MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 14 (1976)

O OPISIE FIZYCZNIE NIELINIOWEJ SPRĘŻYSTOŚCI MATERIAŁÓW SYPKICH

TOMASZ HUECKEL (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiały sypkie wykazują cechy sprężyste i plastyczne. Sprężyście zachowują się w początkowej fazie obciążenia oraz w czasie odciążania i dociążania, kiedy stan naprężenia leży wewnątrz powierzchni plastyczności. Są to procesy silnie nieliniowe nawet w zakresie małych deformacji. Ponadto mają one inny charakter przy pierwszym cyklu odciążenia niż przy wielokrotnym odciążaniu i dociążaniu (por. [3]). W czasie pierwszego odciążania z danego stanu naprężenia zachodzą w materiale efekty mikropłynięcia plastycznego i dopiero po pewnej liczbie cykli odciążania i dociążania zachowanie się materiału jest czysto sprężyste (całkowita odwracalność odkształceń przy zamkniętych cyklach odciążenia i dociążenia). Pomijając mechanizmy stanów przejściowych, celowe jest w pewnych przypadkach oddzielne traktowanie pierwszego odciążenia oraz ustalonego odciążenia idealnie sprężystego.

Za przyczynę tak silnie nieliniowych efektów w materiałach rozdrobnionych uważa się na ogół znaczne zmiany gęstości związane z deformacją materiału. Model matematyczny plastycznego zachowania się ciał o zmiennej gęstości sformułowano w pracy [1]. Wpływ zmian gęstości na sprężyste i plastyczne cechy materiałów zanalizowano w pracy [2] zakładając, na podstawie przeprowadzonych eksperymentów w zakresie sprężystym, zależności stycznych modułów sprężystości od odwracalnej zmiany gęstości. Założenie takie dopuszcza wspomniane mikroefekty plastyczne przy odciążeniu oraz pozwala na znaczne uproszczenie opisu materiału [11].

W pracy pokażemy własności prostych (tj. liniowych tensorowo) nieliniowych fizycznie związków opisujących cechy sprężyste materiałów rozdrobnionych. Na podstawie znanych warunków całkowalności i potencjalności takich związków zbadamy różnice występujące przy różnych sposobach ich formułowania. Okazuje się, że na ogół znane związki dla materiałów sypkich nie opisują efektów czysto sprężystych; można je więc odnosić wyłącznie do pierwszego odciążenia. Z drugiej strony wielu efektów nieliniowych o charakterze sprężystym nie można opisać w zakresie małych deformacji przez związki tensorowo liniowe.

Rozważać będziemy odwracalną część przyrostowego związku sprężysto-plastycznego, którą zapiszemy w postaci

$$d\varepsilon'_{ij} = A_{ijkl}\,d\sigma_{kl} \tag{1.1}$$

lub też

$$d\sigma_{ij} = B_{ijkl}\,d\varepsilon'_{kl}, \tag{1.2}$$

gdzie $d\varepsilon'_{ij}$ jest odwracalnym przyrostem odkształceń, $d\sigma_{kl}$ — przyrostem naprężeń, a A_{ijkl} stanowi macierz funkcji materiałowych, którą wyznacza się doświadczalnie, przy czym jest ona, z uwagi na nieliniowość omawianych procesów, funkcją stanów naprężenia lub odkształcenia.

Z charakteru hipotez, opartych na wynikach doświadczeń dotyczących postaci tej funkcji, wynikają odmienne konsekwencje, które ograniczają zakres stosowania postulowanych związków. Formułowanie tych hipotez odbywa się w dwojaki sposób. Po pierwsze, można przyjąć, że na podstawie danych doświadczalnych da się wyznaczyć jednoznaczną zależność (moduły sieczne) między tensorem naprężenia σ_{ij} i tensorem odkształcenia sprężystego ε'_{ij}. Zróżniczkowanie takiej zależności daje związek (1.1) lub (1.2). Po drugie, powyższe założenie może być niesprawdzalne doświadczalnie, natomiast udaje się z danych doświadczalnych znalezienie związków między przyrostami $d\sigma_{ij}$ oraz $d\varepsilon'_{ij}$ (moduły styczne). Oznacza to, że takim samym przyrostom naprężenia w różnych stanach naprężenia (czy odkształcenia) odpowiadają różne przyrosty odkształcenia. Tym samym, kolejnych stanów naprężenia i odkształcenia nie można ze sobą w ogólności powiązać jednoznacznie.

Poniżej omówimy, w świetle wyników uzyskanych dla związków ogólnych, [7, 12], własności szczególnych postaci równań konstytutywnych mających zastosowanie do opisu ośrodków rozdrobnionych (por. [8, 9, 5, 6]).

2. Własności modułów siecznych

W ogólnej formie związek $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon'_{kl})$ dla ciała izotropowego można zapisać jako [4]

$$\sigma_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \varepsilon'_{ij} + \Phi_2 \varepsilon'_{ik} \varepsilon'_{kj} \tag{2.1}$$

lub

$$\varepsilon'_{ij} = \Psi_0 \delta_{ij} + \Psi_1 \sigma_{ij} + \Psi_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj}, \tag{2.2}$$

gdzie Φ_0, Φ_1, Φ_2 oraz Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 są dowolnymi funkcjami niezmienników tensora odpowiednio ε'_{ij} oraz σ_{ij}. Zachowanie się materiału opisane przez powyższe związki znane jest jako sprężystość w sensie Cauchy. Procesy deformacji mogą być w tym przypadku dysypatywne, tzn. przy pewnych zamkniętych cyklach w przestrzeni naprężeń (albo odkształceń ε'_{ij}) materiał może dysypować energię mechaniczną (albo pobierać ją z otoczenia, czy źródeł pozamechanicznych, przy cyklach odwrotnych). Opis przez równania (2.1) lub (2.2) może być stosowany do pierwszego odciążenia z danego stanu naprężeń, a funkcje inwariantów Φ_i czy Ψ_i są dowolne.

Szczególną postacią związków (2.1) lub (2.2) są związki potencjalnej sprężystości (w sensie Greena) lub hipersprężystości, kiedy zachodzi

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} \quad \text{dla} \quad (2.1) \tag{2.3}$$

lub

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dla} \quad (2.2),$$

a funkcje inwariantów U i V są potencjałami odkształceń ε'_{ij} i naprężeń σ_{ij}. Rozpatrzmy konsekwencje wynikające z założenia (2.3) dla nieliniowych związków tensorowo liniowych (tj., dla których $\Phi_2 = 0$, $\Psi_2 = 0$), stosowanych w mechanice ośrodków sypkich. To ostatnie założenie pozwala rozprząc równania (2.1) i (2.2) na części dewiatorową i kulistą. Zapisując np. (2.1) w formie powszechnie stosowanej, mamy (Φ_0 jest tu jednorodną funkcją ε'_{kk})

$$\sigma_{kk} = K(\varepsilon'_{kk}, e_{mn})\,\varepsilon'_{kk}; \qquad s_{ij} = G(\varepsilon'_{kk}, e'_{mn})e'_{ij}. \tag{2.4}$$

Znajdźmy pracę elementarną

$$dU = \sigma_{kk}d\varepsilon'_{kk} + s_{ij}de'_{ij}, \tag{2.5}$$

będącą w ogólności formą Pfaffa. Wielkość U jest tylko wtedy niezależna od drogi całkowania, gdy wyrażenie Pfaffa $đU$ jest różniczką zupełną ($đU = dU$), tzn., gdy zachodzi $(2.3)_1$, czyli $\sigma_{kk} = \partial U/\partial\varepsilon'_{kk}$ i $s_{ij} = \partial U/\partial e'_{ij}$, przy czym spełnione są związki

$$\frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial e'_{ij}} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kk}}; \qquad \frac{\partial s_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial s_{kl}}{\partial e_{ij}}. \tag{2.6}$$

Podstawiając do tego ostatniego warunku związki fizyczne (2.4), widzimy, że aby dla materiału opisanego przez nie istniał potencjał U, moduły K i G muszą spełniać warunki

$$\frac{\partial[K(\varepsilon'_{kk}, e'_{kl})\,\varepsilon'_{kk}]}{\partial e'_{ij}} = \frac{\partial[G(\varepsilon'_{kk}, e'_{kl})e'_{ij}]}{\partial\varepsilon'_{kk}}. \tag{2.7}$$

Podobnie, dla tensorowo liniowego związku typu (2.2)

$$\varepsilon'_{kk} = \varkappa(\sigma_{kk}, s_{ij})\sigma_{kk}; \qquad e'_{kl} = \omega(\sigma_{kk}, s_{ij})s_{kl} \tag{2.8}$$

można sformułować warunki potencjalności

$$\frac{\partial[\varkappa(\sigma_{kk}, s_{ij})\sigma_{kk}]}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial[\omega(\sigma_{kk}, s_{ij})s_{ij}]}{\partial\sigma_{kk}}. \tag{2.9}$$

Spełnienie warunków (2.8) lub (2.9) nałożonych na moduły sieczne materiału zapewnia, że zachowanie się materiału jest hipersprężyste, tzn. energia sprężysta nie zależy od kolejności poprzednich stanów deformowania materiału, lecz od aktualnej deformacji czy naprężenia. Można zatem w ten sposób opisywać odciążanie w stanie ustalonych własności.

Przy wyznaczaniu funkcji materiałowych dla opisu idealnie sprężystego zachowania się materiału wymagane jest więc spełnienie przez te funkcje dodatkowych więzów poza ich niezmienniczością. Spełnienie tych więzów określa efekty fizyczne, które model może opisać wykluczając inne. Takie efekty wskażemy na przykładzie dwóch związków konstytutywnych typu (2.4) i (2.8) stosowanych w mechanice gruntów [5, 6]. Niech zachodzi odpowiednio

$$K = K(\varrho'), \quad G = G(\varrho') \quad \text{dla} \quad (2.4), \tag{2.10}$$
$$d\varrho'/(\varrho' + \varrho_0) = d\varepsilon'_{kk}$$

i

$$\varkappa = \varkappa(\sigma_{kk}), \quad \omega = \omega(\sigma_{kk}) \quad \text{dla} \quad (2.5). \tag{2.11}$$

Fizyczny sens przyjęcia modułów jako funkcji gęstości czy ciśnienia średniego jest związany z interpretacją zmiennej porowatości w pierwszym, a sił kontaktowych między ziarnami w drugim przypadku, jako przyczyny zmian własności materiału przy deformacji. Materiały te, jak łatwo sprawdzić podstawiając (2.10) lub (2.11) do związków (2.7) czy (2.9), nie są sprężyste w sensie Greena. Na przykład dla (2.10) zachodzi

$$\frac{\partial[K(\varepsilon'_{kk})\varepsilon'_{kk}]}{\partial e'_{ij}} = 0 \neq \frac{\partial[G(\varepsilon'_{kk})e'_{ij}]}{\partial \varepsilon_{kk}}. \tag{2.12}$$

Warunek (2.12) jest natomiast spełniony dla równań (2.10), (2.11), gdy moduły $G(\varepsilon'_{kk}) = \text{const}$, czy $\omega(\sigma_{kk}) = \text{const}$, a zatem gdy odciążenie jest liniowe. Oba związki, (2.10) i (2.11), można więc stosować do opisu pierwszego odciążenia, jeżeli założy się, że obok odkształceń sprężystych zachodzą procesy mikropłynięcia[1].

Takie opracowanie wyników doświadczeń przy nieliniowych krzywych odciążenia, gdy tensor materiałowy A_{ijkl} spełnia warunki potencjalności, a więc istnieją pewne więzy na stałe materiałowe, wymaga albo sprawdzenia tego *a posteriori* lub zgadnięcia postaci potencjału sprężystego, a następnie określenia związku konstytutywnego i wyznaczenia jego stałych z doświadczeń.

Przyrostowe związki dla materiałów nieliniowych można otrzymać przez różniczkowanie równań (2.1) i (2.2).

W szczególności dla związków (2.4) i (2.8) mamy

$$\begin{aligned} d\sigma_{kk} &= A d\varepsilon'_{kk} + E_{ij} de'_{ij} \\ ds_{ij} &= C_{ijkl} de'_{kl} + D_{ij} d\varepsilon'_{mm}, \end{aligned} \quad \text{dla} \quad (2.4), \tag{2.13}$$

gdzie

$$A = \frac{\partial K}{\partial \varepsilon'_{kk}} \varepsilon'_{mm} + K,$$

$$E_{ij} = \varepsilon'_{kk} \frac{\partial K}{\partial e'_{ij}},$$

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial G}{\partial e'_{kl}} e'_{ij} + G \delta_{ik} \delta_{lj} \right),$$

$$D_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \varepsilon'_{kk}} e'_{ij}$$

oraz

$$\begin{aligned} d\varepsilon'_{kk} &= \bar{A} d\sigma_{kk} + \bar{E}_{ij} ds_{ij} \\ de'_{ij} &= \bar{C}_{ijkl} ds_{kl} + \bar{D}_{ij} d\sigma_{kk}, \end{aligned} \quad \text{dla} \quad (2.8), \tag{2.14}$$

gdzie

$$\bar{A} = \frac{\partial \varkappa}{\partial \sigma_{nn}} \sigma_{kk} + \varkappa, \qquad \bar{E}_{ij} = \sigma_{kk} \frac{\partial \varkappa}{\partial s_{ij}},$$

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{\partial \omega}{\partial s_{kl}} s_{ij} + \omega \delta_{ik} \delta_{lj}, \qquad \bar{D}_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_{kk}} s_{ij}.$$

[1] Zauważmy, że często tego rodzaju związki są stosowane do opisu całkowitej deformacji ośrodka, z nieuzasadnionym, jak widać z (2.12), założeniem pełnej odwracalności odkształceń (np. [9, 10]).

Z powyższych związków widać, że zachodzi sprzężenie izotropowych i dewiatorowych części przyrostów, tzn. przyrost ciśnienia średniego powoduje przyrost odkształceń dewiatorowych, a wzrost naprężeń dewiatorowych wywołuje przyrost objętości. Ponadto z uwagi na nieliniowość związków (2.4) i (2.8), mimo iż tensory σ_{ij} oraz ε'_{ij} mają wspólne kierunki główne, tensory ich przyrostów mogą w ogólności nie być współosiowe. Sprzężenie to zależy od wielkości odkształceń (czy naprężeń), od których liczymy przyrosty, a w stanie naturalnym znika.

Dla pewnych materiałów rozdrobnionych sprzężenie przyrostów izotropowych i dewiatorowych jest uważane za efekt niższego rzędu. Należy wówczas założyć, że dla wszystkich σ_{ij} i ε'_{ij} współczynniki $E_{ij} = D_{ij} = 0$ oraz $\bar{E}_{ij} = \bar{D}_{ij} = 0$. Ze wzorów (2.12) i (2.14) wynika wówczas, że

$$K = K(\varepsilon'_{kk}), \quad G = G(e'_{ij}) \quad \text{i} \quad \varkappa = \varkappa(\sigma_{kk}), \quad \omega = \omega(s_{ij}). \tag{2.15}$$

Zauważmy wreszcie, że materiały, dla których przyjmujemy współosiowość przyrostów tensorów naprężenia i odkształcenia ε'_{ij}, wyrażającą się związkami

$$d\sigma_{kk} = Ad\varepsilon'_{kk}, \quad ds_{ij} = Gde'_{ij} \tag{2.16}$$

muszą spełniać warunek $G = \text{const}$.

Jeżeli zatem zakładamy izotropię materiału hipersprężystego i współosiowość tensorów przyrostów, to nie możemy opisać nieliniowego zachowania się materiału przy ścinaniu. Podobny wniosek można otrzymać z (2.14). Dodajmy, że założenie współosiowości w sprężystym prawie przyrostowym jest bardzo konsekwentne dla związków sprężysto-plastycznych, dla których nie zakłada się wzmocnienia anizotropowego. Równoznaczne jest to z przyjęciem, że proces sprężysto-plastyczny nie wywołuje w materiale żadnej zorientowanej struktury.

3. Własności modułów stycznych

Przyrostowe związki (2.13) i (2.14) mają tę własność, że zachowanie się materiału wokół pewnego stanu naprężeń czy odkształceń wyznacza jednoznacznie zachowanie się tego materiału dla wszystkich innych stanów, na różnych drogach obciążenia czy deformacji, a więc związki $\sigma_{ij} - \varepsilon'_{ij}$.

Dla niektórych materiałów rozdrobnionych takie stwierdzenie może być niesprawdzalne. Obserwowalny jest natomiast związek pomiędzy przyrostami $d\sigma_{ij}$ i $d\varepsilon'_{ij}$. Prawo fizyczne wówczas wyraża jednoznaczną zależność między przyrostami dla danego stanu ciała.

Taki jednoznaczny obiektywny związek pomiędzy wymienionymi tensorami przyrostów oraz samym tensorem odkształceń [4] można zapisać przy pominięciu nieliniowych członów względem $d\varepsilon_{ij}$ w postaci

$$d\sigma = \alpha_0\delta + \alpha_1\varepsilon' + \alpha_2 d\varepsilon' + \alpha_3\varepsilon'^2 + \alpha_4(\varepsilon' d\varepsilon' + d\varepsilon'\varepsilon') + \alpha_5(\varepsilon'^2 d\varepsilon' + d\varepsilon'\varepsilon'^2), \tag{3.1}$$

gdzie α_0, α_1, α_3 są funkcjami niezmienników

$$J'_1 = \varepsilon'_{kk}, \quad J'_2 = \varepsilon'_{kl}\varepsilon'_{kl}, \quad J'_3 = \varepsilon'_{km}\varepsilon'_{ml}\varepsilon'_{lk},$$
$$Y'_0 = d\varepsilon'_{kk}, \quad Y'_1 = \varepsilon'_{kl}d\varepsilon'_{kl}, \quad Y'_2 = \varepsilon'_{kl}\varepsilon'_{lm}d\varepsilon'_{mk},$$

a α_2, α_4, α_5 są funkcjami jedynie niezmienników J'_1, J'_2, J'_3. Załóżmy dla dalszych celów, że związki (3.1) mają postać związków proporcjonalnych (1.2), tzn. α_0, α_1, α_3 pozostaną zależne jedynie od niezmienników mieszanych Y_i. Wówczas rozbijając (3.1) na część dewiatorową oraz izotropową otrzymamy układ równań

$$
(3.2) \qquad \begin{aligned} d\sigma_{kk} &= F d\varepsilon'_{kk} + H_{ij} de'_{ij}, \\ ds_{ij} &= M_{ijkl} de'_{kl} + N_{ij} d\varepsilon'_{kk}, \end{aligned}
$$

gdzie F, H_{ij}, M_{ijkl}, N_{ij} są funkcjami tensora odkształceń ε'_{ij} oraz jego niezmienników. Przyrostowy związek typu (3.2), w którym wielkości te zależą od tensora naprężeń oraz jego niezmienników, jest równoważny związkowi hiposprężystemu.

Rozpatrzmy obecnie na przykładzie związków (3.2) warunki, jakie muszą spełniać związki przyrostowe, aby opisywały one prawo nieliniowej sprężystości. (Są to warunki analogiczne do warunków dla hiposprężystości — por. [7]). Określenie jednoznacznej zależności $\sigma_{ij} - \varepsilon'_{ij}$ ze związków przyrostowych (3.2) wymaga założenia ich całkowalności. Ponadto, jeśli otrzymany związek $\sigma_{ij} - \varepsilon'_{ij}$ ma opisywać sprężystość, musi spełniać warunki potencjalności. Równania (3.2) stanowią, z uwagi na niezależność ich prawych stron od naprężeń, dwie formy Pfaffa. Są one zatem całkowalne w sposób zupełny wtedy, gdy tożsamościowo zachodzi

$$
(3.3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial e'_{ij}} &= \frac{\partial H_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kk}}, \qquad \frac{\partial H_{ij}}{\partial e'_{kl}} = \frac{\partial H_{kl}}{\partial e'_{ij}}, \\ \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \varepsilon'_{rr}} &= \frac{\partial N_{ij}}{\partial e'_{kl}}, \qquad \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial e'_{mn}} = \frac{\partial M_{ijmn}}{\partial e'_{kl}}, \end{aligned}
$$

natomiast współczynniki F, H_{ij}, M_{ijkl} oraz N_{ij} są odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi

$$
(3.4) \qquad F = \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \varepsilon'_{kk}}, \qquad H_{ij} = \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial e'_{ij}}, \qquad M_{ijkl} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial e'_{kl}}, \qquad N_{ij} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kk}}.
$$

Zatem dla określonych doświadczalnie związków (3.2), spełniających warunki (3.3), możemy określić jednoznaczne związki $\sigma_{kk} = \sigma_{kk}(\varepsilon'_{kk}, e'_{ij})$ oraz $s_{ij} = s_{ij}(\varepsilon'_{kk}, e'_{ij})$. Związki te stanowią potencjalne prawo sprężystości, o ile elementarna praca wyrażona przez równanie (2.5) stanowi różniczkę zupełną, tzn. kiedy będą spełnione warunki (2.7). Ponieważ z założenia całkowalności wynikają związki (3.4), warunki potencjalności (2.7) można wyrazić w postaci dalszych więzów na współczynniki w związku (3.2)

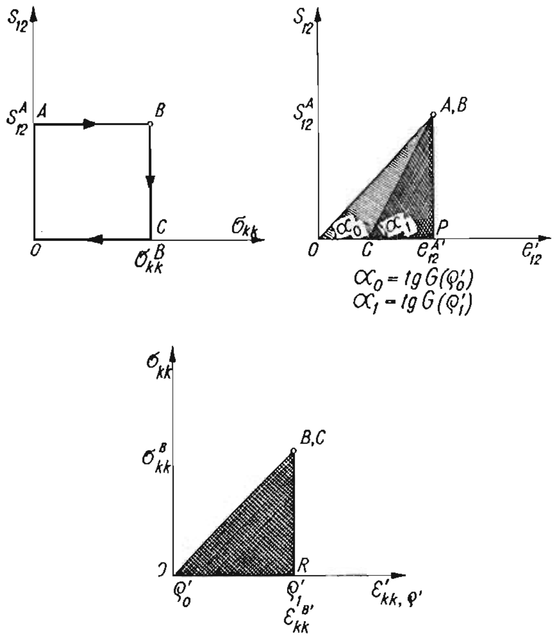
$$
(3.5) \qquad H_{ij} = N_{ij}, \qquad M_{ijkl} = M_{klij}.
$$

Łatwo sprawdzić, że równania (2.13) spełniają warunki (3.3) i (3.4) tożsamościowo. Podobne warunki można uzyskać dla materiałów hiposprężystych.

W świetle powyższego widzimy, że materiał przyrostowy o stycznych modułach zależnych od bieżącej zmiany gęstości, będący szczególną postacią materiału (3.2) o równaniach

$$
(3.6) \qquad \begin{aligned} d\sigma_{kk} &= K d\varepsilon'_{kk}, \qquad ds_{kl} = G de'_{kl}, \\ K = K(\varrho'), \qquad G &= G(\varrho'), \qquad d\varrho'/(\varrho_0 + \varrho') = d\varepsilon'_{kk}, \end{aligned}
$$

spełnia warunki (3.3) jedynie dla przypadku, gdy $G = \text{const}$. Podobnie dla materiału o modułach zależnych od ciśnienia średniego σ_{kk} jest on hiposprężysty tylko wtedy, gdy jego moduł styczny jest stały, $\omega = \text{const}$ [8]. Jako przykład można tu podać zamknięty program (cykl) obciążeń dla materiału (3.6), po dokonaniu którego w materiale pozostają odkształcenia trwałe.



Rys. 1

Rozważany przyrostowy cykl naprężeń $OABCO$ (rys. 1), zawarty całkowicie wewnątrz powierzchni plastyczności, składa się ze ścinania z nałożonym ściskaniem hydrostatycznym powodującym zagęszczenie materiału; cykl zamyka się zdjęciem obciążenia ścinającego, a następnie ciśnienia hydrostatycznego. Na odcinku AB wielkość ϱ' wzrasta, zatem wzrasta także moduł G, a przez to odciążenie BC zachodzi już przy innej wartości modułu, odpowiadającej większemu ϱ' niż w punkcie A. Po zamknięciu pętli $OABCO$ pozostaje więc pewne odkształcenie postaciowe, a ponadto magazynuje się w materiale pewna energia, odpowiadająca zakreskowanemu polu na rys. 1. Przy cyklu odwrotnym, $OCBAO$, energia ta przybiera wartość ujemną.

Równania (3.2) mogą być całkowalne również w sposób niezupełny. Zachodzić to może wzdłuż dróg, w pewien sposób sparametryzowanych, w przestrzeni odkształceń. Na przykład w przypadku dróg radialnych, gdy przy stałym ε_{kl}^0

$$\varepsilon'_{kl} = \varepsilon_{kl}^0 r, \qquad d\varepsilon'_{kl} = \varepsilon_{kl}^0 dr \tag{3.7}$$

równania (3.2) są równaniami zwyczajnymi o rozdzielonych zmiennych. W podobny sposób można stwierdzić, że praca wzdłuż tych dróg jest jednoznacznie określona przez zmienną r. Wynika stąd istotny wniosek, że prowadząc doświadczenie mające wykryć odwracalność odkształceń na zamkniętych cyklach musimy z tych eksperymentów wykluczyć cykle po drogach radialnych jako nieczułe na efekty niepotencjalności.

4. Własności pewnych nieliniowych potencjałów sprężystych

Dobór funkcji materiałowych K, G czy $\varkappa$ i ω z danych doświadczalnych w taki sposób, aby spełniały one warunki ustalonej sprężystości jest praktycznie bardzo trudny. Znacznie łatwiej jest postulować istnienie potencjału sprężystego o przepisanej formie, a następnie dobierać jego stałe. Konieczna jest w tym celu znajomość własności równań konstytutywnych wynikających z danej postaci potencjału.

Rozpatrzmy tensorowo liniową postać równania (2.1) wyprowadzonego z potencjału $U = U(J_1', J_2')$ (przez $U_{,i}$ oznaczono $\partial U/\partial J_i'$)

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \sigma_{ii} = 3U_{,1}(J_1', J_2')+2U_{,2}(J_1', J_2')J_1', \\ s_{ij} = 2U_{,2}(J_1', J_2')e_{ij}'. \end{cases}$$

Widzimy, że niezależnie od szczególnej postaci potencjału U, dewiatory s_{ij} i e_{ij}' są współosiowe i proporcjonalne, natomiast wielkości σ_{kk} i ε_{kk}' nie są proporcjonalne, dopóki $U_{,1}$ nie jest jednorodną funkcją J_1. W zależności od postaci funkcji U, a w szczególności $U_{,1}$ w przypadku czysto postaciowych deformacji, $J_1' = 0$, stan naprężeń może mieć zarówno składową dewiatorową, jak i izotropową. Ten ostatni efekt (odpowiadający dylatacji) jest typowy dla ośrodków sypkich.

Przyrostowa forma związków (4.1) jest następująca:

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} d\sigma_{ii} &= 3[U_{,11}+2U_{,12}J_1'+2U_{,2}+2(3U_{,12}+2U_{,22}J_1')J_1']d\varepsilon_{ll}'+2(3U_{,12}+ \\ &\qquad\qquad +2U_{,22}J_1')e_{kl}'de_{kl}', \\ ds_{ij} &= 2\left(U_{,12}+\frac{2}{3}U_{,22}J_1'\right)e_{ij}'d\varepsilon_{kk}'+2(U_{,22}e_{ij}'e_{kl}'+U_{,2}\delta_{kl}\delta_{ij}). \end{aligned}$$

Omówimy własności kilku form potencjałów U.

a) *Potencjał bi-eliptyczny*:

$$(4.3)\qquad U = \alpha_1 J_1^4+\alpha_2 J_2^2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0.$$

Równanie konstytutywne ma postać

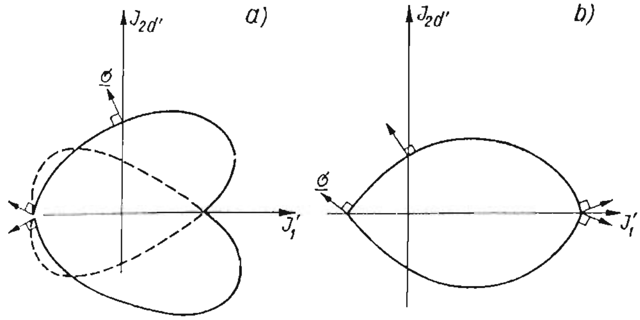
$$(4.4)\qquad \begin{aligned} \sigma_{ii} &= 4J_1'\left[\left(\alpha_1+\frac{1}{9}\alpha_2\right)J_1'^2+\frac{1}{3}\alpha_2 J_{2d}'\right], \\ s_{ij} &= 2\left[\frac{1}{3}J_1'^2+J_{2d}'\right]e_{ij}'. \end{aligned}$$

Zatem dla czystego odkształcenia postaciowego ($J_1' = 0$) nie występują naprężenia hydrostatyczne. Niemniej, nieliniowe moduły sprężystości zależą zarówno od odkształceń postaciowych, jak i objętościowych. Z tej przyczyny występuje sprzężenie przyrostowych efektów izotropowych i dewiatorowych

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} d\sigma_{ii} &= 3\left[\left(12\alpha_1+\frac{64}{3}\alpha_2\right)J_1'^2+\frac{16}{3}\alpha_2 J_{2d}'\right]d\varepsilon_{ll}'+16\alpha_2 J_1' e_{kl}'de_{kl}', \\ ds_{ij} &= \frac{16}{3}\alpha_2 J_1' e_{ij}'d\varepsilon_{kk}+4\alpha_2\left[e_{ij}'e_{kl}'\left(\frac{1}{3}J_1'^2+J_{2d}'\right)\delta_{kl}\delta_{ij}\right]de_{kl}'. \end{aligned}$$

Zauważmy, że sprzężenie to dla szczególnych stanów $J_1' = 0$ lub $J_{2d}' = 0$ znika. Potencjał (4.3) jest wypukły z uwagi na dodatnią określoność w przestrzeni J_1', J_{2d}'.

b) *Potencjał złożony z paraboli i koła.* Istotną trudność stanowi opisanie materiału wykazującego sprzężenie dewiatorowych i izotropowych części samych tensorów σ_{ij}, ε'_{ij}. Wymaga to założenia niesymetrycznych względem J'_{2d} postaci potencjału w przestrzeni J'_1 i J'_{2d}. Przyjęcie w tym celu powierzchni ekwipotencjalnej, np. w formie obróconej elipsy spełniającej powyższy wymóg, prowadzi do lokalnej wklęsłości potencjału[2)], a także do osobliwości w stanie czysto hydrostatycznym, wynikającej z niegładkości potencjału dla $J'_{2d} = 0$. To samo zachodzi dla potencjałów typu cosinusoidy itp. (rys. 2a, b). Trudności

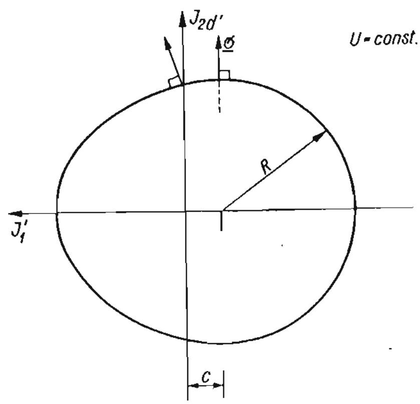


Rys. 2

te można ominąć postulując potencjał złożony z paraboli w części odpowiadającej rozciąganiu oraz stycznego do niej okręgu dla strefy ściskania. Równanie potencjału ma postać (rys. 3)

$$\sqrt{U} = \frac{-\alpha J'_1 \pm J'_4}{1-\alpha^2}\beta, \tag{4.6}$$

$$J'_4 = \sqrt{\alpha^2 J_1'^2 + (1-\alpha^2)(J'_{2d} + mJ_1'^2)},$$



Rys. 3

α, β — stałe materiałowe; $m = 1$ dla $J'_1 \leqslant 0$, $m = 0$ dla $J'_1 \geqslant 0$, część kołowa linii ekwipotencjalnej (dla rozciągania) wyrażająca się dla $U = U_0$ przez równanie $U_0 = \beta[(J'_1 - -c)^2 + J'_{2d}] = 0$ o promieniu $\sqrt{U_0/\beta}$ i środku okręgu w punkcie $J'_x = c = \alpha\sqrt{U_0/\beta}$,

[2)] Zachodzi wówczas niejednoznaczność rozwiązania problemu brzegowego. Prowadzić do tego może między innymi pełne rozwinięcie wielomianowe funkcji potencjału $U = U(J'_1, J'_{2d})$ por. np. [12], a także [9].

przecina oś odciętych J'_1 w punkcie $J'_1 = -\sqrt{U_0/\beta}\,(1+\alpha)$; natomiast część paraboliczna (dla ściskania) o równaniu $U_0 = \beta[J'_{2d} - 2cJ'_1 + c^2]$, styczna do okręgu w punkcie $J'_1 = 0$ przecina oś J'_1 w punkcie $J'_1 = \frac{1}{2}\sqrt{U_0/\beta}\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

Równanie konstytutywne odpowiadające potencjałowi (4.6) daje

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{\alpha J'_1 \mp 2J'_1[m+\alpha^2(1-m)]}{\alpha J'_1 J'_4 \pm J'^2_4}\,\frac{\beta}{1-\alpha^2},\\
s_{ij} &= \mp\frac{2[(1-\alpha^2)J'_{2d}]}{-\alpha J'_1 J'_4 \pm J'^2_4}\,\frac{\beta}{1-\alpha^2}\,e'_{ij}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Zgodnie z założeniem, proces czystych deformacji postaciowych wywołuje naprężenie hydrostatyczne o wielkości

$$
\sigma^0_{ii} = \frac{\beta}{1-\alpha^2}\,\frac{1}{\sqrt{J'_{2d}(1-\alpha^2)}}
$$

oraz odwrotnie, stan czystego ścinania wywołuje odkształcenia objętościowe (rozluźnianie). Ponadto materiał inaczej zachowuje się w stanie czystego ściskania niż rozciągania.

Równania konstytutywne (4.7), mimo że stowarzyszone z dosyć prostym potencjałem (4.6) (rys. 3), mają bardzo złożoną postać; analityczne odwrócenie tych związków jest skomplikowane.

5. Wnioski

Wnioski z powyższych rozważań są następujące. Przystępując do matematycznej aproksymacji wyników doświadczalnych ustalonego odciążenia sprężystego wykazującego sprzężenie efektów dewiatorowych i izotropowych należy postulować niesymetryczną formę potencjału sprężystego i wynikające z niego równania konstytutywne dopasować do krzywych eksperymentalnych. Potencjały dopuszczające sprzężenie prowadzą do złożonych i trudnych w interpretacji i zastosowaniu równań konstytutywnych. Prostszą formę równań można uzyskać wprowadzając symetryczne potencjały, dopuszczające sprzężenie przyrostów, poza drogami $J'_1 = 0$ i $J'_{2d} = 0$. Najprostsze postacie równań konstytutywnych spełniające warunki potencjalności, nieuwzględniające sprzężenia, nie opisują niektórych istotnych efektów nieliniowych. Wydaje się więc celowe dla obliczeń inżynierskich stosowanie prostych w budowie związków fizycznych o łatwej interpretacji doświadczalnej niespełniających warunków potencjalności. Zastrzec należy przy tym dopuszczalny zakres ich ważności (drogi radialne i do nich zbliżone). W pracy [2] podano konkretną postać takiego rodzaju związków opierając się na wynikach przeprowadzonych doświadczeń oraz przedyskutowano procedurę wyznaczania funkcji materiałowych.

Zauważmy, że uwagi odnośnie całkowalności oraz potencjalności związków dyskutowanych w p. 2 i p. 3 odnoszą się także do związków, w których wprowadza się rozmaitego rodzaju uogólnione nieliniowe moduły Younga i zmienne współczynniki Poissona [8 - 10].

Autor wyraża swoją wdzięczność Panu profesorowi Z. MROZOWI za liczne uwagi i pomoc przy opracowaniu tego artykułu.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. Mróz, K. Kwaszczyńska, *Pewne problemy brzegowe dla ciał rozdrobnionych o wzmocnieniu gęstościowym*, Rozp. Inż., **19**, 1, (1971) 15 - 42.
2. T. Hueckel, A. Drescher, *On dilatational effects of inelastic granular media*, Arch. Mech. Stos., **27**, 1, (1975) 157 - 172.
3. B. O. Hardin, V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils*, Proc. ASCE, SM6, **98**, (1972) 603 - 624.
4. R. S. Rivlin, *Further remarks on stress deformation relation for isotropic materials*, J. Rat. Mech. Anal., **4**, (1955) 681 - 702.
5. J. P. Weidler, P. R. Paslay, *Constitutive relations for inelastic granular medium*, Proc. ASCE, EM 4, (1970) 395 - 406.
6. G. Y. Baladi, *The latest development in the non-linear elastic-nonideally plastic work hardening cap model*, Proc. Symp. Plasticity Soil Mechanics, Ed. A. Palmer, Cambridge 1973, 51 - 55.
7. B. Bernstein, *Hypoelasticity and elasticity*, Arch. Rat. Mech. An., 6, 89 (1960).
8. A. Verruijt, *Non-linear analysis of stresses and strains on soils*, Prog. Rep., 1, (1972), Univ. Delft.
9. J. M. Duncan, Ch. Y. Chang, *Nonlinear analysis of stress and strain in soils*, Proc. ASCE, SM5, (1970) 1629 - 1653.
10. L. Domaschuk, N. H. Wade, *A study of bulk and shear moduli of a sand*, Proc. ASCE, SM2, **95**, (1969) 561 - 581.
11. T. Hueckel, *Plastic flow of granular and rocklike materials with variable elasticity moduli*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **23**, (1975).
12. M. D. Evans and R. I. Coon, *Recoverable deformation of cohesionless soils*, Proc. ASCE, SM2, **97**, (1971) 375 - 391.

Р е з ю м е

К ВОПРОСУ ОБ ОПИСАНИИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

В работе приведены различные варианты физических уравнений, которые могут быть использованы для описания свойств сыпучих материалов.

S u m m a r y

ON THE DESCRIPTION OF NON-LINEAR ELASTICITY OF GRANULAR MEDIA

Various physical laws are proposed in the paper aimed at the application to the description of granular materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 czerwca 1975 r.