

## DRGANIA CIĘGNA W PŁASZCZYŹNIE ZWISU Z UWZGLĘDNIENIEM JEGO SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE

JÓZEF NIZIOŁ, ALICJA PIENIĄŻEK (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Zagadnienia dynamiki ciężna niewątpliwie należą do ważnych zarówno pod względem zastosowań inżynierskich, jak i pod względem poznawczym. Równania ruchu ciężen są układami równań różniczkowych nieliniowych o pochodnych cząstkowych. Dodatkowo są to układy równań o zmiennych współczynnikach. Wszystko to stwarza poważne trudności w uzyskaniu nawet przybliżonych, dostatecznie dokładnych, rozwiązań wymienionego układu równań i przeanalizowaniu ruchu ciężna, a tym samym określeniu interesujących nas wielkości dynamicznych, jak przyspieszenia, naprężenia dynamiczne itp.

Do znanych, najistotniejszych z tego zakresu zagadnień można zaliczyć rozwiązania przy różnych stopniach uproszczenia, mianowicie:

1. W stanie równowagi oś ciężna pokrywa się z odcinkami linii prostej. Rozważa się nieliniowe drgania poprzeczne ciężna.

2. Rozważa się drgania nieliniowe ciężna o małym zwisie przy zastosowaniu hipotezy KIRCHHOFFA [5] zakładającej możliwość pominięcia podłużnych sił bezwładności i ich wpływu na drgania poprzeczne ciężna.

3. Małe drgania ciężna wokół jego położenia równowagi statycznej rozpracowane przez ANANIEWA [1].

4. Szczególny przypadek poprzedniego, gdzie dodatkowo pomija się wpływ podłużnych sił bezwładności na drgania poprzeczne.

Znane są różne przypadki rozwiązań powyższych zagadnień, w zależności od warunków brzegowych, obciążeń ciężna dodatkowymi masami itp.

Omówione, częściowo rozwiązane problemy, dotyczą ciężen idealnie wiotkich, bez uwzględnienia sztywności na zginanie. Wiadomo, że wartość sztywności wzdłużnej  $EA$  ma istotny wpływ na formy drgań ciężna [3]. W odróżnieniu od struny przy odpowiednio dużej sztywności  $EA$  pierwsza forma drgań może być antysymetryczna. Celowe jest więc przeanalizowanie wpływu sztywności giętej  $EI$  na formy i częstości drgań ciężna, gdyż do tej pory nie zostało to zrobione.

Przedstawiona poniżej praca stanowi wstęp do znacznie ogólniejszego zagadnienia tłumienia drgań w liniach elektroenergetycznych. W kraju, badania eksperymentalne z tego zakresu prowadzi Biuro Projektów Energetycznych w Krakowie. Zarówno w literaturze krajowej, jak i zagranicznej brak jest opracowań teoretycznych z tego zakresu. Stosowane jako tłumiki drgań pętle stanowią ciężno. Odległość między punktami zamocowania takiego ciężna wynosi 4,4 [m] przy strzałce zwisu 0,4 [m]. Z literatury wiadomo

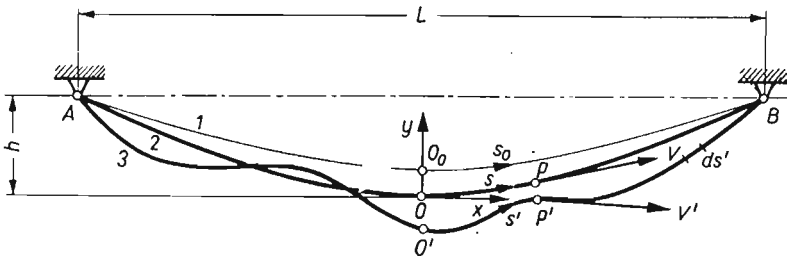
[3], że przy stosunku strzałki zwisu do rozpiętości podpór mniejszym od  $\frac{1}{8} \left( \frac{f_0}{L} < \frac{1}{8} \right)$  można traktować ciężno jako ciężno o małym zwisie i stosować odpowiednie uproszczenia przy analizie drgań wokół jego położenia równowagi statycznej.

W niniejszej pracy zajmiemy się analizą drgań własnych i wymuszonych ciężna w płaszczyźnie zwisu. Weźmiemy pod uwagę ciężno zamocowane na dwóch sztywnych podporach przegubowych, którego długość jest większa od rozpiętości podpór. Dodatkowo uwzględnimy sztywność giętą ciężna  $EI$ .

W wielu zagadnieniach praktycznych, a dotyczy to głównie przewodów elektroenergetycznych, drgania wymuszone są drganiami eolnymi. Tego typu drgania wywołane wirami Kármána były przeanalizowane przez BOLOTINA [2], jednak przy traktowaniu przewodu jako struny.

## 2. Równania ruchu

Na rys. 1 jest przedstawione ciężno, gdzie zaznaczono trzy jego konfiguracje: naturalną, statyczną (w położeniu równowagi) i dynamiczną. Będziemy uwzględniać tylko nieliniowość geometryczną. Oprócz założenia o liniowości fizycznej pominiemy tłumienie ciężna.



Rys. 1. Ciężno i jego konfiguracje  
1 — naturalna, 2 — statyczna, 3 — dynamiczna

Weźmy pod uwagę element  $ds_0$  ciężna odpowiadający konfiguracji naturalnej. W konfiguracji dynamicznej przyjmie on wielkość  $ds'$ , którą można znaleźć ze związku

$$(2.1) \quad ds' = \left( 1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right) ds_0,$$

w którym  $\bar{T}$  jest napięciem ciężna,  $A$  przekrojem poprzecznym,  $E$  zaś modułem sprężystości Younga.

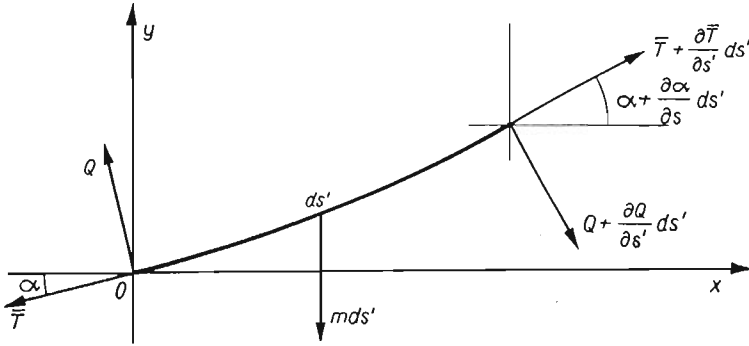
Ruch ciężna będziemy rozważać w układzie kartezjańskim,  $Oxy$ , związanym z położeniem równowagi statycznej (położenie 2 na rys. 1).

Na rys. 2 przedstawiono element ciężna  $ds'$  oraz siły na niego działające. Składowe napięcia  $\bar{T}$ , we współrzędnych kartezjańskich  $Oxy$ , są następujące

$$(2.2) \quad \bar{T} \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad \bar{T} \frac{\partial y}{\partial s'}.$$

Przyrosty napięcia w kierunkach  $x, y$  wzdłuż elementu  $ds'$  będą następujące

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left( \bar{T} \frac{\partial x}{\partial s'} \right) ds', \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left( \bar{T} \frac{\partial y}{\partial s'} \right) ds'.$$



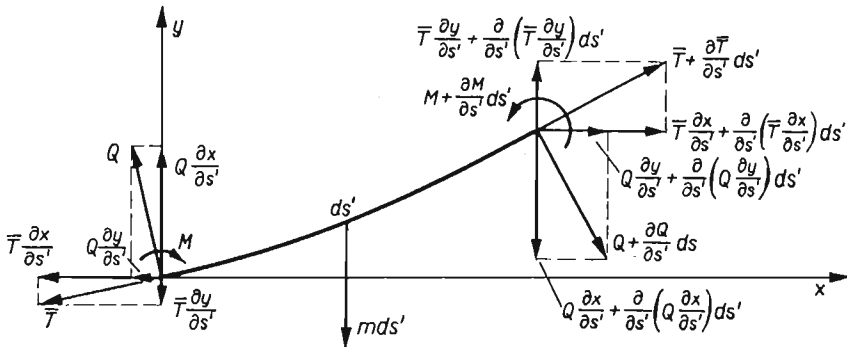
Rys. 2. Siły działające na element cięgna

Przy wyprowadzeniu równań uwzględnimy także siłę poprzeczną  $Q$ . Jej składowe i odpowiednie przyrosty wzdłuż  $ds'$  są, odpowiednio:

$$(2.4) \quad Q \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad Q \frac{\partial y}{\partial s'},$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left( Q \frac{\partial x}{\partial s'} \right) ds', \quad \frac{\partial}{\partial s'} \left( Q \frac{\partial y}{\partial s'} \right) ds'.$$

Rozkład sił wzdłużnych i poprzecznych na osie przyjętego układu współrzędnych przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Rozkład sił działających na element cięgna

Podobnie jak w pracy [7], przyjmujemy założenie, że składowa prędkości dowolnego punktu cięgna na kierunek styczny do jego konfiguracji ma wartość stałą. Założenie to jest uzasadnione i ogólniejsze od omówionych wcześniej przypadków 1 - 4, gdzie pomijano wpływ bezwładności w kierunku wzdłużnym.

W celu określenia siły bezwładności obliczymy przyspieszenie. Weźmy składowe prędkości w punkcie  $P'$

$$(2.6) \quad \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + V' \frac{\partial x}{\partial s'}, \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + V' \frac{\partial y}{\partial s'},$$

gdzie  $V'$  jest prędkością styczną do konfiguracji dynamicznej ciężna.

Obliczając dalej pochodną Eulera z wyrażeń (2.6) otrzymujemy składowe przyspieszenia

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{D^2x}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V' \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s'} + V' \frac{\partial}{\partial s'} \left( V' \frac{\partial x}{\partial s'} \right), \\ \frac{D^2y}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V' \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s'} + V' \frac{\partial}{\partial s'} \left( V' \frac{\partial y}{\partial s'} \right). \end{aligned}$$

Na podstawie (2.1) otrzymujemy

$$V' = \frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{\partial s'}{\partial s_0} \frac{\partial s_0}{\partial t} = \left( 1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right) V_0,$$

gdzie obecnie  $V_0$  jest prędkością styczną do konfiguracji naturalnej.

W związku z powyższym układ zależności (2.7) można zapisać następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{D^2x}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right), \\ \frac{D^2y}{Dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right). \end{aligned}$$

W zależnościach (2.8) składowe  $2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0}$  i  $2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0}$ , to składowe przyspieszenia Coriolisa, ostatnie zaś człony są składowymi przyspieszenia dośrodkowego.

Sztwywność giętną  $EI$  wprowadzimy do równań ruchu wychodząc z równania linii ugięcia zapisanego w postaci

$$(2.9) \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial s'} \frac{\partial^2 y}{\partial s'^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s'^2} \frac{\partial y}{\partial s'}}{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial s'} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s'} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{M(s')}{EI}.$$

Powyższe równanie zróżniczkujemy jednokrotnie względem  $s'$  i w ten sposób otrzymamy zależność na siłę poprzeczną  $Q$ . Zależność tę napiszemy od razu w zmiennej  $s_0$  wykorzystując w tym celu związek (2.1). Ostatecznie mamy

$$(2.10) \quad Q = \frac{EI}{\left( 1 + \frac{\bar{T}}{AE} \right)^3} \left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right).$$

Możemy obecnie przystąpić do napisania równań ruchu. Oznaczmy przez  $m$  masę przypadającą na jednostkę długości ciężna. Z warunku rzutów na kierunki  $x$  i  $y$  po uwzględnieniu sił bezwładności oraz zależności (2.10) otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial y}{\partial s_0} \right] = m \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial x}{\partial s_0} \right] = m \left[ g + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \right].$$

Stowarzyszone równania równowagi mają postać:

$$(2.12) \quad \frac{d}{ds_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{dx}{ds_0} \right) + \frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left[ \frac{dx}{ds_0} \frac{d^3 y}{ds_0^3} \frac{dy}{ds_0} - \frac{d^3 x}{ds_0^3} \left( \frac{dy}{ds_0} \right)^2 \right] \right\} = mV_0^2 \frac{d^2 x}{ds_0^2},$$

$$\frac{d}{ds_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{dy}{ds_0} \right) - \frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left[ \left( \frac{dx}{ds_0} \right)^2 \frac{d^3 x}{ds_0^3} - \frac{d^3 x}{ds_0^3} \frac{dy}{ds_0} \frac{dx}{ds_0} \right] \right\} = m \left( g + V_0^2 \frac{d^2 y}{ds_0^2} \right).$$

Równania drgań wymuszonych otrzymamy przez dodanie do prawych stron równań (2.11) funkcji wymuszających  $\bar{f}_1(s_0, t)$ ,  $\bar{f}_2(s_0, t)$ . Otrzymamy wówczas następujący układ równań:

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial y}{\partial s_0} \right] = m \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) \right] + \bar{f}_1(s_0, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\bar{T}}{1 + \frac{\bar{T}}{AE}} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) - \frac{\partial}{\partial s_0} \left[ \frac{EI}{\left(1 + \frac{\bar{T}}{AE}\right)^4} \left( \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^3 y}{\partial s_0^3} - \frac{\partial^3 x}{\partial s_0^3} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \frac{\partial x}{\partial s_0} \right] = m \left[ g + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s_0} + V_0 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( V_0 \frac{\partial y}{\partial s_0} \right) \right] + \bar{f}_2(s_0, t).$$

Dla liny zamocowanej, jak na rys. 1, zarówno przemieszczenia, jak i momenty zginające w punktach  $s_0 = -\frac{l}{2}$  i  $s_0 = \frac{l}{2}$  są równe zero (gdzie  $l$  jest długością cięgna w stanie nieodkształconym), a więc:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} x\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= 0, & y\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ x\left(\frac{l}{2}, t\right) &= 0, & y\left(\frac{l}{2}, t\right) &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} \frac{\partial y}{\partial s_0} \Big|_{s_0 = -\frac{l}{2}} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial s_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2} \frac{\partial y}{\partial s_0} \Big|_{s_0 = \frac{l}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe przyjmujemy w następującej postaci:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} x(s_0, 0) &= \varphi_1(s_0), & y(s_0, 0) &= \varphi_2(s_0), \\ \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_3(s_0), & \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_4(s_0). \end{aligned}$$

### 3. Drgania swobodne

Przeanalizujemy obecnie drgania swobodne cięgna. Weźmiemy zatem do dalszych rozważań układ (2.12).

Przyjmujemy, że współrzędne  $x, y$  oraz napięcie  $\bar{T}$  doznają małych przyrostów  $u, v, \tau$ , co wyrazimy następująco:

$$(3.1) \quad x = x_1 + u, \quad y = y_1 + v, \quad \bar{T} = T + \tau.$$

Współrzędne  $x_1$  i  $y_1$  odpowiadają położeniu równowagi cięgna. Będziemy je uważali za stałe. Rozważymy dalej małe drgania cięgna wokół położenia równowagi. Podczas tych drgań napięcie w cięgnie będzie się zmieniać nieznacznie. Wyraża to trzeci wzór w (3.1).

W dalszej analizie wygodniej będzie przejść ze zmiennej  $s_0$  na  $s$  przy pomocy oczywistej zależności

$$ds = ds_0 \left(1 + \frac{T}{AE}\right).$$

Po podstawieniu (3.1) do (2.12), odpowiednim przekształceniu i uporządkowaniu otrzymujemy następujący układ równań (już w zmiennej  $s$ ):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{T}{AE}\right) \frac{\partial}{\partial s} \left[ T \frac{dx_1}{ds} + \tau \frac{dx_1}{ds} + \tau \frac{\partial u}{\partial s} + T \frac{\partial u}{\partial s} \right] + \left(1 + \frac{T}{AE}\right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \times \\ \times \left[ \frac{dx_1}{ds} \frac{d^3 y_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3 y_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & -\frac{d^3x_1}{ds^3} \left( \frac{dy_1}{ds} \right)^2 - 2 \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dy_1}{ds} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \left( \frac{dy_1}{ds} \right)^2 - 2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dy_1}{ds} + \\
 \text{[c.d.]} \quad & + \frac{dx_1}{ds} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} - \\
 & - \frac{d^3x_1}{ds^3} \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \Big] = m \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{d^2x_1}{ds^2} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right], \\
 & \left( 1 + \frac{T}{AE} \right) \frac{\partial}{\partial s} \left[ T \frac{dy_1}{ds} + \tau \frac{dy_1}{ds} + T \frac{\partial v}{\partial s} + \tau \frac{\partial v}{\partial s} \right] - \\
 & - \left( 1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 \frac{d^3y_1}{ds^3} + \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d^3y_1}{ds^3} \frac{dx_1}{ds} + \right. \\
 & + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \frac{dx_1}{ds} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{dx_1}{ds} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dx_1}{ds} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{dx_1}{ds} - \\
 & - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{dx_1}{ds} + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{d^3y_1}{ds^3} + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} - \\
 & \left. - \frac{d^3x_1}{ds^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} \right] = \\
 & = m \left[ g + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{d^2y_1}{ds^2} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Podobnie, jak w [7] przyjmujemy, że:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \frac{dx_1}{ds} = 1, \quad \frac{dy_1}{ds} = \psi s, \\
 & \tau = AE \left( 1 + \frac{T}{AE} \right) \left[ \frac{dx_1}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dy_1}{ds} \frac{\partial v}{\partial s} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie  $\psi$ , ze względu na przyjęte założenie  $\frac{f_0}{l} < \frac{1}{8}$ , jest wielkością małą.

Po pominięciu małych wyższego rzędu ( $\psi$  w potęgze wyższej niż pierwsza), wykorzystaniu równań równowagi oraz zależności (3.3) otrzymamy układ:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \left( 1 + \frac{T}{AE} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} \frac{\partial u}{\partial s} + AE \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \psi s \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] + \\
 & + \left( 1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[ \psi s \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right] = m \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right], \\
 & \left( 1 + \frac{T}{AE} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} \frac{\partial v}{\partial s} + AE \left( \psi s \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] + \\
 & + \left( 1 + \frac{T}{AE} \right)^2 EI \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \psi s - \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right] = m \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Wprowadźmy jeszcze następujące oznaczenia:

$$(3.5) \quad \frac{m}{\left(1 + \frac{T}{AE}\right)^2} = M, \quad \frac{T}{1 + \frac{T}{AE}} - MV^2 = W, \quad \frac{d}{ds} = D,$$

$$(3.5a) \quad \alpha^2 = \frac{W}{M}, \quad \bar{V} = \frac{V}{\alpha}, \quad \mu = \frac{W}{AE}.$$

Ponadto przekształcimy pochodne mieszane, występujące po prawych stronach układu (3.4), w następujący sposób:

$$2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial s}} \right) = 2V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{V} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

i analogicznie

$$2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Rozwiązania układu (3.4) przyjmijmy w postaci:

$$(3.6) \quad u(s, t) = u(s)e^{i\alpha t}, \quad v(s, t) = v(s)e^{i\alpha t}.$$

Po podstawieniu (3.6) do układu (3.4), z uwzględnieniem oznaczeń (3.5), otrzymujemy:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} -2EI\psi^2 s D^3 u + WD^2 u + AED^2 u + 3Mq^2 \alpha^2 u + AE\psi Dv + \\ + AE\psi s D^2 v + EI\psi D^3 v + EI\psi s D^4 v = 0, \\ EI\psi s D^4 u + EI\psi D^3 u + AE\psi Du + AE\psi s D^2 u - EID^4 v + WD^2 v + 3M\alpha^2 q^2 v = 0. \end{aligned}$$

Następnie dzielimy równania układu (3.7) stronami przez  $AE$  i w ten sposób otrzymujemy układ:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} (\mu + 1)D^2 u + 3\mu q^2 u + \frac{I}{A} \psi s D^4 v + \frac{I}{A} \psi D^3 v + \psi s D^2 v + \psi Dv = 0, \\ \frac{I}{A} \psi s D^4 u + \frac{I}{A} \psi D^3 u + \psi s D^2 u + \psi Du - \frac{I}{A} D^4 v + \mu D^2 v + 3\mu q^2 v = 0. \end{aligned}$$

Uzyskanie rozwiązania układu równań różniczkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach (3.8) nastręcza duże kłopoty. W celu uzyskania rozwiązania dokonamy przekształcenia wprowadzając zmienne  $\xi$  i  $\eta$  według wzorów:

$$(3.9) \quad u = \xi - \psi \left( s - \frac{1}{D} \right) \eta, \quad v = \psi \left( s - \frac{1}{D} \right) \xi + \eta.$$

Podstawimy (3.9) do układu (3.8). Po odpowiednim przekształceniu i pominięciu, jako bardzo małych, członów zawierających iloczyny  $\mu\psi$  otrzymamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} (\mu + 1)D^2 \xi + 3\mu q^2 \xi + 2 \frac{I}{A} \psi D^3 \eta = 0, \\ 2 \frac{I}{A} \psi D^3 \xi + 2\psi D\xi - \frac{I}{A} D^4 \eta + \mu D^2 \eta + 3\mu q^2 \eta = 0. \end{aligned}$$



Rozwiązania układu (3.10) będziemy poszukiwali w następującej postaci:

$$\xi = Ae^{rs}, \quad \eta = Be^{rs}.$$

Po podstawieniu powyższych postaci rozwiązań do układu (3.10), wykonaniu odpowiednich działań i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A[(\mu+1)r^2 + 3\mu q^2] + B \left[ 2 \frac{I}{A} \psi r^3 \right] &= 0, \\ A \left[ 2 \frac{I}{A} \psi r^3 + 2\psi r \right] + B \left[ -\frac{I}{A} r^4 + \mu r^2 + 3\mu q^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne układu (3.11) ma postać

$$(3.12) \quad - \left[ (\mu+1) \frac{I}{A} + 4 \left( \frac{I}{A} \right)^2 \psi^2 \right] r^6 + \left[ (\mu+1)\mu - 3 \frac{I}{A} \mu q^2 - 4\psi^2 \frac{I}{A} \right] r^4 + \\ + [3(\mu+1)\mu q^2 + 9\mu^2 q^2] r^2 + 9\mu^2 q^4 = 0.$$

Po pominięciu składników zawierających  $\psi^2$  otrzymujemy

$$(3.13) \quad -\frac{I}{A} r^6 + \left[ 1 - 3 \frac{I}{A} q^2 \right] \mu r^4 + 3\mu q^2 r^2 + 9\mu^2 q^4 = 0.$$

Jest to równanie trzeciego stopnia ze względu na  $r^2$ . Zbadamy znak wyróżnika  $\mathcal{D}$ , który w końcowej formie można przedstawić następująco:

$$(3.14) \quad \mathcal{D} = \frac{q^4 \mu^3}{3 \left( \frac{I}{A} \right)^4} \left[ -27 \left( \frac{I}{A} \right)^3 \mu^2 q^6 + 9 \left( \frac{I}{A} \right)^2 (2 + 3\mu) \mu q^4 + \right. \\ \left. + 3 \frac{I}{A} (5\mu - 1 - 3\mu^2) q^2 + \mu \left( \mu - \frac{1}{4} \right) \right].$$

Jak widać, wyróżnik  $\mathcal{D}$  zależy od  $q$ . Ścisłe określenie znaku  $\mathcal{D}$  w zależności od parametru  $q$  jest możliwe tylko dla konkretnych wartości, przy czym i tak należy się liczyć z koniecznością rozwiązania nierówności szóstego stopnia. Biorąc pod uwagę powyższe rozpatrzymy ogólnie przypadki różnych, możliwych znaków  $\mathcal{D}$ .

*Przypadek I* —  $\mathcal{D} > 0$ . W tym przypadku, ze wzorów Cardano, otrzymujemy jeden pierwiastek rzeczywisty oraz dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Ponieważ pierwiastek rzeczywisty może być dodatni lub ujemny istnieją dwie dalsze możliwości:

- jeden pierwiastek rzeczywisty ujemny, dwa zespolone sprzężone,
- jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni, dwa zespolone sprzężone.

Powracając do równania charakterystycznego (3.13), które jest szóstego stopnia możemy otrzymać:

- a) sześć pierwiastków zespolonych sprzężonych,
- b) dwa pierwiastki rzeczywiste, różnych znaków i cztery zespolone sprzężone.

*Przypadek II* —  $\mathcal{D} < 0$ . Otrzymamy wtedy trzy pierwiastki rzeczywiste, przy czym dwa z nich mogą być dodatnie i jeden ujemny, względnie dwa ujemne jeden dodatni. Zatem równanie charakterystyczne (3.13) będzie miało:

- a) cztery pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone sprzężone,
- b) cztery pierwiastki zespolone sprzężone i dwa rzeczywiste.

Przypadek  $\mathcal{D} = 0$  jest szczególnym przypadkiem  $\mathcal{D} < 0$  i nie będziemy go tutaj rozpatrywać.

W związku z przedstawionymi wyżej przypadkami pierwiastków równania charakterystycznego, rozwiązania układu równań (3.10) będą miały odpowiednio różną postać. Przedstawimy je obecnie, dla każdego przypadku oddzielnie.

*Przypadek I.* Zapiszmy pierwiastki równania charakterystycznego w następującej postaci:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} r_1 &= a_1 + ib_1, & r_2 &= a_1 - ib_1, \\ r_3 &= a_2 + ib_2, & r_4 &= a_2 - ib_2, \\ r_5 &= a_3 + ib_3, & r_6 &= a_3 - ib_3. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (3.10) będą miały postać:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^6 A_j e^{r_j s}, \\ \eta &= \sum_{j=1}^6 B_j e^{r_j s}. \end{aligned}$$

Stałe  $A_j$  i  $B_j$ , ( $j = 1, \dots, 6$ ) są stałymi zespolonymi związanymi następującą zależnością wynikającą z układu (3.11):

$$(3.17) \quad \frac{B_j}{A_j} = - \frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3} = - \frac{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A} r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \beta_j + \gamma_j i,$$

$$(j = 1, \dots, 6).$$

Rozwiązania (3.16) można zapisać w postaci rzeczywistej, wprowadzając nowe stałe  $A_{1j}$ ,  $A_{2j}$ ,  $A_{3j}$  za pomocą zależności:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (A_{11} - iA_{12}), & A_2 &= \frac{1}{2} (A_{11} + iA_{12}), \\ A_3 &= \frac{1}{2} (A_{21} - iA_{22}), & A_4 &= \frac{1}{2} (A_{21} + iA_{22}), \\ A_5 &= \frac{1}{2} (A_{31} - iA_{32}), & A_6 &= \frac{1}{2} (A_{31} + iA_{32}), \end{aligned}$$

na podstawie (3.17) i (3.15) słuszne są związki:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} B_1 &= A_1(\beta_1 + i\gamma_1), & B_2 &= A_2(\beta_2 + i\gamma_2) = A_2(\beta_1 - i\gamma_1), \\ B_3 &= A_3(\beta_3 + i\gamma_3), & B_4 &= A_4(\beta_4 + i\gamma_4) = A_4(\beta_3 - i\gamma_3), \\ B_5 &= A_5(\beta_5 + i\gamma_5), & B_6 &= A_6(\beta_5 + i\gamma_6) = A_6(\beta_5 - i\gamma_5). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.18) i (3.19) odpowiednio do (3.16), z uwzględnieniem (3.15), otrzymujemy:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \xi &= A_{11} e^{a_1 s} \cos b_1 s + A_{12} e^{a_1 s} \sin b_1 s + A_{21} e^{a_2 s} \cos b_2 s + A_{22} e^{a_2 s} \sin b_2 s + \\ &\quad + A_{31} e^{a_3 s} \cos b_3 s + A_{32} e^{a_3 s} \sin b_3 s, \\ \eta &= (A_{11} \beta_1 + A_{12} \gamma_1) e^{a_1 s} \cos b_1 s + (A_{11} \gamma_1 - A_{12} \beta_1) e^{a_1 s} \sin b_1 s + \\ &\quad + (A_{21} \beta_3 + A_{22} \gamma_3) e^{a_2 s} \cos b_2 s - (A_{21} \gamma_3 - A_{22} \beta_3) e^{a_2 s} \sin b_2 s + \\ &\quad + (A_{31} \beta_5 + A_{32} \gamma_5) e^{a_3 s} \cos b_3 s - (A_{31} \gamma_5 - A_{32} \beta_5) e^{a_3 s} \sin b_3 s. \end{aligned}$$

Stałe  $A_{1j}$ ,  $A_{2j}$ ,  $A_{3j}$  wyznaczmy z warunków brzegowych, które po zastosowaniu transformacji (3.9) przyjmą postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \xi \left( -\frac{l}{2} \right) = \xi \left( \frac{l}{2} \right) = 0, \quad \eta \left( -\frac{l}{2} \right) = \eta \left( \frac{l}{2} \right) = 0, \\ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + 2\psi \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \Big|_{s=-\frac{l}{2}} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + 2\psi \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \Big|_{s=\frac{l}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Przystąpimy obecnie do wyznaczenia stałych. Wykorzystując warunki brzegowe (3.21) otrzymamy układ sześciu jednorodnych równań algebraicznych na poszukiwane stałe. Ma on postać:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} &A_{11} e^{-\frac{1}{2} a_1 l} \cos b_1 \left( -\frac{l}{2} \right) + A_{12} e^{-\frac{1}{2} a_1 l} \sin b_1 \left( -\frac{l}{2} \right) + A_{21} e^{-\frac{1}{2} a_2 l} \cos b_2 \left( -\frac{l}{2} \right) + \\ &\quad + A_{22} e^{-\frac{1}{2} a_2 l} \sin b_2 \left( -\frac{l}{2} \right) + A_{31} e^{-\frac{1}{2} a_3 l} \cos b_3 \left( -\frac{l}{2} \right) + \\ &\quad + A_{32} e^{-\frac{1}{2} a_3 l} \sin b_3 \left( -\frac{l}{2} \right) = 0, \\ &A_{11} e^{\frac{1}{2} a_1 l} \cos \frac{1}{2} b_1 l + A_{12} e^{\frac{1}{2} a_1 l} \sin \frac{1}{2} b_1 l + A_{21} e^{\frac{1}{2} a_2 l} \cos \frac{1}{2} b_2 l + \\ &\quad + A_{22} e^{\frac{1}{2} a_2 l} \sin \frac{1}{2} b_2 l + A_{31} e^{\frac{1}{2} a_3 l} \cos \frac{1}{2} b_3 l + A_{32} e^{\frac{1}{2} a_3 l} \sin \frac{1}{2} b_3 l = 0, \\ &A_{11} \left[ \beta_1 \cos \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) - \gamma_1 \sin \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\ &\quad + A_{12} \left[ \gamma_1 \cos \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) + \beta_1 \sin \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\ &\quad + A_{21} \left[ \beta_3 \cos \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) - \gamma_3 \sin \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\ &\quad + A_{22} \left[ \gamma_3 \cos \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) + \beta_3 \sin \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\ &\quad + A_{31} \left[ \beta_5 \cos \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) + \gamma_5 \sin \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_3 l} + \\ &\quad + A_{32} \left[ \gamma_5 \cos \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) + \beta_5 \sin \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) \right] e^{-\frac{1}{2} a_3 l} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & A_{11} \left( \beta_1 \cos \frac{1}{2} b_1 l - \gamma_1 \sin \frac{1}{2} b_1 l \right) e^{\frac{1}{2} a_1 l} + A_{12} \left( \gamma_1 \cos \frac{1}{2} b_1 l + \beta_1 \sin \frac{1}{2} b_1 l \right) e^{\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 [c.d.] \quad & + A_{21} \left( \beta_3 \cos \frac{1}{2} b_2 l - \gamma_3 \sin \frac{1}{2} b_2 l \right) e^{\frac{1}{2} a_2 l} + A_{22} \left( \gamma_3 \cos \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
 & \left. + \beta_3 \sin \frac{1}{2} b_2 l \right) e^{\frac{1}{2} a_2 l} + A_{31} \left( \beta_5 \cos \frac{1}{2} b_3 l - \gamma_5 \sin \frac{1}{2} b_3 l \right) e^{\frac{1}{2} a_3 l} + \\
 & + A_{32} \left( \gamma_5 \cos \frac{1}{2} b_3 l + \beta_5 \sin \frac{1}{2} b_3 l \right) e^{\frac{1}{2} a_3 l} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \{ [-2\psi b_1 - 2\beta_1 a_1 b_1 - \gamma_1 (a_1^2 + b_1^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) + \\
 & + [2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 - \beta_1 (a_1^2 + b_1^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 & + A_{12} \{ [2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 + \beta_1 (a_1^2 - b_1^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) + \\
 & + [2\psi b_1 + 2\beta_1 a_1 b_1 + \gamma_1 (a_1^2 - b_1^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_1 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 & + A_{21} \{ [-2\psi b_2 - 2\beta_3 a_2 b_2 - \gamma_3 (a_2^2 + b_2^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) + \\
 & + [2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 (a_2^2 - b_2^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{22} \{ [2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 (a_2^2 - b_2^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) + \\
 & + [2\psi b_2 + 2\beta_3 a_2 b_2 + \gamma_3 (a_2^2 - b_2^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_2 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{31} \{ [-2\psi b_3 - 2\beta_5 a_3 b_3 - \gamma_5 (a_3^2 + b_3^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) + \\
 & + [2\psi a_3 - 2\gamma_5 a_3 b_3 + \beta_5 (a_3^2 - b_3^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_3 l} + \\
 & + A_{32} \{ [2\psi a_3 - 2\gamma_5 a_3 b_3 - \beta_5 (a_3^2 + b_3^2)] \sin \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) + \\
 & + [2\psi b_3 + 2\beta_5 a_3 b_3 + \gamma_5 (a_3^2 - b_3^2)] \cos \left( -\frac{1}{2} b_3 l \right) e^{-\frac{1}{2} a_3 l} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \left[ (-2\psi b_1 - 2\beta_1 a_1 b_1 - \gamma_1 a_1^2 + \gamma_1 b_1^2) \sin \frac{1}{2} b_1 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi a_1 + \beta_1 a_1^2 - \beta_1 b_1^2 - 2\gamma_1 a_1 b_1) \cos \frac{1}{2} b_1 l \right] e^{\frac{1}{2} a_1 l} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad & + A_{12} \left[ (2\psi a_1 - 2\gamma_1 a_1 b_1 + \beta_1 a_1^2 - \beta_1 b_1^2) \sin \frac{1}{2} b_1 l + \right. \\
 \text{[c.d.]} \quad & \left. + (2\psi b_1 + \gamma_1 a_1^2 - \gamma_1 b_1^2 + 2\beta_1 a_1 b_1) \cos \frac{1}{2} b_1 l \right] e^{\frac{1}{2} a_1 l} + \\
 & + A_{21} \left[ (-2\psi b_2 - 2\beta_3 a_2 b_2 - \gamma_3 a_2^2 + \gamma_3 b_2^2) \sin \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi a_2 + \beta_3 a_2^2 - \beta_3 b_2^2 - 2\gamma_3 a_2 b_2) \cos \frac{1}{2} b_2 l \right] e^{\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{22} \left[ (2\psi a_2 - 2\gamma_3 a_2 b_2 + \beta_3 a_2^2 - \beta_3 b_2^2) \sin \frac{1}{2} b_2 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi b_2 + \gamma_3 a_2^2 - \gamma_3 b_2^2 + 2\beta_3 a_2 b_2) \cos \frac{1}{2} b_2 l \right] e^{\frac{1}{2} a_2 l} + \\
 & + A_{31} \left[ (-2\psi b_3 - 2\beta_5 a_3 b_3 - \gamma_5 a_3^2 + \gamma_5 b_3^2) \sin \frac{1}{2} b_3 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi a_3 + \beta_5 a_3^2 - \beta_5 b_3^2 - 2\gamma_5 a_3 b_3) \cos \frac{1}{2} b_3 l \right] e^{\frac{1}{2} a_3 l} + \\
 & + A_{32} \left[ (-2\gamma_5 a_3 b_3 - \beta_5 a_3^2 - \beta_5 b_3^2 + 2\psi a_3) \sin \frac{1}{2} b_3 l + \right. \\
 & \left. + (2\psi b_3 + \gamma_5 a_3^2 - \gamma_5 b_3^2 + 2\beta_5 a_3 b_3) \cos \frac{1}{2} b_3 l \right] e^{\frac{1}{2} a_3 l} = 0.
 \end{aligned}$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań tego układu jest zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współczynników występujących przy poszukiwanych stałych. Jeżeli współczynniki te oznaczmy kolejno przez  $c_{ij}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). ( $j = 1, \dots, 6$ ), to z równania

$$(3.23) \quad \sum_{k_1, k_2, \dots, k_6} \varepsilon c_{1k_1} c_{2k_2} \dots c_{6k_6} = 0,$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich możliwych permutacjach drugich wskaźników  $k_1, k_2, \dots, k_6$  liczb  $1, 2, \dots, 6$ , zaś  $\varepsilon$  jest równe  $+1$  lub  $-1$  w zależności od tego, czy permutacja  $k_1, k_2, \dots, k_6$  jest parzysta, czy też jest nieparzystą, otrzymujemy ciąg rozwiązań na częstości drgań własnych  $\omega_n$ , ( $\omega_n = \alpha_n q_n$ ). Oczywiście  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  są funkcjami  $\omega$ .

Z zależności (3.18) możemy obliczyć ciągi wartości dla  $a_{1n}, b_{1n}, a_{2n}, b_{2n}, a_{3n}, b_{3n}$ . Następnie z układu równań na stałe (3.22), dla określonej częstości  $\omega$  wyznaczamy ciągi tych stałych:  $A_{11}^n, A_{12}^n, A_{21}^n, A_{22}^n, A_{31}^n, A_{32}^n$  ( $n$  jest indeksem górnym).

Po przeprowadzeniu powyższych obliczeń możemy obecnie określić postacie drgań własnych, dla określonej częstości  $\omega$ .

We współrzędnych  $u$  i  $v$  są one następujące:

$$\begin{aligned}
 u_n(s) = & A_{11}^n [(\psi\gamma_1 s + \psi\beta_1 w_{1b} + \psi\gamma_1 w_{1a}) \sin b_1 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_1 s + \psi\beta_1 w_{1a} + \psi\gamma_1 w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{12}^n [(1 - \psi\beta_1 s + \psi\beta_1 w_{1a} + \psi\gamma_1 w_{1b}) \sin b_1 s + \\
 & + (-\psi\gamma_1 s + \psi\gamma_1 w_{1a} + \psi\beta_1 w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{21}^n [(\psi\gamma_3 s - \psi\gamma_3 w_{2a} + \psi\beta_3 w_{2b}) \sin b_2 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_3 s + \psi\beta_3 w_{2a} + \psi\gamma_3 w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{22}^n [(1 - \psi\beta_3 s + \psi\beta_3 w_{2a} + \psi\gamma_3 w_{2b}) \sin b_2 s + \\
 & + (-\psi\gamma_3 s + \psi\gamma_3 w_{2a} - \psi\beta_3 w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{31}^n [(\psi\gamma_5 s + \psi\gamma_5 w_{3a} + \psi\beta_5 w_{3b}) \sin b_3 s + \\
 & + (1 - \psi\beta_5 s + \psi\beta_5 w_{3a} + \psi\gamma_5 w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s} + \\
 & + A_{32}^n [(1 - \psi\beta_5 s + \psi\beta_5 w_{3a} + \psi\gamma_5 w_{3b}) \sin b_3 s + \\
 & + (-\psi\gamma_5 s + \psi\gamma_5 w_{3a} - \psi\beta_5 w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s}, \\
 v_n(s) = & A_{11}^n [(-\gamma_1 - \psi w_{1b}) \sin b_1 s + (\psi s + \beta_1 - \psi w_{1a}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{12}^n [(\psi s + \beta_1 - w_{1a} \psi) \sin b_1 s + (\gamma_1 + \psi w_{1b}) \cos b_1 s] e^{a_1 s} + \\
 & + A_{21}^n [(-\gamma_3 - \psi w_{2b}) \sin b_2 s + (\psi s + \beta_3 - \psi w_{2a}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{22}^n [(\psi s + \beta_3 - \psi w_{2a}) \sin b_2 s + (\gamma_3 + \psi w_{2b}) \cos b_2 s] e^{a_2 s} + \\
 & + A_{31}^n [(-\gamma_5 - \psi w_{3b}) \sin b_3 s + (\psi s + \beta_5 - \psi w_{3a}) \cos b_3 s] e^{a_3 s} + \\
 & + A_{32}^n [(\psi s + \beta_5 - \psi w_{3a}) \sin b_3 s + (\gamma_5 + \psi w_{3b}) \cos b_3 s] e^{a_3 s},
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

gdzie

$$w_{ia} = \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad w_{ib} = \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2}, \quad i = (1, 2, 3).$$

Rozwiązania układu (3.6) wyrażą się zatem w postaci następujących szeregów:

$$\begin{aligned}
 u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t), \\
 v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t).
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

W układzie (3.26) występują stałe  $C_n$  i  $D_n$ , które wyznaczymy z warunków początkowych, wykorzystując w tym celu warunek ortogonalności drgań własnych. Przeprowadzając w znany sposób proces ortogonalizacji [4] dla układu (3.7) otrzymujemy następujący warunek ortogonalności

$$\int_0^l (u_n u_k + v_n v_k) ds = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq k, \\ \int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds, & \text{dla } n = k. \end{cases}
 \tag{3.27}$$

Warunki początkowe potrzebne do wyznaczenia stałych są:

$$\begin{aligned}
 u(s, 0) &= g_1(s), & v(s, 0) &= g_2(s), \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(s,0)} &= g_3(s), & \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(s,0)} &= g_4(s).
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymamy następujące zależności na stałe  $C_n$  i  $D_n$ :

$$(3.29) \quad C_n = \frac{\int_0^l (g_1 u_n + g_2 v_n) ds}{\int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds},$$

$$D_n = \frac{\int_0^l (g_3 u_n + g_4 v_n) ds}{\omega_n \int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds}.$$

Rozpatrzmy obecnie drugą możliwość występującą w przypadku I, tzn.: kiedy równanie charakterystyczne będzie posiadało cztery pierwiastki zespolone sprzężone i dwa pierwiastki rzeczywiste równe lecz przeciwnych znaków. Zapišemy to w postaci ogólnej:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} r_1 &= c_1 + id_1, & r_2 &= c_1 - id_1, \\ r_3 &= c_2 + id_2, & r_4 &= c_2 - id_2, \\ r_5 &= c_3, & r_6 &= -c_3. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (3.10) zapišemy w postaci:

$$(3.31) \quad \xi = \sum_{j=1}^6 E_j e^{r_j s}, \quad \eta = \sum_{j=1}^6 H_j e^{r_j s},$$

gdzie  $E_j, H_j$  dla  $(j = 1, 2, 3, 4)$  są stałymi zespolonymi, zaś dla  $(j = 5, 6)$  stałymi rzeczywistymi. Wymienione stałe są między sobą związane następującą zależnością wynikającą z (3.11):

$$(3.32) \quad \frac{H_j}{E_j} = - \frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3} = - \frac{2 \frac{I}{A} \psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A} r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \zeta_j + \sigma_j i,$$

dla  $j = 1, 2, 3, 4,$

$$\frac{H_j}{E_j} = \zeta_j \quad \text{dla } j = 5, 6.$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, rozwiązanie (3.31) można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \xi &= E_{11} e^{c_1 s} \cos d_1 s + E_{12} e^{c_1 s} \sin d_1 s + E_{21} e^{c_2 s} \cos d_2 s + \\ &\quad + E_{22} e^{c_2 s} \sin d_2 s + E_{31} \operatorname{ch} c_3 s + E_{32} \operatorname{sh} c_3 s, \\ \eta &= (E_{11} \zeta_1 + E_{12} \sigma_1) e^{c_1 s} \cos d_1 s - (E_{11} \sigma_1 - E_{12} \zeta_1) e^{c_1 s} \sin d_1 s + \\ &\quad + (E_{21} \zeta_3 + E_{22} \sigma_3) e^{c_2 s} \cos d_2 s - (E_{21} \sigma_3 - E_{22} \zeta_3) e^{c_2 s} \sin d_2 s + \\ &\quad + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch} c_3 s - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh} c_3 s, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(E_{11} - iE_{12}) &= E_1, & \frac{1}{2}(E_{11} + iE_{12}) &= E_2, \\ \frac{1}{2}(E_{21} - iE_{22}) &= E_3, & \frac{1}{2}(E_{21} + iE_{22}) &= E_4,\end{aligned}$$

stałe  $E_{31}$  i  $E_{32}$  są rzeczywiste.

Przystąpimy do wyznaczenia stałych z układu równań w postaci:

$$\begin{aligned}(3.34) \quad & E_{11} \left[ \cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + E_{12} \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{21} \left[ \cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) + E_{22} \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{31} \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) + E_{32} \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) = 0, \\ & E_{11} \left( \cos\frac{1}{2}d_1l + E_{12} \sin\frac{1}{2}d_1l \right) \exp\left(\frac{1}{2}c_1l\right) + E_{21} \left( \cos\frac{1}{2}d_2l + E_{22} \sin\frac{1}{2}d_2l \right) \times \\ & \times \exp\frac{1}{2}c_2l + E_{31} \operatorname{ch}\frac{1}{2}c_3l + E_{32} \operatorname{sh}\frac{1}{2}c_3l = 0, \\ & E_{11} \left[ \zeta_1 \cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) - \sigma_1 \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{12} \left[ \sigma_1 \cos\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + \zeta_1 \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_1l\right) + \\ & + E_{21} \left[ \zeta_3 \cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) - \sigma_3 \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{22} \left[ \sigma_3 \cos\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) + \zeta_3 \sin\left(-\frac{1}{2}d_2l\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}c_2l\right) + \\ & + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2}c_3l\right) = 0, \\ & \left[ E_{11} \left( \zeta_1 \cos\frac{1}{2}d_1l - \sigma_1 \sin\frac{1}{2}d_1l \right) + E_{12} \left( \sigma_1 \cos\frac{1}{2}d_1l + \zeta_1 \sin\frac{1}{2}d_1l \right) \right] \exp\frac{1}{2}c_1l + \\ & + \left[ E_{21} \left( \zeta_3 \cos\frac{1}{2}d_2l - \sigma_3 \sin\frac{1}{2}d_2l \right) + E_{22} \left( \sigma_3 \cos\frac{1}{2}d_2l + \zeta_3 \sin\frac{1}{2}d_2l \right) \right] \times \\ & \times \exp\frac{1}{2}c_2l + E_{31} \zeta_5 \operatorname{ch}\frac{1}{2}c_3l - E_{32} \zeta_5 \operatorname{sh}\frac{1}{2}c_3l = 0, \\ & E_{11} \left\{ [-2\psi d_1 - \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\zeta_1 c_1 d_1] \sin\left(-\frac{1}{2}d_1l\right) + \right.\end{aligned}$$



(3.34)  
[c.d.]

$$\begin{aligned}
& + [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \cos\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_1 l\right) + \right. \\
& \quad + E_{12} \left\{ [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \sin\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) + \right. \\
& + [2\psi d_1 + \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) + 2\zeta_1 c_1 d_1] \cos\left(-\frac{1}{2} d_1 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_1 l\right) + \\
& \quad + E_{21} \left\{ [-2\psi d_2 - \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\zeta_3 c_2 d_2] \sin\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) + \right. \\
& + [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \cos\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_2 l\right) + \\
& \quad + E_{22} \left\{ [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \sin\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) + \right. \\
& + [2\psi d_2 + \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) + 2\zeta_3 c_2 d_2] \cos\left(-\frac{1}{2} d_2 l\right) \left\} \exp\left(-\frac{1}{2} c_2 l\right) + \\
& \quad + E_{31} \left[ 2\psi c_3 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) + \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) \right] + \\
& \quad + E_{32} \left[ 2\psi c_3 \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) - \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{2} c_3 l\right) \right] = 0, \\
E_{11} & \left\{ [-2\psi d_1 - \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\zeta_1 c_1 d_1] \sin \frac{1}{2} d_1 l + \right. \\
& \quad + [(2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1) \cos \frac{1}{2} d_1 l] \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_1 l} + \\
& \quad + E_{12} \left\{ [2\psi c_1 + \zeta_1(c_1^2 - d_1^2) - 2\sigma_1 c_1 d_1] \sin \frac{1}{2} d_1 l + \right. \\
& \quad + [2\psi d_1 + \sigma_1(c_1^2 - d_1^2) + 2\zeta_1 c_1 d_1] \cos \frac{1}{2} d_1 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_1 l} + \\
& \quad + E_{21} \left\{ [-2\psi d_2 - \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\zeta_3 c_2 d_2] \sin \frac{1}{2} d_2 l + \right. \\
& \quad + [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \cos \frac{1}{2} d_2 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_2 l} + \\
& \quad + E_{22} \left\{ [2\psi c_2 + \zeta_3(c_2^2 - d_2^2) - 2\sigma_3 c_2 d_2] \sin \frac{1}{2} d_2 l + \right. \\
& \quad + [2\psi d_2 + \sigma_3(c_2^2 - d_2^2) + 2\zeta_3 c_2 d_2] \cos \frac{1}{2} d_2 l \left. \right\} e^{\frac{1}{2} c_2 l} + \\
& \quad + E_{31} \left[ 2\psi c_3 \operatorname{sh} \frac{1}{2} c_3 l + \zeta_5 c_3^2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} c_3 l \right] + \\
& \quad + E_{32} \left[ 2\psi c_3 \operatorname{ch} \frac{1}{2} c_3 l - \zeta_5 c_3^2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} c_3 l \right] = 0.
\end{aligned}$$

Wielkości  $\omega_n$  wyznaczamy podobnie, jak poprzednio. Mając  $\omega_n$  możemy wyznaczyć stałe  $E_{ij}^n$ .

Dla określonej częstości  $\omega_n$  postacie drgań głównych we współrzędnych  $u$  i  $v$  są następujące:

$$\begin{aligned}
 u_n(s) = & E_{11}^n [(\psi\sigma_1 s - \psi\sigma_1 w_{1c} + \zeta_1 \psi w_{1d}) \sin d_1 s + \\
 & + (1 - \psi\zeta_1 s + \psi\zeta_1 w_{1c} + \psi\sigma_1 w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{12}^n [(1 - \psi\zeta_1 s + \psi\zeta_1 w_{1c} + \psi\sigma_1 w_{1d}) \sin d_1 s + \\
 & + (-\psi\sigma_1 s + \psi\sigma_1 w_{1c} - \psi\zeta_1 w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{21}^n [(\psi\sigma_3 s - \psi\sigma_3 w_{2c} + \psi\zeta_3 w_{2d}) \sin d_2 s + \\
 & + (1 - \psi\zeta_3 s + \psi\zeta_3 w_{2c} + \psi\sigma_3 w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{22}^n [(1 - \psi\zeta_3 s + \psi\zeta_3 w_{2c} + \psi\sigma_3 w_{2d}) \sin d_2 s + \\
 & + (-\psi\sigma_3 s + \psi\sigma_3 w_{2c} - \psi\zeta_3 w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{31}^n \left[ (1 - \psi\zeta_5 s) \operatorname{ch} c_3 s + \left( \psi\zeta_5 \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{sh} c_3 s \right] + \\
 & + E_{32}^n \left[ \left( \psi\zeta_5 \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{ch} c_3 s + (1 + \zeta_5 \psi s) \operatorname{sh} c_3 s \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 v_n(s) = & E_{11}^n [(-\sigma_1 - \psi w_{1d}) \sin d_1 s + (\psi s + \zeta_1 - \psi w_{1c}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{12}^n [(\psi s + \zeta_1 - \psi w_{1c}) \sin d_1 s + (\sigma_1 + \psi w_{1d}) \cos d_1 s] e^{c_1 s} + \\
 & + E_{21}^n [(-\sigma_3 - \psi w_{2d}) \sin d_2 s + (\psi s + \zeta_3 - \psi w_{2c}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{22}^n [(\psi s + \zeta_3 - \psi w_{2c}) \sin d_2 s + (\sigma_3 + \psi w_{2d}) \cos d_2 s] e^{c_2 s} + \\
 & + E_{31}^n \left[ \left( -\psi \frac{1}{c_3} \right) \operatorname{sh} c_3 s + (\psi s + \zeta_5) \operatorname{ch} c_3 s \right] + \\
 & + E_{32}^n \left[ (\psi s - \zeta_5) \operatorname{sh} c_3 s - \psi \frac{1}{c_3} \operatorname{ch} c_3 s \right].
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach, dla skrócenia zapisu, oznaczyliśmy przez  $w_{ic}$ ,  $w_{id}$  wyrażenia:

$$w_{ic} = \frac{c_i}{c_i^2 + d_i^2}, \quad w_{id} = \frac{d_i}{c_i^2 + d_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Po podstawieniu znalezionych postaci drgań własnych do (3.26) otrzymamy poszukiwane rozwiązania.

*Przypadek II.* Rozpatrzmy pierwszą możliwość: gdy dwa pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone, sprzężone, a cztery rzeczywiste, co ogólnie zapiszemy:

$$\begin{aligned}
 r_1 = e_1 + if_1, & \quad r_2 = e_1 - if_1, \\
 r_3 = e_2, & \quad r_4 = -e_2, \\
 r_5 = e_3, & \quad r_0 = -e_3.
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Całki ogólne układu równań (3.10) napiszemy od razu w postaci trygonometrycznej:

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \xi &= G_{11} e^{e_1 s} \cos f_1 s + G_{12} e^{e_1 s} \sin f_1 s + G_3 \operatorname{sh} e_2 s + G_4 \operatorname{ch} e_2 s + G_5 \operatorname{sh} e_3 s + G_6 \operatorname{ch} e_3 s, \\ \eta &= (G_{11} \vartheta_1 + G_{12} \delta_1) e^{e_1 s} \cos f_1 s - (G_{11} \delta_1 - G_{12} \vartheta_1) e^{e_1 s} \sin f_1 s + \\ &\quad + G_3 \kappa_3 \operatorname{sh} e_2 s - G_4 \kappa_3 \operatorname{ch} e_2 s + G_5 \kappa_5 \operatorname{sh} e_3 s - G_6 \kappa_5 \operatorname{ch} e_3 s, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.39) \quad \kappa_j = \frac{P_j}{G_j} = -\frac{(\mu+1)r_j^2 + 3\mu q^2}{2\frac{I}{A}\psi r_j^3} = -\frac{2\frac{I}{A}\psi r_j^3 + 2\psi r_j}{-\frac{I}{A}r_j^4 + \mu r_j^2 + 3\mu q^2} = \kappa_j = \vartheta_j + i\delta_j, \\ j = 1, 2,$$

$$\kappa_j = \vartheta_j, \quad j = 3, 4, 5, 6,$$

$$G_1 = \frac{1}{2} (G_{11} + iG_{12}), \quad G_2 = \frac{1}{2} (G_{11} - iG_{22}),$$

$P_j, G_j$  dla  $j = 3, 4, 5, 6$  są stałymi rzeczywistymi.

Po analogicznych obliczeniach, jak w poprzednich przypadkach, otrzymamy następujące postacie drgań własnych:

$$(3.40) \quad \begin{aligned} u_n(s) &= G_{11}^n [(\psi \delta_1 s - \psi \delta_1 w_{1e} + \psi \vartheta_1 w_{1f}) \sin f_1 s + \\ &\quad + (1 - \psi \vartheta_1 s + \psi \vartheta_1 w_{1e} + \psi \delta_1 w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_{12}^n [(1 - \psi \vartheta_1 s + \psi \vartheta_1 w_{1e} + \psi \delta_1 w_{1f}) \sin f_1 s + \\ &\quad + (-\psi \delta_1 s + \psi \delta_1 w_{1e} - \psi \vartheta_1 w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_3^n \left[ (1 - \psi \kappa_3 s) \operatorname{sh} e_2 s + \psi \frac{\kappa_3}{e_2} \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_4^n \left[ -\psi \frac{\kappa_3}{e_2} \operatorname{sh} e_2 s + (1 + \psi \kappa_3 s) \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_5^n \left[ (1 - \psi \kappa_5 s) \operatorname{sh} e_3 s + \psi \frac{\kappa_5}{e_3} \operatorname{ch} e_3 s \right] + \\ &\quad + G_6^n \left[ \left( -\psi \frac{\kappa_5}{e_3} \right) \operatorname{sh} e_3 s + (1 + \psi \kappa_5 s) \operatorname{ch} e_3 s \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n(s) &= G_{11}^n [(-\psi w_{1f} - \delta_1) \sin f_1 s + (\psi s + \vartheta_1 - \psi w_{1e}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_{12}^n [(\psi s + \vartheta_1 - \psi w_{1e}) \sin f_1 s + (\delta_1 + \psi w_{1f}) \cos f_1 s] e^{e_1 s} + \\ &\quad + G_3^n \left[ (\psi s + \kappa_3) \operatorname{sh} e_2 s - \psi \frac{1}{e_2} \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_4^n \left[ -\psi \frac{1}{e_2} \operatorname{sh} e_2 s + (\psi s - \kappa_3) \operatorname{ch} e_2 s \right] + \\ &\quad + G_5^n \left[ (\psi s + \kappa_5) \operatorname{sh} e_3 s - \psi s \frac{1}{e_3} \operatorname{ch} e_3 s \right] + \\ &\quad + G_6^n \left[ -\psi \frac{1}{e_3} \operatorname{sh} e_3 s + (\psi s - \kappa_5) \operatorname{ch} e_3 s \right]. \end{aligned}$$

W celu uzyskania rozwiązań należy powyższe postacie  $u_n$  i  $v_n$  podstawić do wzorów (3.26).

We wzorach (3.40) oznaczono:

$$w_{1e} = \frac{e_1}{e_1^2 + f_1^2}, \quad w_{1f} = \frac{f_1}{e_1^2 + f_1^2}.$$

#### 4. Drgania wymuszone

W celu rozpatrzenia drgań wymuszonych weźmiemy pod uwagę układ (2.13). Postępując tak samo, jak przy analizie drgań swobodnych, układ ten przekształcimy do następującej postaci, wygodnej w dalszych rozważaniach:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (\mu+1) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \psi s \frac{I}{A} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \frac{I}{A} \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + \psi s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \psi \frac{\partial v}{\partial s} - 3 \frac{M}{AE} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f_1(s, t), \\ \frac{I}{A} \psi s \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \frac{I}{A} \psi \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \psi s \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \psi \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{I}{A} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 3 \frac{M}{AE} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= f_2(s, t). \end{aligned}$$

Całki ogólne układu równań jednorodnych zostały wyznaczone w poprzednim rozdziale. Całek szczególnych będziemy poszukiwać metodą rozkładu według postaci drgań własnych (np. [4]), w następującej formie:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) S_n(t), \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) S_n(t). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (4.2) do (4.1) otrzymamy:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ (\mu+1) u_n'' + \psi v_n' + \psi s v_n'' + \frac{I}{A} \psi v_n''' + \frac{I}{A} \psi s v_n^{IV} \right] S_n - 3 \frac{M}{AE} u_n \ddot{S}_n \right\} &= f_1(s, t), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{I}{A} \psi s u_n^{IV} + \frac{I}{A} \psi u_n''' - \frac{I}{A} v_n^{IV} + \psi s u_n'' + \psi u_n' + \mu v_n'' \right] S_n - 3 \frac{M}{AE} v_n \ddot{S}_n \right\} &= f_2(s, t), \end{aligned}$$

gdzie apostrofami oznaczono różniczkowanie cząstkowe po  $s$ , kropkami zaś różniczkowanie po  $t$ .

W celu wyznaczenia niewiadomych funkcji  $S_n(t)$ , pierwsze równanie układu (4.3) pomnożymy stronami przez  $u_k$ , drugie przez  $v_k$ , a następnie dodamy je stronami. W ten sposób otrzymujemy:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ (\mu+1) u_n'' u_k + \psi v_n' u_k + \psi s v_n'' u_k + \frac{I}{A} \psi v_n''' u_k + \frac{I}{A} \psi s v_n^{IV} u_k + \psi s u_n'' v_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{I}{A} \psi s u_n^{IV} v_k + \frac{I}{A} \psi u_n''' v_k - \frac{I}{A} v_n^{IV} v_k + \psi u_n' v_k + \mu v_n'' v_k \right] S_n - \right. \\ \left. - \left[ 3 \frac{M}{AE} u_n u_k + 3 \frac{M}{AE} v_n v_k \right] \ddot{S}_n \right\} = f_1 u_k + f_2 v_k. \end{aligned}$$

Funkcje  $u_n$ ,  $v_n$  spełniają układ równań jednorodnych (3.8). Mnożąc jak poprzednio pierwsze równanie tego układu przez  $u_k$ , drugie przez  $v_k$  otrzymamy:

$$(4.5) \quad (\mu+1)u_n''u_k + \frac{I}{A}\psi sv_n^{IV}u_k + \frac{I}{A}\psi v_n''u_k + \psi sv_n''u_k + \psi v_n'u_k + \frac{I}{A}\psi su_n^{IV}v_k + \\ + \frac{I}{A}\psi u_n''v_k - \frac{I}{A}v_n^{IV}v_k + \psi su_n''v_k + \psi u_n'v_k + \mu v_n''v_k = -3\mu q^2(u_nu_k + v_nv_k).$$

Jak widać, pierwsze wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (4.4) jest równe prawej stronie równania (4.5). Uwzględniając to i wyłączając wspólny czynnik przed nawias otrzymamy:

$$(4.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_nu_k + v_nv_k) \left( -3\mu q^2 S_n - \frac{3M}{AE} \ddot{S}_n \right) = f_1 u_k + f_2 v_k.$$

Po obustronnym przecałkowaniu po długości  $l$  i wykorzystaniu warunku ortogonalności (3.27) otrzymamy

$$(4.7) \quad -3\mu q^2 S_n - \frac{3M}{AE} \ddot{S}_n = K_n(t),$$

gdzie

$$K_n(t) = \frac{\int_0^l (f_1 u_n + f_2 v_n) ds}{\int_0^l (u_n^2 + v_n^2) ds}.$$

Równanie (4.7) przekształcimy do postaci

$$(4.7a) \quad \ddot{S}_n + \frac{\mu q^2 AE}{M} S_n = -\frac{AE}{3M} K_n(t).$$

Rozwiązanie równania (4.7a) przy identycznych warunkach brzegowych, jak dla drgań swobodnych i warunkach początkowych

$$(4.8) \quad S_n(0) = 0, \quad \dot{S}_n(0) = 0$$

ma następującą postać:

$$(4.9) \quad S_n(t) = -\frac{AE}{3Mq} \sqrt{\frac{M}{\mu AE}} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau = \\ = -\frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau.$$

Zatem całki szczególne układu (4.1) (drżania wymuszone ciągła) wyrażają się następująco:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) S_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AE}{3M\omega_n} u_n \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau, \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) S_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AE}{3M\omega_n} v_n \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Całki ogólne układu (4.1) (drżania całkowite ciągła) mają następującą postać:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) \left\{ C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t - \frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \right\}, \\ v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) \left\{ C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t - \frac{AE}{3M\omega_n} \int_0^t K_n(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau \right\}, \end{aligned}$$

gdzie za  $u_n$  i  $v_n$  bierzemy ciągi funkcji, uwzględniając przy tym odpowiedni przypadek rozwiązania równania charakterystycznego.

## 5. Zakończenie

Zaproponowana w pracy metoda znajdowania drgań wymuszonych liny z uwzględnieniem jej sztywności na zginanie jest metodą ogólną. Ze względu na duże trudności rachunkowe uzyskanie efektywnych rozwiązań jest możliwe jedynie przy użyciu maszyn cyfrowych. Dotyczy to wyznaczania pierwiastków równania charakterystycznego.

W pracy przedstawiono ogólną analizę ze względu na uzyskanie rozwiązań w zależności od parametrów liny. Uwzględniona sztywność giętna utrudnia wprawdzie tę analizę i nie pozwala na znalezienie rozwiązań analitycznych w formie zamkniętej, ale daje możliwości zbadania jej wpływu zarówno na częstotliwości drgań własnych, jak i na kształt funkcji własnych. Przy znajomości funkcji własnych, przez zastosowanie uogólnionej ortogonalizacji, problem znalezienia amplitud drgań wymuszonych nie przedstawia trudności.

## Literatura cytowana w tekście

1. A. A. АНАНЕВ, *К расчету канатов предохранительных сетей подвесных канатных дорог*, ЛПИ, 1949.
2. В. В. БОЛОТИН, *О вибрациях проводов воздушных линий электропередачи и борьбе с ними*, Издат. МЭИ, Москва 1959 (вып. 32).
3. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągłowne — teoria i obliczanie*, WNT, Warszawa 1970.
4. S. KALISKI i współautorzy, *Drżania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
5. G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik*, Leipzig 1897.
6. Z. ONISZCZUK, *Drżania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 12 (1974).
7. A. SIMPSON, *On the oscillatory motions of translating elastic cables*, J. Sound Vibr., 20, 2 (1972).

## Резюме

КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДА В ПЛОСКОСТИ СВИСА С УЧЕТОМ ЕГО ЖЕСТКОСТИ  
НА ИЗГИБ

В работе рассмотрены свободные и вынужденные колебания провода. При этом учтены: жесткость на изгиб, составляющая силы Кориолиса и центробежная инерционная сила. Колебания порождаются переменной во времени распределенной нагрузкой.

Задача сведена к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Для решения этих уравнений использованы следующие методы: линеаризация, разделение переменных и разложение по главным формам колебаний.

Анализ проведен с точки зрения подбора геометрических параметров провода. Такой подход будет полезен при решении следующей проблемы: динамического демпфирования колебаний кабельных энергетических систем.

## Summary

VIBRATIONS OF CABLE IN THE SAG-SPAN PLANE WITH REGARD  
ITS BENDING STIFFNESS

In this paper the free and forced vibrations of cables are analysed. Bending stiffness of the cable, the Coriolis and centripetal components of the force of inertia, are taken into consideration. Vibrations are excited by continuous time-dependent loads. The problem is described by a set of the two partial differential equations of fourth order. The following methods of solution are applied: linearization, separation of variables and expansion into the series of free vibration forms. The analysis was performed from point of view of the proper choice geometrical parameters of cables. This approach will be useful in considering other problems like that of dynamical damping the cables sets.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1975 r.*