

## ITERACYJNA METODA WYZNACZANIA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I AMPLITUD UKŁADU O SKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY

BOHDAN KOWALCZYK, TADEUSZ RATAJCZAK (GDAŃSK)

### 1. Uwagi ogólne

Jednym z najbardziej istotnych, a jednocześnie pracochłonnych, zagadnień numerycznej analizy drgań układów liniowych o dużej liczbie stopni swobody jest wyznaczanie częstości drgań własnych i amplitud układu drgającego.

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy układu.

Metody wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy można w zasadzie podzielić na dwie grupy [5]: a) metody bezpośrednie, b) metody iteracyjne.

Metody bezpośrednie (dokładne) pozwalają na znalezienie dokładnego rozwiązania po wykonaniu skończonej liczby działań, przy czym liczba tych działań zależy od rodzaju metody obliczeniowej, a nie od żądanej dokładności rozwiązania.

Przy stosowaniu metod bezpośrednich wyznaczamy współczynniki tzw. wielomianu charakterystycznego macierzy, a następnie znajdujemy pierwiastki tego wielomianu. Wektory własne wyznaczamy rozwiązując układy jednorodnych równań liniowych, wyznaczone przez macierz współczynników i każdą wartość własną [4].

Metody bezpośrednie, praktycznie biorąc, nadają się do rozpatrywania układów o małej liczbie stopni swobody.

Przy badaniu układów o dużej liczbie stopni swobody stosujemy z reguły metody iteracyjne [5].

W iteracyjnych metodach wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych za początkowe przybliżenie rozwiązania przyjmujemy pewien parametr  $p^{(0)}$  (wektor własny lub wartość własną) i według określonego schematu tworzymy ciąg  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}, \dots$  tak, aby wielkość  $p^{(n+1)}$  lepiej aproksymowała szukane rozwiązanie od wielkości  $p^{(n)}$ .

Wynika stąd, że w metodach iteracyjnych liczba wykonywanych działań zależy od wymaganej dokładności rozwiązania.

Przedstawiona w niniejszym opracowaniu metoda iteracyjnego wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych może znaleźć zastosowanie np. w metodzie odkształcalnych elementów skończonych, metodzie hybrydowej (jednoczesnego zastosowania sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych) oraz w metodzie sztywnych elementów skończonych w przypadku, gdy osie układu odniesienia, w kierunku których odmierzone są współrzędne uogólnione, nie pokrywają się z głównymi osiami bezwładności SES [2, 3, 6, 7, 8].

Omawiana metoda jest metodą ogólną w tym sensie, że nie stawiamy innych założeń odnośnie macierzy sztywności  $\tilde{\mathbf{K}}$  i macierzy bezwładności  $\tilde{\mathbf{M}}$  jak tylko takich, aby macierze te były symetryczne i dodatnio określone (co wynika z założeń fizycznych).

Jak wiadomo [1], drgania swobodne zachowawczego układu holonomicznego i skleronomicznego o  $n$  stopniach swobody można opisać za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

W równaniach tych oznaczono:

$\tilde{q}_i$  uogólniona współrzędna,

$\dot{\tilde{q}}_i$  pochodna względem czasu uogólnionej współrzędnej,

$T$  energia kinetyczna układu dana wzorem

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{m}_{ij} \dot{\tilde{q}}_i \dot{\tilde{q}}_j$$

lub

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}},$$

gdzie

$$(4) \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \text{col}(\dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \dots, \dot{\tilde{q}}_n),$$

$$(5) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \dots & \tilde{m}_{1n} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \dots & \tilde{m}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{m}_{n1} & \tilde{m}_{n2} & \dots & \tilde{m}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz symetryczną  $\tilde{\mathbf{M}}$  nazywamy macierzą bezwładności układu.  $V$  — energia potencjalna układu dana wzorem

$$(6) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{k}_{ij} \tilde{q}_i \tilde{q}_j$$

lub

$$(7) \quad V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}},$$

gdzie

$$(8) \quad \tilde{\mathbf{q}} = \text{col}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n),$$

$$(9) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \dots & \tilde{k}_{1n} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \dots & \tilde{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{k}_{n1} & \tilde{k}_{n2} & \dots & \tilde{k}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz symetryczną  $\tilde{\mathbf{K}}$  nazywamy macierzą sztywności układu.

Można wykazać [1], że obie macierze  $\tilde{\mathbf{M}}$  i  $\tilde{\mathbf{K}}$  są macierzami określonymi dodatnio. Ponieważ

$$(10) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} = \tilde{\mathbf{M}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) = \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}},$$

więc podstawiając związki (10) do (1) otrzymujemy

$$(11) \quad \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Rozwiązań szczególnych układu (11) szukać będziemy w postaci

$$(12) \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{q} \sin(\omega t + \varphi).$$

Po zróżniczkowaniu (12)

$$(13) \quad \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{q} \sin(\omega t + \varphi)$$

i podstawieniu (13) do (11) otrzymujemy:

$$(14) \quad \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

lub, ponieważ ostatnia równość powinna zachodzić dla każdego  $t$ , to związek (14) możemy napisać w postaci

$$(15) \quad (\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

lub

$$(16) \quad \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{q}.$$

## 2. Sprowadzenie równania (16) do postaci standardowej

Zgodnie z twierdzeniem BANACHIEWICZA symetryczne macierze  $\tilde{\mathbf{K}}$  oraz  $\tilde{\mathbf{M}}$  można przedstawić w postaci

$$(17) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1,$$

$$(18) \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1,$$

gdzie macierze  $\mathbf{H}_1$  i  $\mathbf{G}_1$  są górnymi macierzami trójkątnymi.

Podstawiając (17) i (18) do związku (16) mamy

$$(19) \quad \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q}$$

lub

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 (\mathbf{H}_1^T)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q}.$$

względnie

$$(20) \quad \mathbf{H}_1 \mathbf{q} = \omega^2 (\mathbf{H}_1^{-1})^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{q}.$$

Oznaczmy

$$(21) \quad \mathbf{x} = \mathbf{H}_1 \mathbf{q},$$

stąd

$$(22) \quad \mathbf{q} = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{x}.$$

Podstawiając (21) i (22) do związku (20) otrzymujemy

$$(23) \quad \mathbf{x} = \omega^2 (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1})^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1}) \mathbf{x}.$$

Oznaczmy

$$(24) \quad \mathbf{A} = (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1})^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1}).$$

Ze związków (23) i (24) mamy

$$(25) \quad \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{x}$$

lub

$$(26) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

gdzie

$$(27) \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

### 3. Algorytm metody iteracyjnej

W zagadnieniu (26) szukamy  $\mathbf{x}$  oraz  $\lambda$ . Ponieważ: macierz  $\mathbf{A}$  jest kwadratową macierzą rzeczywistą stopnia  $n$ ;  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ; macierz  $\mathbf{A}$  jest macierzą dodatnio określoną, to wynika stąd, że wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  są rzeczywiste i dodatnie.

Oznaczmy te wartości własne przez  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  i niech

$$(28) \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0.$$

Oznaczmy

$$(29) \quad \mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^{-1} = \mathbf{B}.$$

Macierz  $\mathbf{A}$  na podstawie (24) i (29) możemy przedstawić w postaci

$$(30) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B},$$

gdzie  $\mathbf{B}$  jest górną macierzą trójkątną.

Macierze  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  mają te same wartości własne. Ze względu na symetrię macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  te wartości własne są rzeczywiste, zaś ze względu na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{A}$  są one dodatnie.

Oznaczmy wartości własne macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  (lub  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ ) przez

$$(31) \quad k_1^2, k_2^2, k_3^2, \dots, k_n^2.$$

Mamy więc

$$(32) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i^2 \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Określmy dla wszystkich  $k_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) i odpowiadającym tym wartościom własnym ortonormalnym wektorom  $\mathbf{u}_i$  nowe wektory  $\mathbf{q}_i$  przy pomocy zależności

$$(33) \quad \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mnożąc lewostronnie związek (33) przez  $\mathbf{B}^T$  mamy

$$(34) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_i = k_i \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

lub na podstawie (32)

$$k_i \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i^2 \mathbf{u}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

stąd

$$(35) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mnożąc lewostronnie związek (35) przez macierz  $\mathbf{B}$  mamy

$$(36) \quad \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Podstawiając (33) do (36) otrzymujemy

$$(37) \quad \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i = k_i^2 \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ostatni związek świadczy, że zdefiniowane związkami (33) wektory  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ .

Wektory  $\mathbf{q}_i$  tworzą układ ortonormalny wektorów.

Istotnie, dla dwóch liczb  $k_i \neq k_j$  mamy na podstawie (32) i (33)

$$(38) \quad \begin{aligned} k_i k_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= \mathbf{u}_i^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_j, \\ k_i k_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= \mathbf{u}_i^T k_j^2 \mathbf{u}_j, \\ k_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j &= k_j \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j. \end{aligned}$$

Stąd, ze względu na ortonormalność wektorów  $\mathbf{u}_i$ , mamy:

$$(39) \quad \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ 1 & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy więc dwa układy wektorów, z których każdy składa się z  $n$  ortonormalnych wektorów  $\mathbf{u}_i$  oraz  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Utwórzmy dwie macierze  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{Q}$ , których kolumnami są odpowiednio wektory  $\mathbf{u}_i$  oraz  $\mathbf{q}_i$ :

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n], \\ \mathbf{Q} &= [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]. \end{aligned}$$

Za pomocą macierzy  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{Q}$  oraz macierzy diagonalnej

$$(41) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

możemy związki (33) i (35) przedstawić w notacji macierzowej:

$$(42) \quad \mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{K},$$

$$(43) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{Q} = \mathbf{U} \mathbf{K}.$$

Utwórzmy następujący ciąg macierzy:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & \mathbf{B} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_1, \\
 & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{R}_1, \\
 & \mathbf{B} \mathbf{U}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_2, \\
 (45) \quad & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{R}_2, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 (46) \quad & \mathbf{B} \mathbf{U}_{p-1} = \mathbf{Q}_p \mathbf{T}_p, \\
 & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p = \mathbf{U}_p \mathbf{R}_p,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{Q}_i$  oraz  $\mathbf{U}_i$  są macierzami ortogonalnymi, zaś  $\mathbf{T}_i$  oraz  $\mathbf{R}_i$  są górnymi macierzami trójkątnymi o dodatnich elementach diagonalnych.

Rozkład podany w związkach (44)—(46) jest zawsze możliwy, gdyż lewe strony tych związków są (na każdym kroku iteracyjnym) znanymi macierzami, zaś wiadomo, że każda rzeczywista, dodatnio określona macierz może być przedstawiona jednoznacznie w postaci iloczynu macierzy ortogonalnej i górnej macierzy trójkątnej o dodatnich elementach diagonalnych.

W dalszej części pracy wykażemy, że jeżeli  $p \rightarrow \infty$ , to  $\mathbf{U}_p \rightarrow \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{T}_p$ ,  $\mathbf{R}_p \rightarrow \mathbf{K}$  oraz

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \mathbf{U} &= \mathbf{Q} \mathbf{K}, \\
 \mathbf{B}^T \mathbf{Q} &= \mathbf{U} \mathbf{K},
 \end{aligned}$$

gdzie elementy diagonalne  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) macierzy  $\mathbf{K} = \text{diag} \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  są pierwiastkami kwadratowymi wartości własnych  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  lub macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , zaś kolumny macierzy  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{Q}$  są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ .

#### 4. Metodyka obliczeń w przypadku kolejnego wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych

##### 4.1. Oznaczenia.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}_i^{(ph)} \\ \mathbf{u}_i^{(ph)} \end{array} \right\} i\text{-ta kolumna (wektor) macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_p \text{ otrzymana przy } p\text{-tej} \\ \text{iteracji } h\text{-tej wartości} \\ \text{własnej macierzy } \mathbf{A}, \\ \mathbf{Q}_p \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c}_i^{(ph)} \\ \mathbf{f}_i^{(ph)} \end{array} \right\} i\text{-ta kolumna (wektor) macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_p \text{ otrzymana przy } p\text{-tej} \\ \text{iteracji } h\text{-tej wartości} \\ \text{własnej } \lambda_h, \\ \mathbf{F}_p \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{s}_i^{(ph)} \\ \mathbf{g}_i^{(ph)} \end{array} \right\} \text{wektory pomocnicze dla wyzna-} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_i^{(ph)} \\ \mathbf{u}_i^{(ph)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} t_{ij}^{(ph)} \\ r_{ij}^{(ph)} \end{array} \right\} \text{elementy górnych macierzy} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_p, \\ \mathbf{R}_p, \end{array} \right.$$

$\mathbf{e}^{(h)} = \text{col} \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$  wektor kolumnowy, w którym jedynka występuje na miejscu  $h$  — tym.

## 4.2. Wzory.

$$4.2.1. \quad \mathbf{c}_i^{(p-1, h)} = \mathbf{B}\mathbf{u}_i^{(p-1, h)}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.2. \quad \mathbf{s}_j^{(ph)} = \mathbf{c}_j^{(p-1, h)} - \sum_{l=1}^{j-1} v_{lj}^{(ph)} \mathbf{s}_l^{(ph)}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n).$$

$$4.2.3. \quad d_i^{(ph)} = \sqrt{(\mathbf{s}_i^{(ph)}, \mathbf{s}_i^{(ph)})}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.4. \quad \mathbf{q}_i^{(ph)} = \frac{\mathbf{s}_i^{(ph)}}{d_i^{(ph)}}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.5. \quad v_{lj}^{(ph)} = \frac{(\mathbf{c}_j^{(p-1, h)}, \mathbf{s}_l^{(ph)})}{(\mathbf{s}_l^{(ph)}, \mathbf{s}_l^{(ph)})}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n, l < j),$$

$$v_{jj}^{(ph)} = 1, \quad v_{lj}^{(ph)} = 0, \quad \text{gd}y \ l > j.$$

$$4.2.6. \quad t_{ii}^{(ph)} = d_i^{(ph)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$4.2.7. \quad t_{ij}^{(ph)} = v_{ij}^{(ph)} d_i^{(ph)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n, \quad i < j).$$

$$4.2.8. \quad \mathbf{f}_i^{(p-1, h)} = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i^{(ph)}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.9. \quad \tilde{\mathbf{g}}_j^{(ph)} = \mathbf{f}_j^{(p-1, h)} - \sum_{l=1}^{j-1} w_{lj}^{(ph)} \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n).$$

$$4.2.10. \quad \tilde{d}_i^{(ph)} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}, \tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)})}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.11. \quad \mathbf{u}_i^{(ph)} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}}{\tilde{d}_i^{(ph)}}, \quad (1 \leq i \leq h \leq n).$$

$$4.2.12. \quad w_{lj}^{(ph)} = \frac{(\mathbf{f}_j^{(p-1, h)}, \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)})}{(\tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)}, \tilde{\mathbf{g}}_l^{(ph)})}, \quad (1 \leq j \leq h \leq n, \quad l < j),$$

$$w_{jj}^{(ph)} = 1, \quad w_{lj}^{(ph)} = 0, \quad \text{gd}y \ l > j.$$

$$4.2.13. \quad r_{ii}^{(ph)} = \tilde{d}_i^{(ph)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$4.2.14. \quad r_{ij}^{(ph)} = w_{ij}^{(ph)} \tilde{d}_i^{(ph)}, \quad (j = 1, 2, \dots; i < j).$$

## 4.3. Przypadki szczególne.

4.3.1. Przy wyznaczaniu wartości własnej  $\lambda_h$  jako wektor początkowy wybieramy  $\mathbf{e}^{(h)}$  tzn.  $\mathbf{u}_h^{(ph)} = \mathbf{e}^{(h)}$ .

4.3.2. Jeżeli  $p \rightarrow \infty$ , to  $\mathbf{u}_h^{(ph)} \rightarrow \mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{q}_h^{(ph)} \rightarrow \mathbf{q}_h$ ,  $t_{hh}^{(ph)} \rightarrow k_h$ ,  $t_{ij}^{(ph)} \rightarrow 0$  ( $i < j$ ),  $r_{hh}^{(ph)} \rightarrow k_h$ ,  $r_{ij}^{(ph)} \rightarrow 0$  ( $i < j$ ), gdzie  $k_h$  jest pierwiastkiem kwadratowym z  $\lambda_h$  — wartości własnej macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  i  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , zaś  $\mathbf{u}_h$  jest wektorem własnym macierzy  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{q}_h$  — wektorem własnym macierzy  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda_h$ .

4.3.3. Przy iteracji  $h$ -tej wartości własnej przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{(p1)} &= \mathbf{u}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{u}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{u}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \mathbf{s}_i^{(p1)} &= \mathbf{s}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{s}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{s}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1). \\ t_{ii}^{(p1)} &= t_{ii}^{(p2)} = \dots = t_{ii}^{(p, h-1)} = t_{ii}^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ t_{ij}^{(p1)} &= t_{ij}^{(p2)} = \dots = t_{ij}^{(p, h-1)} = t_{ij}^{(ph)}, & (i < j, \quad j = 1, 2, \dots, h-1), \\ d_i^{(p1)} &= d_i^{(p2)} = \dots = d_i^{(p, h-1)} = d_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \mathbf{q}_i^{(p1)} &= \mathbf{q}_i^{(p2)} = \dots = \mathbf{q}_i^{(p, h-1)} = \mathbf{q}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p1)} &= \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p2)} = \dots = \tilde{\mathbf{g}}_i^{(p, h-1)} = \tilde{\mathbf{g}}_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ r_i^{(p1)} &= r_i^{(p2)} = \dots = r_i^{(p, h-1)} = r_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1), \\ d_i^{(ph)} &= d_i^{(p2)} = \dots = d_i^{(p, h-1)} = d_i^{(ph)}, & (i = 1, 2, \dots, h-1). \end{aligned}$$

### 5. Dowód zbieżności metody iteracyjnej

Z pierwszego równania w związku (46) mamy

$$(47) \quad \mathbf{T}_p = \mathbf{Q}_p^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_{p-1}, \quad (\mathbf{U}_0 \equiv \mathbf{E}),$$

z drugiego równania w związku (46)

$$(48) \quad \mathbf{R}_p = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p.$$

5.1 Wykażemy indukcyjnie, że słuszny jest wzór

$$(49) \quad (\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)(\mathbf{R}_{p-1} \mathbf{T}_{p-1}) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_p^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^p.$$

Sprawdzamy słuszność wzoru (49) dla  $p = 1$ .

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1 = \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B}.$$

Zakładamy, że wzór (49) jest słuszny dla liczby naturalnej  $r > 1$ , tzn.

$$(50) \quad (\mathbf{R}_r \mathbf{T}_r)(\mathbf{R}_{r-1} \mathbf{T}_{r-1}) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r.$$

**Teza.** Wzór (49) jest słuszny dla liczby naturalnej  $r+1$ , tzn.

$$(51) \quad (\mathbf{R}_{r+1} \mathbf{T}_{r+1})(\mathbf{R}_r \mathbf{T}_r) \dots (\mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2)(\mathbf{R}_1 \mathbf{T}_1) = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{r+1}.$$

**Dowód.** Z (47), (48) i (50) mamy:

$$(52) \quad (\mathbf{R}_{r+1} \mathbf{T}_{r+1}) \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{r+1} \mathbf{Q}_{r+1}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \\ = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^r = \mathbf{U}_{r+1}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{r+1}.$$

A więc na podstawie zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że wzór jest słuszny dla każdej liczby naturalnej  $p \geq 1$ .

5.2. Oznaczmy

$$(53) \quad \mathbf{S}^{(p)} = \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p, \quad (p = 1, 2, \dots).$$



Ponieważ  $\mathbf{R}_p$  i  $\mathbf{T}_p$  są górnymi macierzami trójkątnymi, więc i macierz  $\mathbf{S}^{(p)}$  jest górną macierzą trójkątną.

Używając oznaczeń (53) możemy zapisać związek (49) w postaci

$$(54) \quad \mathbf{S}^{(p)}\mathbf{S}^{(p-1)} \dots \mathbf{S}^{(2)}\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{U}_p^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p$$

lub oznaczając

$$(55) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}^{(p)}\mathbf{S}^{(p-1)} \dots \mathbf{S}^{(2)}\mathbf{S}^{(1)} &= \boldsymbol{\sigma}_p, \\ \mathbf{U}_p^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p &= \boldsymbol{\sigma}_p, \end{aligned}$$

to znaczy

$$(56) \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^p = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\sigma}_p.$$

W związku (56) macierz  $\mathbf{U}_p$  jest macierzą ortogonalną zaś macierz  $\boldsymbol{\sigma}_p$  górną macierzą trójkątną.

Związek (56), na podstawie (30), możemy zapisać w postaci

$$(57) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{U}_p \boldsymbol{\sigma}_p.$$

Ze względu na fakt, iż wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  są różne — macierz ta ma tylko liniowe dzielniki elementarne — a więc istnieje takie przekształcenie przez podobieństwo, że

$$(58) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{X} \text{diag} \{ \lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p \} \mathbf{X}^{-1}.$$

Oznaczmy

$$(59) \quad \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} = \mathbf{D},$$

$$(60) \quad \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{H},$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą ortogonalną, zaś  $\mathbf{H}$  — górną trójkątną,

$$(61) \quad \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{W},$$

gdzie  $\mathbf{L}$  jest macierzą dolną trójkątną o elementach  $l_{ii} = 1$ , zaś  $\mathbf{W}$  — macierzą górną trójkątną.

Ze związku (58), na podstawie (59), (60) i (61), mamy

$$\mathbf{A}^p = \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{W}$$

lub

$$(62) \quad \mathbf{A}^p = \mathbf{C}\mathbf{H}(\mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{D}^{-p})\mathbf{D}^p\mathbf{W}.$$

Jest jasne, że macierz

$$(63) \quad \mathbf{G} = \mathbf{D}^p\mathbf{L}\mathbf{D}^{-p}$$

jest macierzą dolną trójkątną o elementach:

$$(64) \quad \begin{aligned} g_{ii} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ g_{ij} &= l_{ij} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right), \quad \text{dla } i > j, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Macierz  $\mathbf{G}$  możemy więc zapisać w postaci

$$(65) \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} + \mathbf{F}_p,$$

gdzie macierz  $F_p$  jest macierzą istotnie dolną trójkątną i taką, że

$$(66) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} F_p = 0,$$

gdyż na podstawie (43)

$$(67) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^p = 0 \text{ dla } i > j, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Ze związku (62) mamy na podstawie (63) i (65)

$$A^p = CH(E + F_p)D^pW = C(H + HF_p)D^pW = C(E + HF_pH^{-1})HD^pW$$

lub

$$(68) \quad A^p = C(E + Z_p)HD^pW,$$

gdzie

$$(69) \quad Z_p = HF_pH^{-1};$$

oraz na podstawie (66)

$$(70) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Z_p = 0.$$

Macierz  $E + Z_p$  przedstawmy w postaci

$$(71) \quad E + Z_p = \tilde{C}_p \tilde{H}_p,$$

gdzie  $\tilde{C}_p$  jest macierzą ortogonalną, zaś  $\tilde{H}_p$  — macierzą górną trójkątną.

Na podstawie (70) i (71) mamy:

$$(72) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{C}_p = E,$$

$$(73) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{H}_p = E.$$

Ze związków (68) i (71) mamy:

$$(74) \quad A^p = (C\tilde{C}_p)(\tilde{H}_pHD^pW).$$

Macierz  $C\tilde{C}_p$  jest macierzą ortogonalną, macierz  $\tilde{H}_pHD^pW$  jest macierzą górną trójkątną.

Ponieważ rozkład macierzy  $A^p$  na iloczyn macierzy ortogonalnej i macierzy górnej trójkątnej jest jednoznaczny, więc na podstawie (57) mamy:

$$(75) \quad C\tilde{C}_p = \tilde{U}_p,$$

$$(76) \quad \tilde{H}_pHD^pW = \sigma_p.$$

Ze związków (75) i (72) mamy

$$(77) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} U_p = C.$$

**Wniosek 1.** Przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje skończona granica ciągu macierzy  $\{U_p\}$ .

Ze związku (49) mamy

$$(78) \quad (R_p T_p)(R_{p-1} T_{p-1}) \dots (R_2 T_2)(R_1 T_1) = U_p^{-1} A^p$$

oraz

$$(79) \quad (R_{p-1} T_{p-1}) \dots (R_2 T_2)(R_1 T_1) = U_{p-1}^{-1} A^{p-1}.$$

Stąd z (78) i (79) wynika, że

$$(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p) \mathbf{U}_{p-1}^{-1} \mathbf{A}^{p-1} = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A}^p$$

lub

$$(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p) \mathbf{U}_{p-1}^{-1} = \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A},$$

to znaczy

$$(80) \quad \mathbf{U}_p^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}_{p-1} = \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p.$$

**Wniosek 2.** W granicy, przy  $p \rightarrow \infty$  macierz  $\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p$  jest ortogonalnie podobna do macierzy  $\mathbf{A}$ .

Ze wzorów (47) i (48) mamy

$$\mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_p \mathbf{Q}_p^T \mathbf{B} \mathbf{U}_p,$$

a więc

$$(81) \quad \mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{U}_p,$$

to znaczy

$$(82) \quad \mathbf{T}_p^T \mathbf{R}_p^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_p$$

lub

$$(83) \quad (\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T = \mathbf{U}_{p-1}^T \mathbf{A} \mathbf{U}_p.$$

Gdy  $p \rightarrow \infty$

$$(84) \quad (\mathbf{R} \mathbf{T})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}.$$

**Wniosek 3.** W granicy, przy  $p \rightarrow \infty$  macierz  $(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T$  jest ortogonalnie podobna do macierzy  $\mathbf{A}$ .

Ze związku (53) mamy, że

$$(85) \quad \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p = \mathbf{S}^{(p)},$$

gdzie

$$(86) \quad \mathbf{S}^{(p)} = \begin{bmatrix} s_{11}^{(p)} & s_{12}^{(p)} & s_{13}^{(p)} & s_{14}^{(p)} & \dots & s_{1n}^{(p)} \\ 0 & s_{22}^{(p)} & s_{23}^{(p)} & s_{24}^{(p)} & \dots & s_{2n}^{(p)} \\ 0 & 0 & s_{33}^{(p)} & s_{34}^{(p)} & \dots & s_{3n}^{(p)} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^{(p)} & \dots & s_{4n}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{nn}^{(p)} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie wniosków 2 i 3 mamy:

$$(87) \quad Sp[(\mathbf{R} \mathbf{T})^T \mathbf{R} \mathbf{T}] = Sp \mathbf{A}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2.$$

Z drugiej strony

$$(88) \quad Sp[(\mathbf{R}_p \mathbf{T}_p)^T \mathbf{R}_p \mathbf{T}_p] = \sum_{i \leq j} [s_{ij}^{(p)}]^2 = \sum_{i=1}^n [s_{ii}^{(p)}]^2 + \sum_{i < j} [s_{ij}^{(p)}]^2.$$

**Wniosek 4.** Ponieważ przy  $p \rightarrow \infty$

$$(89) \quad \sum_{l=1}^n [s_{ll}^{(p)}]^2 \rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2,$$

to wszystkie naddiagonalne elementy macierzy  $S^{(p)}$ , a tym samym i macierzy  $R_p$  oraz  $T_p$  dążą do zera.

Ze związków (47) i (48) mamy:

$$T_p R_p = Q_p^{-1} B U_{p-1} U_p^{-1} B^T Q_p$$

lub

$$(90) \quad T_p R_p = Q_p^{-1} B B^T Q_p.$$

Na podstawie wniosku 4 macierz  $R_p$  i  $T_p$  przy  $p \rightarrow \infty$  są macierzami diagonalnymi. Ponieważ na podstawie (84) istnieje  $\lim_{p \rightarrow \infty} (R_p T_p)^T$ , więc przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje również

skończona granica iloczynu  $T_p R_p$ .

**Wniosek 5.** Przy  $p \rightarrow \infty$  istnieje skończona granica ciągu  $\{Q_p\}$  [wynika to z (90)].

**Wniosek 6.** Na podstawie wniosku 1 i wniosku 5 oraz związków (47) i (48) wynika, że przy  $p \rightarrow \infty$  istnieją granice ciągów macierzy  $\{T_p\}$  oraz  $\{R_p\}$ .

Ze związków (46) i (47) oraz (42) i (43) wynika, że

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_p = \lim_{p \rightarrow \infty} R_p = K,$$

gdzie macierz  $K$  dana jest wzorem (41).

Algorytm obliczania częstości drgań własnych i amplitud układu, opisany w rozdziałach 2 i 3, został zaprogramowany w języku FORTRAN IV (patrz rozdział 7) i wytestowany na elektronicznej maszynie cyfrowej ICL-System 4.

Dla umieszczenia wszystkich tablic (macierze i wektory) niezbędnych dla realizacji algorytmu program wymaga  $2n^2 + n + 1150$  komórek pamięci operacyjnej i  $0,5 n(n+1)$  komórek na dysku roboczym. Instrukcje programowe w EMC ICL-System 4 zajmują około 90 000 komórek pamięci operacyjnej.

Podaną w pracy metodą numeryczną obliczamy jednocześnie pierwiastki kwadratowe wartości własnych i wektory własne (częstości drgań własnych i amplitudy układu) zagadnienia (16). Z tego względu jest ona bardziej ogólną i znacznie szybszą od najczęściej stosowanych w praktyce metod QR i LR, przy pomocy których wyznaczamy tylko wartości własne (kwadraty częstości własnych).

## 6. Nowa metoda odwracania macierzy trójkątnych

Z rozdziału 2 niniejszego opracowania wynika, że aby związek (16) doprowadzić do postaci standardowej  $Ax = \lambda x$  należy macierze  $\tilde{K}$  oraz  $\tilde{M}$  przedstawić w postaci (17), a następnie (związek (24)) znaleźć macierz odwrotną do górnej macierzy trójkątnej.

Poniżej przedstawimy nową metodę wyznaczania macierzy odwrotnej do górnej macierzy trójkątnej, metodę opartą na pojęciu macierzy istotnie górnej trójkątnej.

Macierz  $\mathbf{M}$  nazywamy macierzą istotnie górną trójkątną, jeżeli jest ona postaci:

$$(91) \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \dots & m_{1,n-1} & m_1 \\ 0 & 0 & m_{23} & m_{24} & \dots & m_{2,n-1} & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & m_{34} & \dots & m_{3,n-1} & m_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Można wykazać, że macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą nilpotentną, to znaczy

$$(92) \quad \mathbf{M}^r = \mathbf{0}, \quad \text{gdy } r \geq n.$$

Wykażemy następujące twierdzenie:  
jeżeli  $\mathbf{M}$  jest macierzą istotnie górną trójkątną to

$$(93) \quad [\mathbf{D} + \mathbf{M}]^{-1} = [\mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}] \mathbf{D}^{-1},$$

gdzie

$$(94) \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad d_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$(95) \quad \mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}.$$

**D o w ó d.** Oznaczamy przez  $\mathbf{G}$  następującą macierz

$$(96) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{D} + \mathbf{M}^{-1}] \mathbf{D}.$$

Prawą stronę związku (96) można przedstawić w postaci

$$(97) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{D} + \mathbf{M}^{-1}] [\mathbf{D}^{-1}]^{-1} = \{\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{D} + \mathbf{M}]\}^{-1} = [\mathbf{E} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}]^{-1}$$

lub na podstawie związku (95)

$$(98) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{E} + \mathbf{P}]^{-1}.$$

Ze związku (95) jest oczywiste, iż macierz  $\mathbf{P}$  jest również macierzą istotnie górną trójkątną, a więc

$$(99) \quad \mathbf{P}^r = \mathbf{0}, \quad \text{gdy } r \geq n.$$

Z łatwością można się przekonać, iż zachodzi następująca tożsamość:

$$(100) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{P}) [\mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}] = \mathbf{E} + (-1)^n \mathbf{P}^n = \mathbf{E},$$

gdyż  $\mathbf{P}^n = \mathbf{0}$ .

Ze związku (100) mamy więc:

$$(101) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{P})^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}$$

lub na podstawie (97)

$$(102) \quad [\mathbf{E} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}^{n-1}.$$

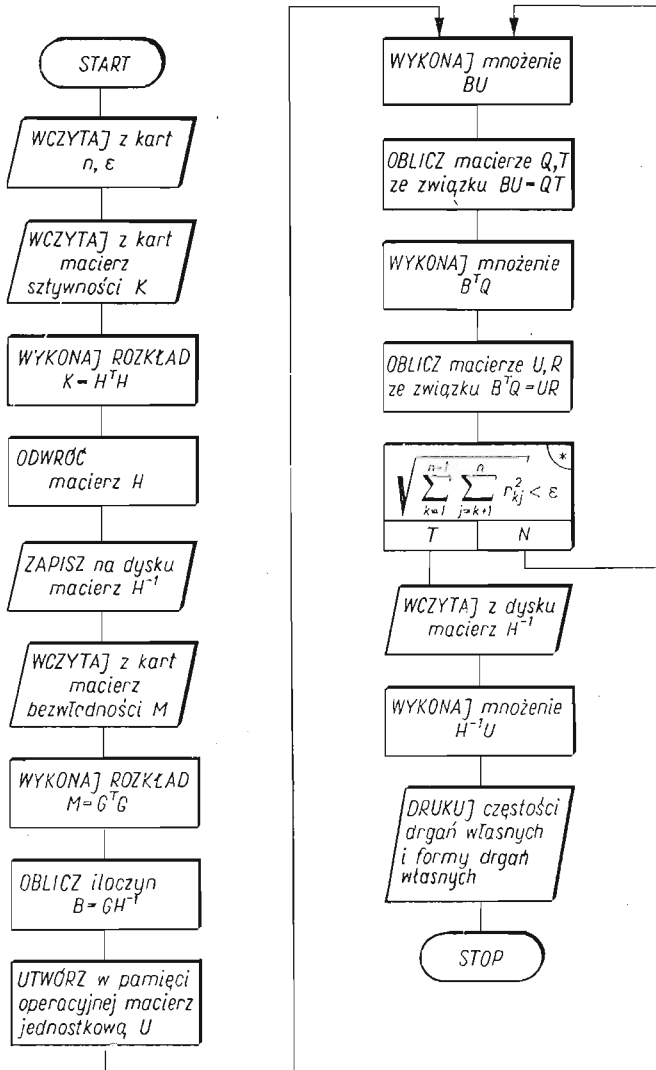
Mnożąc związek (102) prawostronnie przez macierz  $\mathbf{D}^{-1}$  otrzymujemy wzór (93).

## 7. Schemat blokowy programu UZOWW

Niżej zamieszczamy ogólny schemat blokowy programu UZOWW, który realizuje algorytm opisanej metody.

W schemacie blokowym użyto następujących dodatkowych oznaczeń.

- $n$  stopień macierzy sztywności  $K$  i bezwładności  $M$ ,
- $\varepsilon$  dana liczba rzeczywista, występująca w nierówności (\*) — patrz schemat blokowy programu UZOWW — stanowiąca kryterium zakończenia cyklu iteracyjnego,
- $H, G$  macierze górne trójkątne,
- $U, Q$  macierze  $B$ -ortonormalne,
- $T, R$  macierze górne trójkątne,
- $r_{kj}$  elementy macierzy  $T$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1; j = k+1, \dots, n$ ).



Rys. 1

## Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
2. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych liniowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika, 12 (1971).
3. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, *Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974).
4. A. P. MISZINA, I. W. PROSKURIAKOW, *Algebra wyższa*, PWN, Warszawa 1966.
5. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.
6. J. TELEGA, *Metoda elementów skończonych w mechanice ciał odkształcalnych*, Prace IPPT, 46/1973, Warszawa 1973.
7. E. WITTBRODT, *Hybrydowa metoda elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń drgań urządzeń okrętowych*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974).
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, 1972.
9. R. ZURMÜHL, *Matrizen*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

## Резюме

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И АМПЛИТУД СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В работе представлен новый итерационный метод расчета частот и амплитуд собственных колебаний для систем с конечным числом степеней свободы.

Матричное уравнение  $\tilde{K}q = \omega^2 \tilde{M}q$  (полученное из уравнения Лагранжа второго рода) преобразуется к стандартному виду  $Ax = \lambda x$ . Исходя из распределения Банахевица для матрицы  $A$  строится последовательность матриц, элементами которой являются произведения ортогональных и верхнетреугольных матриц. Доказано, что пределом такой последовательности является произведение ортогональной и диагональной матриц. Столбцы ортогональной матрицы являются искомыми амплитудами, а элементы диагональной — частотами собственных колебаний системы.

Предлагаемый метод можно применить для расчета реальных конструкций в сочетании с методами деформируемых, жестких или гибридных конечных элементов. Решение таких задач возможно лишь с помощью электронных вычислительных машин. В работе приведен также новый метод обращения треугольных матриц, который облегчает приведение исходной задачи к стандартному виду.

## Summary

## AN ITERATIVE METHOD TO DETERMINE NATURAL FREQUENCIES AND MODES OF A MULTIDEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM

The paper presents a new iterative method to determine the natural frequencies and modes of a multidegree-of-freedom system. The matrix equation  $\tilde{K}q = \omega^2 \tilde{M}q$  (obtained from the second form Lagrange equation) is transformed to the standard form  $Ax = \lambda x$ . Applying the Banachiewicz decomposition to the  $A$ -matrix, a series of matrices is generated. Every element of this series is represented as a product of two matrices: an orthogonal matrix and an upper triangular matrix. It is proved in the paper that the limit of the series is a product of orthogonal and diagonal matrices. The columns of the orthogonal matrix are

the natural modes, and the non-zero elements of the diagonal matrix are the natural frequencies of the system. This method can be applied to calculate vibrations of structures by means of the finite element method, the rigid finite element method or the hybrid method. The method presented is a computer — oriented one. A new method of inverting triangular matrices is also presented; this method makes the transformation of equations to the standard form easy.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1975 r.*

---