots \otimes I'\big(\mathbf{c}''(\omega, x_{n-1}) \otimes I'\mathbf{c}'' \times$$
$$\times (\omega, x_n)\big) \ldots\Big)\Big)\Big).$$

Wprowadźmy działanie tensorowe

$$\circ : T_{4n} \otimes T_{4(n+1)} \to T_4,$$

zdefiniowane przepisem

$$\mathbf{A} \in T_{4n}, \quad \mathbf{B} \in T_{4(n+1)} \Rightarrow \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \sigma \times (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \tag{20}$$

gdzie znak „×" oznacza operację kolejnego zwężania iloczynu tensorowego $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ po układzie σ wskaźników:

$$\sigma = \{(1, 4n+3); (2, 4n+4); \ldots; (4n-3, 8n-1); (4n-2, 8n); (4n-1, 8n+1);$$
$$(4n, 8n+2)\}.$$

Wtedy

$$E[\mathbf{c}''(\omega, x) : \mathbf{A}_n(\omega)(x, x_1, \ldots, x_n)] = E[\mathbf{Z}_n(x, x_1, \ldots, x_n) \circ (\mathbf{c}''(\omega, x) \otimes \mathbf{C}_n(\omega, x_1, \ldots, x_n))] =$$
$$= \mathbf{Z}_n(x, x_1, \ldots, x_n) \circ \mathbf{K}_n(x, x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie oznaczono

$$\mathbf{K}_n(x, x_1, \ldots, x_n) = E[\mathbf{c}''(\omega, x) \otimes \mathbf{C}_n(\omega, x_1, \ldots, x_n)]. \tag{21}$$

Funkcja $\mathbf{K}_n$ jest tensorową funkcją

$$\mathbf{K}_n : \overset{n+1}{\underset{1}{X}} G \to T_{4(n+1)}$$

będącą kombinacją liniową funkcji korelacyjnych rzędu $\leqslant n$ losowej funkcji rozkładu niejednorodności $\mathbf{c}(\omega, x)$, $(\omega, x) \in \Omega \times G$.

Ostatecznie możemy wypowiedzieć następujące **Twierdzenie**:[9)]
Jeżeli ośrodek wielofazowy posiada własności A-E (rozdz. 3) oraz spełnione są warunki (13) i (16) (rozdz. 4), to istnieje funkcjonalny związek między średnim naprężeniem $\overline{\mathbf{T}}$ a średnim odkształceniem $\bar{\varepsilon}$:

$$\overline{\mathbf{T}}(x) = F\bar{\varepsilon}(x),$$

gdzie F jest liniowym ograniczonym operatorem w $L_2(G)$ zdefiniowanym w następujący sposób:

$$F\bar{\varepsilon}(x) = \mathbf{C} \cdot \bar{\varepsilon}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(x, x_n) * \bar{\varepsilon}(x_n),$$

$$\mathbf{F}_n(x, x_n) * \bar{\varepsilon}(x_n) = \overline{\int_G} \mathbf{F}_n(x, x_n) \cdot \bar{\varepsilon}(x_n) dx_n,$$

$$\mathbf{F}_n(x, x_n) = \overline{\int_{\overset{n-1}{\underset{1}{X}} G}} \mathbf{Z}_n(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \circ \mathbf{K}_n(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

$$\mathbf{C} = E\varepsilon(x).$$

Pozostałe oznaczenia podane są we wzorach (11), (19) - (21); $\overline{\int_H}$ jest symbolem całki w sensie wartości głównej.

---

9) Twierdzenie to obowiązuje oczywiście również w przypadku gładkiego rozkładu niejednorodności.

Dodatek

1.

R^3 — euklidesowa przestrzeń wektorowa trójek liczb. Przestrzeń ta rozważana jest wraz z ustaloną bazą $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$; $i = 1, 2, 3$ (δ_{ij} — symbol Kroneckera).

$T_p = \overset{p}{\underset{1}{\otimes}} R^3$ — euklidesowa przestrzeń tensorów walencji p nad R^3. Przestrzeń ta rozważana jest wraz z ustaloną bazą $\overset{p}{\underset{\alpha=1}{\otimes}} \mathbf{e}_{i_\alpha}$, $i_\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Dla $\mathbf{A} \in T_p$, $\mathbf{A} = A_{ij\ldots kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ (zapis w konwencji sumacyjnej Einsteina) oznaczmy $\mathbf{A}|_{ij\ldots kl} = A_{ij\ldots kl}$. Dla $\mathbf{A} \in T_p$, $\mathbf{B} \in T_q$ przez $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in T_{|p-q|}$ oznaczamy pełne nasunięcie tensorowe; np. dla $p = 4$, $q = 2$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|_{ij} = \mathbf{A}|_{ijkl}\mathbf{B}|_{kl}$; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}|_{kl} = \mathbf{B}|_{ij}\mathbf{A}|_{ijkl}$. W przestrzeni T_p rozważamy iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}|_{ij\ldots kl}\mathbf{B}|_{ij\ldots kl}$ i normę $||\mathbf{A}||_p = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$.

Funkcje $\mathbf{A}: G \to T_p$, $G \subset R^3$ rozważane będą jako odwzorowania postaci $\mathbf{A}(x) = A_{ij\ldots kl}(x)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $\mathbf{A}_{ij\ldots kl}: G \to R$. Jeżeli M jest pewną przestrzenią funkcji skalarnych określonych na zbiorze G i $A_{ij\ldots kl} \in M$, to pisać będziemy też $\mathbf{A} \in M$. W przestrzeni tensorowych funkcji klasy $L_2(G)$ przyjmować będziemy normę

$$||\mathbf{A}|| = \Big(\int_G \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{A}(x)\,dx\Big)^{1/2}.$$

2.

Niech $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ będzie pewną przestrzenią probabilistyczną oraz $G \subset R^3$ ograniczonym obszarem. Oznaczmy przez l_3 miarę Lebesgue'a w R^3, a przez $\nu = P \times l_3$ miarę na $\Omega \times G$ będącą iloczynem kartezjańskim miar P i l_3 (np. [6]).

Rozważmy przestrzeń tensorowych funkcji

$$\mathbf{A}: \Omega \times G \to T_p,$$

klasy $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Za normę $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ przyjmiemy liczbę

$$|||\mathbf{A}||| = \Big(\int_{\Omega \times G} \mathbf{A}(\omega, x) \cdot \mathbf{A}(\omega, x)\,d\nu(\omega, x)\Big)^{1/2}.$$

Z twierdzenia Fubiniego [6]

$$|||\mathbf{A}|||^2 = E||\mathbf{A}||^2 = \int_\Omega ||\mathbf{A}||^2(\omega)\,dP(\omega),$$

gdzie oznaczono

$$||\mathbf{A}||^2(\omega) = \int_G \mathbf{A}(\omega, x) \cdot \mathbf{A}(\omega, x)\,dl_3(x).$$

Ogólnie biorąc funkcja $\omega \to ||\mathbf{A}||^2(\omega)$ jest określona prawie wszędzie dla $\omega \in \Omega$; w pracy rozważane będą funkcje $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ takie, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$ liczba $||\mathbf{A}||^2(\omega)$ jest określona, tj. takie losowe funkcje tensorowe, że ich realizacje $\mathbf{A}_\omega(x) = \mathbf{A}(\omega, x)(x \in G)$ są funkcjami klasy $L_2(G)$.

Dla $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$ oznaczmy

$$E\mathbf{A}(x) = \int_\Omega \mathbf{A}(\omega, x)\,dP(\omega).$$

Funkcja $x \to E\mathbf{A}(x)$ nazywana jest wartością oczekiwaną losowej funkcji $\mathbf{A}$. Operacja

$$E: \mathbf{A} \to E\mathbf{A}$$

ma własności:

a) $E\mathbf{A} \in L_2(G)$ istnieje dla dowolnego $\mathbf{A} \in L_2(\Omega \times G; \nu)$,

b) E jest liniowym ograniczonym operatorem i $||E|| \leqslant 1$.

Zauważmy, że ponieważ dla $\mathbf{A}_0 \in L_2(G)$, $\mathbf{A}(\omega, x) \equiv \mathbf{A}_0(x)$ mamy $|||\mathbf{A}||| = ||\mathbf{A}_0||$, więc przestrzeń $L_2(G)$ można izometrycznie zanurzyć w przestrzeni $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Odpowiednio do tego zanurzenia możemy operator E rozpatrywać jako działający w przestrzeni $L_2(\Omega \times G; \nu)$. Operator E zdefiniowany wyżej i traktowany jako działający w $L_2(\Omega \times G; \nu)$ nazywać będziemy operatorem wartości oczekiwanej.

3.

Niech $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ będzie probabilistyczną przestrzenią. Dla skalarnej (rzeczywistej) zmiennej losowej $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ oznaczamy:

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

$$\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|X\|_\infty = \sup_{a \in R} \{a: P(|X| > a) > 0\}.$$

Liczba $\|X\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ma (między innymi) własność [7]

$$\|XY\|_r \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q,$$

dla dowolnych liczb naturalnych $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ takich, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \left(\frac{1}{\infty} \equiv 0\right).$$

W szczególności, jeżeli $r = q = 2$, to liczba $\|XY\|_2$ może być oszacowana przez

$$\|XY\|_2 \leqslant \|X\|_\infty \|Y\|_2.$$

4.

Rozważmy całkę

$$I = E \int_G X(\omega, x) Y^2(\omega, x) dx, \qquad G \subset R^3,$$

$$X(\omega, x) = ||\mathbf{c}''(\omega, x) : \mathbf{c}''(\omega, x)||_4,$$

$$Y(\omega, x) = ||\varepsilon(\omega, x) \otimes \varepsilon(\omega, x)||_4^{1/2} = ||\varepsilon(\omega, x)||_2,$$

gdzie $||\cdot||_p$ jest normą w euklidesowej przestrzeni wektorowej tensorów walencji p. Oznaczmy dla $x \in G$ ustalonego oraz $\omega \in \Omega$ dowolnego:

$$X_x \equiv X_x(\omega) = X(\omega, x),$$

$$Y_x \equiv Y_x(\omega) = Y(\omega, x).$$

W tych oznaczeniach i w oznaczeniach z Dodatku 3:

$$E(X_x Y_x^2) = E\left(\left|\sqrt{X_x}\, Y_x\right|^2\right) = \left\|\sqrt{X_x}\, Y_x\right\|_2^2 \leqslant \alpha^2(x) \|Y_x\|_2^2,$$

gdzie

$$\alpha(x) = \left\| \sqrt{X_x} \right\|_\infty .$$

A więc:

$$I = \int_G E(X_x Y_x^2)dx \leqslant \int_G \alpha^2(x) E(Y_x^2)dx = E \int_G \alpha^2(x) Y^2(\omega, x)dx =$$

$$= E \int_G |\alpha(x) Y(\omega, x_2)|^2 dx.$$

Oznaczając przez β istotny kres górnej funkcji $\alpha(x)$, $x \in G$ ([8]):

$$\beta = \operatorname{supess}_{x \in G} \alpha(x)$$

oraz oznaczając dla $\omega \in \Omega$ ustalonego, a $x \in G$ dowolnego:

$$Y_\omega \equiv Y_\omega(x) = Y(\omega, x)$$

mamy

$$\int_G |\alpha(x) Y(\omega, x)|^2 dx = ||\alpha Y_\omega||^2 \leqslant \beta^2 ||Y_\omega||^2 = \beta^2 \int_G Y^2(\omega, x)dx,$$

gdzie $||\cdot||$ jest normą w przestrzeni $L_2(G)$, przy czym skorzystano z oszacowania ([8])

$$||\alpha Y_\omega|| \leqslant \beta ||Y_\omega||.$$

Ostatecznie

$$I \leqslant \beta^2 E \int_G Y^2(\omega, x)dx = \beta^2 |||\varepsilon|||^2.$$

Literatura cytowana w tekście

1. A. Trzęsowski, *Dia-elastic description of a jump-nonhomogeneous body*; Teoria ośrodków wielofazowych, część II; Wrocław 1975.
2. A. Trzęsowski, *Rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa równań teorii sprężystości*; Prace IPPT, 24/1973.
3. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Москва 1965.
4. Cz. Eimer, *Stress in multiphase media*; Arch. Mech. Stos., 4, **19** (1967).
5. M. I. Beran and McCoy, *Mean field variation in Random media*, Quarterly of Applied Mathematics, 2, **28** (1970).
6. S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa 1973.
7. I. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilites*, Paris 1964.
8. R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, t. II, Warszawa 1959.
9. E. Kröner, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, ARMA, 4 (1960).

Р е з ю м е

СРЕДНЕЕ НАПРЯЖЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В работе рассмотрены среды содержащие случайно распределенные скачкообразные неоднородности. Найдены достаточные условия существования функционального соотношения между средними напряжениями и средней деформацией; определен вид этого соотношения.

Summary

MEAN STRESS IN A MULTI-COMPONENT STOCHASTIC MEDIUM

Media with random distribution of jump-inhomogeneities are considered. The sufficient conditions for the existence of the functional relation between the mean stress and the mean strain are found; the form of this relation is presented.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1976 r.