

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA WIOTKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK
PRZY UWZGLĘDNIENIU KINEMATYCZNEGO WZMOCNIENIA MATERIAŁU

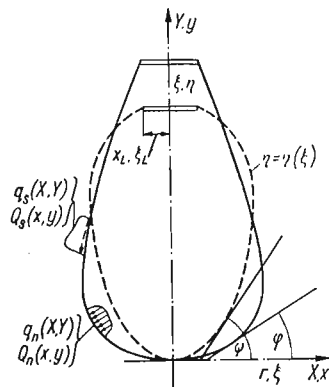
JÓZEF WILK (KRAKÓW)

1. Założenia wstępne

W pracy [1] przedstawiono rozwiązanie układu równań różniczkowych, opisujących stan równowagi wiotkiej obrotowo-symetrycznej powłoki (rys. 1), sformułowanego w oparciu o związki fizyczne

$$(1.1) \quad d\varepsilon_1 = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] d\Phi, \quad d\varepsilon_2 = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_3 = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] d\Phi,$$

stanowiącej ekstrapolację równań de Saint-Venanta płynięcia plastycznego na zakres skończonych odkształceń. W równaniach tych $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ oznaczają przyrosty logarytmicznych deformacji spowodowane przyrostem obciążenia, σ_1, σ_2 i σ_3 są rzeczywistymi naprężeniami



Rys. 1. Powłoka przed odkształceniem — — — i po odkształceniu —

głównymi, zaś Φ jest znaną funkcją odkształceń zależną od przyjętego warunku plastyczności. Przyjęto, że materiał jest plastyczny, nieściśliwy i izotropowy, obciążenie dowolne osiowo-symetryczne, zaś powłoka może znajdować się jedynie w stanie błonowym i przenosić tylko naprężenia rozciągające. Ze związków geometrycznych oraz warunków równowagi otrzymano układ

$$(1.2) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\xi \cos \varphi}{u x \cos \varphi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{u x \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{p_1 u x \cos \varphi} \left(\frac{Q_n}{f u} - p_2 \frac{\sin \varphi}{x} \right), \\ \frac{dp_1}{d\xi} = -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi \cos \varphi}{u x^2 \cos \varphi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi},$$

zaś związki fizyczne (1.1) doprowadzono do postaci

$$(1.3) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

W równaniach tych niewiadomymi są współrzędne Eulera związane z nieruchomymi punktami w przestrzeni $x(\xi, \tau)$ i $y(\xi, \tau)$, rzeczywiste naprężenia główne $p_1(\xi, \tau)$ i $p_2(\xi, \tau)$, kąt $\varphi(\xi, \tau)$ zawarty pomiędzy styczną do południka (po odkształceniu) a osią x (rys. 1) oraz grubość powłoki $u(\xi, \tau)$. Zmiennymi niezależnymi są osiowa współrzędna ξ (typu Lagrange'a) sztywno związana z cząstkami powłoki oraz τ — parametr wzrostu obciążenia. Wszystkie funkcje sprowadzono do wielkości bezwymiarowych, jak na przykład

$$(1.4) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{M}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie M jest założoną stałą o wymiarze naprężenia.

Szóste równanie, które należy rozpatrywać łącznie z układem (1.2) i (1.3) ma charakter algebraiczny, a jego postać zależy od założonej charakterystyki $F(p_1, p_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ materiału powłoki. W pracy [1] przyjęto ją jako zależność potęgową (μ — stała materiałowa)

$$(1.5) \quad p_i = \varepsilon_i^\mu$$

między intensywnościami rzeczywistych naprężeń i odkształceń liczonych w mierze logarytmicznej Hencky'ego. W rozpatrywanym płaskim stanie naprężenia ($p_3 = 0$)

$$(1.6) \quad p_i = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3},$$

przy czym indeks 1 oznacza kierunek południkowy, 2 — równoleżnikowy, 3 — normalny do powłoki. Odkształcenia główne wyrażają się poprzez pozostałe funkcje następująco:

$$(1.7) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u,$$

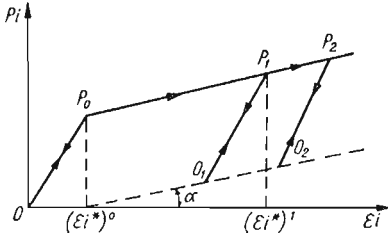
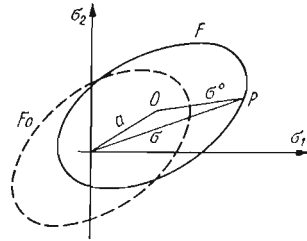
gdzie $\psi = \psi(\xi)$ oznacza kąt zawarty pomiędzy styczną do południka (przed odkształceniem) a osią x . Pozostałe wielkości, które traktujemy jako znane, oznaczają: $Q_n(x, y, \tau)$ i $Q_s(x, y, \tau)$ — obciążenia liczone na jednostkę powierzchni odkształconej powłoki odpowiednio w kierunku normalnym i południkowym, $f = f(\xi)$ — funkcję opisującą zmienną grubość ścianki powłoki w stanie nieodkształconym. Dla równań (1.2) i (1.3) podane zostały warunki początkowe

$$(1.8) \quad \begin{aligned} x(\xi, 0) &= x_*(\xi), \quad y(\xi, 0) = y_*(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_*(\xi), \\ \varphi(\xi, 0) &= \varphi_*(\xi), \quad p_1(\xi, 0) = p_{1*}(\xi), \quad p_2(\xi, 0) = p_{2*}(\xi), \end{aligned}$$

zdeteminowane przez stan wyjściowy (oznaczony gwiazdką) w powłoce, w którym intensywność naprężeń osiąga co najmniej granicę plastyczności. Sformułowano również pewne typy warunków brzegowych, dla których uzyskano konkretne rozwiązania liczbowe.

2. Nowy układ równań różniczkowych powłoki

2.1. Sformułowanie problemu. Stosowanie związków fizycznych (1.1) i w ich konsekwencji wyprowadzonego układu równań (1.2) i (1.3) podlega znacznym ograniczeniom. Brak zakresu sprężystego utrudnia realizację odciążania, uniemożliwia uwzględnianie efektu Bauschingera, jak również wyznaczanie ewentualnych procesów biernych mogących zachodzić w powłoce podczas jej obciążania. W niniejszej pracy proponuje się, aby w miejsce związków (1.1) przyjąć inne, nowe równania, które będą uwzględniać sprężysto-plastyczną charakterystykę materiału (por. rys. 2), przy czym przewiduje się, że zakres liniowego

Rys. 2. Charakterystyka fizyczna. $p_i = f(\epsilon_i)$ 

Rys. 3. Powierzchnia płynięcia plastycznego

wzmocnienia można również przedstawiać w postaci aproksymacji wieloodcinkowej bliższej rzeczywistym własnościom fizycznym materiału. Tak przyjęta charakterystyka pozwala obecnie traktować materiał, tak jak przyjmuje się to dla modelu z ogólnym wzmocnieniem liniowym tj. wywołanym zarówno przesuwaniem się, jak i rozszerzaniem się powierzchni plastyczności (rys. 3) materiału pierwotnie izotropowego. Zakładamy tylko, dla uproszczenia, że ulegająca przesunięciu i rozszerzeniu powierzchnia zachowuje swój pierwotny kształt. Powyższe założenia spełniają proponowane nowe związki fizyczne:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} d\epsilon_1 &= 1/E \left[d\sigma_1 - \frac{1}{2} (d\sigma_2 + d\sigma_3) \right] + \left[\sigma_1^0 - \frac{1}{2} (\sigma_2^0 + \sigma_3^0) \right] d\Phi, \\ d\epsilon_2 &= 1/E \left[d\sigma_2 - \frac{1}{2} (d\sigma_1 + d\sigma_3) \right] + \left[\sigma_2^0 - \frac{1}{2} (\sigma_1^0 + \sigma_3^0) \right] d\Phi, \\ d\epsilon_3 &= 1/E \left[d\sigma_3 - \frac{1}{2} (d\sigma_1 + d\sigma_2) \right] + \left[\sigma_3^0 - \frac{1}{2} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) \right] d\Phi, \end{aligned}$$

gdzie E jest modułem Younga, zaś bezwymiarowe naprężenia, które odmierzamy względem środka krzywej F zapisujemy w postaci

$$(2.2) \quad p_j^0 = p_j - a_j, \quad j = 1, 2, 3$$

gdzie a_j oznaczają bezwymiarowe współrzędne środka tej krzywej.

2.2. Wyprowadzenie układu równań. Dla płaskiego stanu naprężeń ($\sigma_3 = 0$) oraz przy przyjęciu warunku nieściśliwości

$$(2.3) \quad d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0,$$

równania (2.1) możemy obecnie zapisać w postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} dp_1 &= -\frac{2}{3} m(d\varepsilon_2 + 2d\varepsilon_3) - p_1^0 m d\Phi, \\ dp_2 &= \frac{2}{3} m(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3) - p_2^0 m d\Phi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad m = \frac{E}{M}.$$

Równanie krzywej F jest równoznaczne z warunkiem plastyczności dla naprężeń głównych i przyjmuje postać

$$(2.6) \quad F = p_1^{02} - p_2^{02} - p_1^0 p_2^0 - 3k^2 = 0,$$

gdzie

$$(2.7) \quad k = \frac{P_i}{\sqrt{3}}.$$

Dla określenia ruchu środka powierzchni plastyczności korzystamy z niezmienniczości F przy przechodzeniu z przestrzeni trzech naprężeń głównych do podprzestrzeni płaskiego stanu naprężenia. W szczególności zastosujemy metodę SHIELDA i ZIEGLERA [2] opartą na niezmienniczości warunku plastyczności względem nałożonego ciśnienia hydrostatycznego, co przy pomocy zapisu sumacyjnego można zapisać wzorem

$$(2.8) \quad F(\sigma_{ij} + \beta \delta_{ij}) = F(\sigma_{ij}).$$

W naszym konkretnym przypadku, gdy $\sigma_3 = 0$ mamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} F^{(3)}(\sigma_1 - \alpha_1, \sigma_2 - \alpha_2, -\alpha_3) &= F^{(3)}(\sigma_1 - \alpha_1 + \alpha_3, \sigma_2 - \alpha_2 + \alpha_3, 0) = \\ &= F^{(2)}(\sigma_1 - \alpha'_1, \sigma_2 - \alpha'_2) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.10) \quad \alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_3 \quad \text{i} \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \alpha_3.$$

W wyniku przekształceń (2.9) pozostały nam obecnie tylko dwie składowe

$$(2.11) \quad a_j = \frac{\alpha'_j}{\sigma_p}, \quad j = 1, 2,$$

które dalej przyjmują postać

$$(2.12) \quad a_j = c(\varepsilon_j^p - \varepsilon_3^p), \quad c = 2/3 c_0.$$

Jest to pewien szczególny przypadek ogólnego związku sformułowanego przez NOWOŻYŁOWA [3]. Symbol ε_j^p dotyczy odkształceń plastycznych, zaś parametr wzmocnienia $c_0 = \tan \alpha$ (por. rys. 2) możemy określić z próby jednoosiowego rozciągania.

Zgodnie z założonym typem wzmocnienia bazujemy na doświadczalnie ustalonej charakterystyce materiału

$$(2.13) \quad k = k(\bar{\varepsilon}_p^p),$$

gdzie

$$(2.14) \quad \bar{\varepsilon}_i^p = \int d\varepsilon_i^p, \quad d\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\varepsilon_1^{p^2} + d\varepsilon_1^p d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_2^{p^2}},$$

(tzw. parametr Odqvista) jest nie malejącą funkcją uplastycznienia materiału, która w przypadku prostego obciążenia odpowiada intensywności odkształceń plastycznych ε_i^p . W dalszych rozważaniach, z uwagi na konieczność zastosowania pewnych uproszczeń obliczeniowych, będziemy przyjmować w miejsce (2.13)

$$(2.13a) \quad k = k(\varepsilon_i^p).$$

Celem wyznaczenia funkcji plastyczności $d\Phi$ wykorzystujemy warunek zgodności Pragera

$$(2.15) \quad dF = d(p_1^0 + p_2^0 - p_1^0 p_2^0 - 3k^2) = 0,$$

z którego wynika, że koniec wektora σ (por. rys. 3) powinien zawsze znajdować się na powierzchni plastyczności.

Dla przyjętej charakterystyki materiału $k = k(\varepsilon_i^p)$ możemy na podstawie (2.1) i (2.14) otrzymać zależność

$$(2.16) \quad d\varepsilon_i^p = \sqrt{3} k m d\Phi,$$

po czym wykorzystując związki (2.3), (2.5), (2.15) i (2.16) dochodzimy po szeregu przekształceń do związku

$$(2.17) \quad d\Phi = \frac{(p_2^0 - p_1^0) d\varepsilon_2 - p_1^0 d\varepsilon_3}{mN},$$

gdzie

$$(2.18) \quad N = 3k^2 \left(1 + 3/2c + \sqrt{3} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_i^p} \right).$$

Obecnie, na podstawie (2.3) i (2.18) możemy równania fizyczne zapisać następująco:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} &= \left[-\frac{2}{3} - \frac{p_1^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) \right] \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left[-\frac{4}{3} + \frac{p_1^0}{N} \right] \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \left[\frac{2}{3} - \frac{p_2^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) \right] \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left[-\frac{2}{3} + \frac{p_1^0 p_2^0}{N} \right] \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc nowe równania fizyczne (2.19), przy czym związki geometryczne (1.2) i warunki równowagi (1.3) pozostają nadal słuszne. W szczególnym przypadku, biorąc pod uwagę tylko zakres sprężysty, równania (2.19) możemy sprowadzić do prostszej postaci

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} &= \frac{2}{3} \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{4}{3} \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \frac{2}{3} \frac{m}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{2}{3} \frac{m}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, pełny układ równań różniczkowych, opisujący stan naprężeń i skończonych odkształceń wiotkiej obrotowo-symetrycznej powłoki poddanej plastycznemu płynięciu —

przy przyjęciu najprostszej hipotezy kinematyczno-izotropowego wzmocnienia, przybierze następującą postać:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\xi}{p_1 ux \cos \psi} \left(\frac{Qn}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ \frac{\partial p_1}{d\xi} &= -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{xQs}{fu \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{u}{bm} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + \frac{au}{bx} \frac{\partial x}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= \frac{em}{x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{gm}{u} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} a &= \frac{rp_1^0}{N} (p_2^0 - p_1^0) + \frac{2}{3}, & b &= \frac{rp_1^{02}}{N} - \frac{4}{3}, \\ c &= \frac{2}{3} - \frac{rp_2^{02}}{N} (p_2^0 - p_1^0), & g &= \frac{rp_1^0 p_2^0}{N} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wprowadzenie wielkości r we wzorach (2.22) pozwala na zwartą formę zapisu układu (2.21). Przy rozwiązywaniu powłoki możemy, w poszczególnych jej punktach, rozróżnić obszary uplastycznione ($r = 1$) oraz sprężyste i poddane procesom plastycznym biernym ($r = 0$). Natomiast proces bierny odróżnimy od obszaru sprężystego poprzez analizę obliczanej wielkości p_i (por. rys. 2). W tym celu drugie równanie spośród układu (2.20) zastąpimy związkiem algebraicznym o postaci zależnej od przyjętej charakterystyki fizycznej $p_i = f(\varepsilon_i)$, przy czym

$$(2.23) \quad p_i = \begin{cases} E\varepsilon_i & \text{— obszar sprężysty } [\varepsilon_i < (\varepsilon_i^*)^0], \\ p_i^* - E(\varepsilon_i^* - \varepsilon_i) & \text{— proces bierny } [\varepsilon_i > (\varepsilon_i^*)^0]. \end{cases}$$

Tak więc, oparcie się na ogólniejszych związkach (2.1) wpłynęło wprawdzie na bardziej skomplikowaną postać równań fizycznych w układzie (2.21), nie ma to jednak zasadniczego znaczenia wobec faktu zastosowania do obliczeń elektronicznej maszyny cyfrowej.

2.3. Zagadnienie odciążania oraz opis fizycznej charakterystyki materiału powłoki. W dalszym ciągu będziemy stosować, dla poszczególnych punktów powłoki, określenia — proces czynny i bierny, natomiast w odniesieniu do obciążenia Q — terminów: obciążanie i odciążanie [4]. Procesy bierne mogą występować w poszczególnych punktach powłoki (lokalne odciążanie) jako wynik redystrybucji sił wewnętrznych w procesie obciążania powłoki. Typ procesu będziemy określać na podstawie przyrostu intensywności naprężeń (por. rys. 2)

$$(2.24) \quad \Delta p_i = p_i^* - p_i,$$

gdzie p_i^* oznacza wartość intensywności naprężeń (na powierzchni plastyczności) odpowiadającą poprzedniej wartości obciążenia Q , zaś p_i jest wartością dla aktualnego obciążenia. Tak więc, w poszczególnych punktach powłoki rozwiązywanej na podstawie układu (2.21) mogą występować równocześnie obszary sprężyste, uplastycznione, lokalnie odciążane

i wtórnice uplastycznione. Ze względu na przyjętą charakterystykę fizyczną materiału układ równań (2.21) pozwala nam wyróżnić trzy następujące przypadki:

a) *Wzmocnienie izotropowe*. Występuje ono, jeżeli we wzorach (2.1) i (2.18) położymy $c_0 = 0$, a charakterystykę materiału k przyjmujemy wprost z próby jednoosiowego rozciągania. Dla założonego liniowego wzmocnienia mamy

$$(2.25) \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} ((p_1)_0^* + A \varepsilon_1^p)$$

i wtedy przy pomocy układu (2.21) możemy rozwiązywać w zasadzie te same problemy, co przy pomocy układu (1.2) i (1.3), z tym zastrzeżeniem, że wzmocnienie potęgowe jest obecnie aproksymowane przez liniowe lub wielokrotnie odcinkowo-liniowe.

b) *Idealny efekt Bauschinger*. W tym przypadku translacja powierzchni będzie opisana wzorem (2.11), zaś parametr wzmocnienia $c_0 = \operatorname{tg} \alpha$ określimy z próby jednoosiowego rozciągania. Obecnie nie wystąpi rozszerzanie się powierzchni plastyczności F , a więc

$$(2.26) \quad \frac{dk}{d\varepsilon_1^p} = 0,$$

co w praktyce oznacza, że $A = 0$.

c) *Wzmocnienie kinematyczne materiału pierwotnie izotropowego*. Ten najbardziej ogólny przypadek możemy uzyskać zakładając równoczesne rozszerzanie się i translację powierzchni F . Wówczas przyjmujemy zarówno $c = \operatorname{const}$, jak i $A = \operatorname{const}$.

3. Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej

3.1. *Algorytm numerycznego rozwiązania*. Przed przystąpieniem do numerycznego całkowania układu równań (2.21) określimy jego typ oraz ustalimy rozkład charakterystyk. Kierunki charakterystyczne znajdziemy z warunku zerowania się wyznacznika

$$(3.1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 & \frac{au}{bx} \lambda_\tau & \frac{em}{x} \lambda_\tau \\ 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u} \lambda_\xi & 0 & \lambda_\tau & \frac{gm}{u} \lambda_\tau \\ 0 & 0 & \lambda_\xi & 0 & \frac{u}{bm} \lambda_\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\tau \end{vmatrix} = \lambda_\xi^4 \lambda_\tau^2 c' = 0$$

układu równań (2.21). Jest to układ hiperboliczny o charakterystykach $\xi = \operatorname{const}$ (dwukrotna) i $\tau = \operatorname{const}$ (czterokrotna). Warunki zgodności na liniach $\xi = \operatorname{const}$ są następujące

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{u}{bm} \frac{dp_1}{d\tau} + \frac{au}{bx} \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{em}{x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{gm}{u} \frac{du}{d\tau}, \end{aligned}$$

zaś na liniach $\tau = \text{const}$ przyjmują postać (1.2). Tak więc, układ równań cząstkowych (2.21) rozpadł się na dwie grupy równań różniczkowych zwyczajnych, które muszą być całkowane wzdłuż odpowiednich charakterystyk. Równania te będziemy rozwiązywać numerycznie. Z postaci warunków zgodności wynika, że funkcje x , y , φ , p_1 możemy wyznaczyć z równań (1.2), zaś funkcje u i p_2 z równań (3.2). Warunki brzegowe możemy postawić w identyczny sposób, jak w pracy [1], natomiast dość zasadnicza różnica wystąpi w sposobie określania warunków początkowych. Wartość początkowego obciążenia musi być tak dobrana, aby wszystkie punkty powłoki znalazły się w obszarze sprężystym. Mogą one też przyjmować wartości zerowe. Uplastycznienie poszczególnych punktów powłoki powinno nastąpić dopiero wtedy, gdy intensywność naprężeń osiągnie w nich wartość $(p_1^*)_0$ (por. rys. 2), a więc gdy przybierze wielkość odpowiadającą powierzchni elipsy F .

Całkowanie równań cząstkowych (2.21) sprowadziliśmy do rozwiązywania dwóch układów zwyczajnych równań różniczkowych wzdłuż kolejnych linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ w całym obszarze $D(\xi, \tau)$. Obszar ten, z uwagi na zmienną geometryczną, dzielimy na $2m$ części za pomocą linii $\xi = \xi_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2m$ przeprowadzonych w jednakowych odstępach $1/2 \Delta \xi = 1/2(\xi_i - \xi_{i-2})$. Niech $w(\xi_i, \tau_j)$ przedstawia dowolną z rozpatrywanych funkcji; aby uprościć zapis oznaczamy krótko $w(\xi_i, \tau_j) = w_{ij}$. W niektórych przypadkach dla lepszego rozróżnienia wskaźników rozdzielać je będziemy przecinkiem. Obecnie przedstawimy przebieg numerycznego rozwiązywania układu (2.21) opartego o metodę RUNGEGO-KUTTY (por. [1]). Całkowanie zwyczajnych równań różniczkowych przeprowadzimy przy wprowadzeniu następujących oznaczeń upraszczających zapis:

$$(3.3) \quad B = \frac{\xi \cos \varphi}{u x \cos \varphi} = \frac{dx}{d\xi}, \quad C = \frac{B}{p_1 \cos \varphi} \left(\frac{Qn}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right) = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad E = B \operatorname{tg} \varphi,$$

$$D = \frac{B}{u} \left(p_2 - p_1 + \frac{xQ}{fu \cos \varphi} \right) - p_1 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} \right),$$

$$(3.4) \quad L_{i-2,j} = \frac{2}{\Delta \xi} \sum_{s=0}^K \beta_{ks} u_{i-s-1,j} \simeq \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{i-2,j},$$

$$(3.5) \quad M_\nu(w)_{ij} = \gamma K_\nu(w)_{ij},$$

gdzie

$$(3.6) \quad K_\nu(w) = \frac{dw}{d\xi} \Delta \xi, \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

$$H_{i-2,j}(w) = 1/6 \sum_{r=1}^4 \omega K_\nu(w)_{i-a,j}.$$

Wielkości $\gamma = \gamma(\nu)$ i $\omega = \omega(\nu)$ będące współczynnikami we wzorach Rungego-Kutta przybierają wartości dyskretne $1/2, 1/2, 1, 1$ oraz $1, 2, 2, 1$, podobnie jak wyrażenie

$\alpha = \alpha(\nu) = 2, 1, 1, 0$. Przy przyjętych wyżej oznaczeniach proces obliczeń będzie przebiegać następująco:

$$\begin{aligned}
 K_\nu(x)_{i-\alpha, j} &= B_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 K_\nu(y)_{i-\alpha, j} &= E_{i-\alpha, j} \Delta \zeta, \\
 K_\nu(\varphi)_{i-\alpha, j} &= C_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 x_{i+2\gamma-2, j} &= x_{i-2, j} + M_\nu(x)_{i-\alpha, j}, \\
 y_{i+2\gamma-2, j} &= y_{i-2, j} + M_\nu(y)_{i-\alpha, j}, \\
 \varphi_{i+2\gamma-2, j} &= \varphi_{i-2, j} + M_\nu(\varphi)_{i-\alpha, j}, \\
 \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{i-\alpha, j} &= L_{i-\alpha, j}, \\
 K_\nu(p_1)_{i-\alpha, j} &= D_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 (p_1)_{i+2\gamma-2, j} &= (p_1)_{i-2, j} + M_\nu(p_1)_{i-\alpha, j}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Dla $\nu = 4$ wartości poszukiwanych funkcji w punkcie (ξ_i, τ_j) wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= x_{i-2, j} + H(x)_{i-2, j}, \\
 y_{ij} &= y_{i-2, j} + H(y)_{i-2, j}, \\
 \varphi_{ij} &= \varphi_{i-2, j} + H(\varphi)_{i-2, j}, \\
 (p_1)_{ij} &= (p_1)_{i-2, j} + H(p_1)_{i-2, j}.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

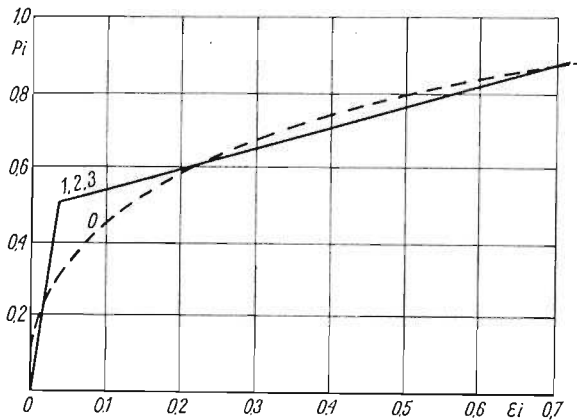
Pozostałe funkcje wyznaczamy w oparciu o ulepszoną metodę Eulera (dla współrzędnej τ):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial p_1}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j} &= L'(p_1)_{i+2\gamma-2, j}, \\
 \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j} &= L'(x)_{i+2\gamma-2, j}, \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-2} &= \left(\frac{u}{bm} L'(p_1) + \frac{au}{bx} L'(x) \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 \left(\frac{\partial p_2}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1} &= \left(\frac{em}{x} L'(x) + \frac{dm}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 u'_{i+2\gamma-2, j} &= u_{i+2\gamma-2, j-2} + 2\Delta\tau \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1}, \\
 (p_2)_{i+2\gamma-2, j} &= (p_2)_{i+2\gamma-2, j-2} + 2\Delta\tau \left(\frac{\partial p_2}{\partial \tau} \right)_{i+2\gamma-2, j-1},
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

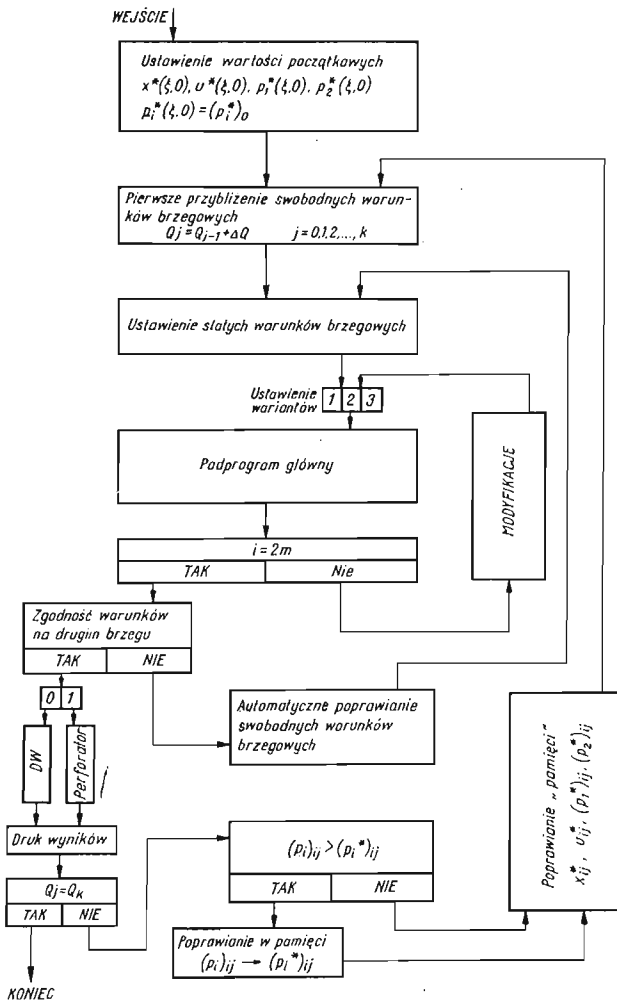
gdzie pochodna

$$L'(w) = \frac{dw_j}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} w_{j-r}.
 \tag{3.10}$$

We wzorach (3.4) i (3.10) β_{ks} i β_{kr} są współczynnikami, których wielkość zależy od przyjętej liczby k (por. [5]). Następnie przechodzimy do wyznaczania wartości poszukiwanych funkcji w punktach (ξ_{i+2}, τ_j) , (ξ_{i+4}, τ_j) , ..., (ξ_{2m}, τ_j) , a potem na linii $\tau_{j+1} = \text{const}, \dots, \tau_n = \text{const}$, aż skonstruujemy rozwiązanie w całym obszarze $D(\xi, \tau)$.

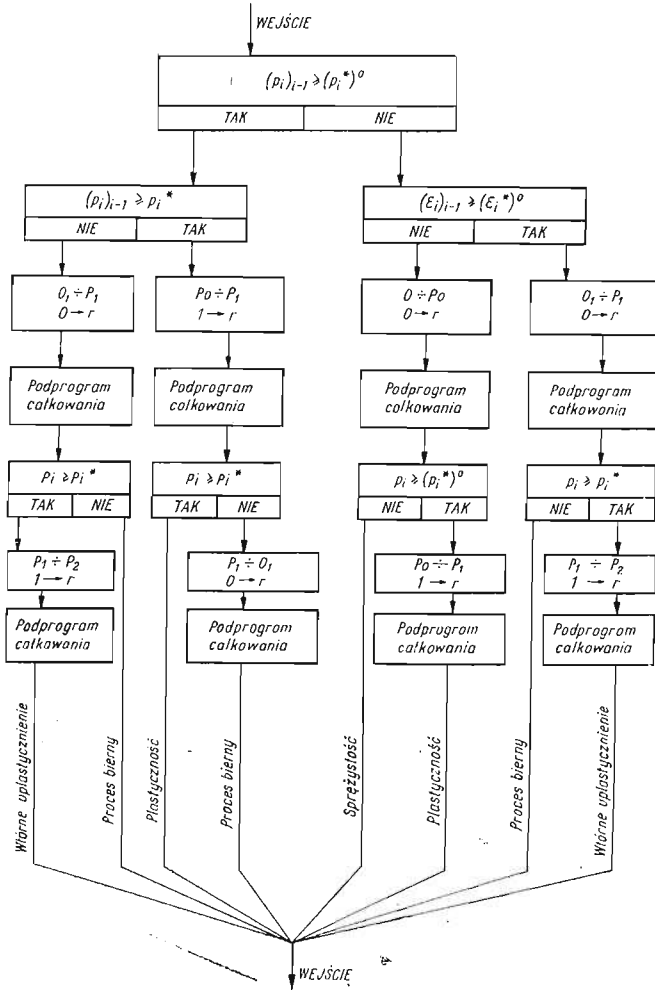


Rys. 4. Charakterystyki fizyczne materiału powłoki: — dla układu równań (2.21), — — — dla układu (1.2) i (1.3)



Rys. 5. Schemat blokowy rozwiązywania układu równań (2.21)

3.2. Program dla komputera. Schemat blokowy programu dla elektronicznej maszyny cyfrowej przedstawiono na rys. 5. Zakładamy, że dla konkretnych przypadków rozwiązywanych powłok, warunki brzegowe nie pozwalają na bezpośrednie obliczanie na brzegu $\xi = \xi_0$ wszystkich wartości poszukiwanych funkcji. Problem brzegowy sprowadzono więc do zagadnień początkowych (ponieważ z uwagi na znaczną nieliniowość prawych stron równań różniczkowych korzystamy z metod numerycznych sukcesywnego całkowania), za-

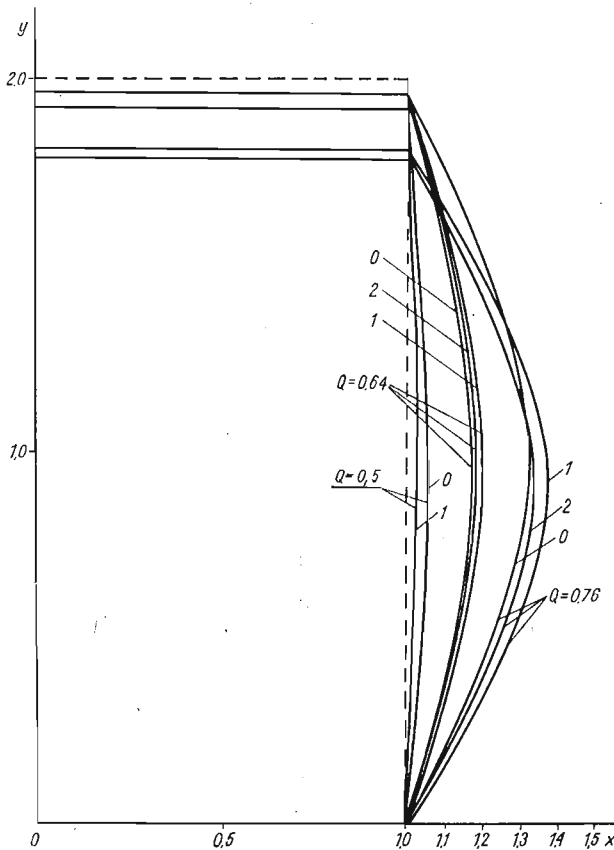


Rys. 6. Schemat blokowy podprogramu głównego przy rozwiązywaniu układu równań (2.21)

kładając a priori na brzegu wyjściowym wszystkie brakujące warunki i rozwiązując dalej zadanie metodą półdrotną. Wielkości, które dodatkowo zakładamy dla $\xi = \xi_0$ kolejno na każdej linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, muszą być tak dobierane, aby każdorazowo spełniane były wszystkie warunki zadane na obu brzegach. Wymaga to zwykle przeprowadzenia wielu prób. Iteracje te są w pełni zautomatyzowane w programie. Przytoczone poniżej wyniki liczbowe uzyskano przy zastosowaniu EMC Odra-1013 zainstalowanej w Ośrodku

ETO Politechniki Krakowskiej. Program wykonano w języku wewnętrznym maszyny i przy maksymalnym wykorzystaniu pamięci ferrytowej. Pomimo to czasy iteracji, przy $\tau = \tau_j = \text{const}$, dla spełnienia warunków brzegowych wzdłuż współrzędnej $\xi (m = 50)$ były stosunkowo długie i średnio trwały około jednej godziny. Obecnie, w ośrodku obliczeniowym Uniwersytetu Gdańskiego opracowano (por. [8]) nową wersję tego programu przy zastosowaniu EMC Odra-1204. Uzyskano tym sposobem około 30-krotne skrócenie czasu obliczeń. Program ten wchodzi w skład pakietu programowego dla wiotkich powłok, w którym, oprócz omawianego w niniejszej pracy układu równań, można rozwiązywać powłoki przy uwzględnieniu efektów reologicznych według trzech różnych teorii pełzania (por. [7]).

3.3. Przykłady liczbowe. Celem uzyskania rezultatów liczbowych przyjęto powłokę walcową o skończonej długości z dwoma sztywnymi swobodnymi denkami i obciążoną



Rys. 7. Forma powłoki odkształconej

równomiernym parciem wewnętrznym. Przy przyjęciu pierwotnej długości powłoki $L_0 = 2$, układ (2.21) powinien spełnić następujące warunki brzegowe:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x(0, \tau) = 1, \quad y(0, \tau) = 0, \quad x(2, \tau) = 1, \\ p_1(0, \tau) = 2p_2(0, \tau) = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu+1} [-\ln u(1, \tau)]^\mu. \end{aligned}$$

W obliczeniach zamiast trzeciego z warunków (3.11) z uwagi na symetrię korzystamy z zależności $\varphi(1, \tau) = \pi/2$. Rezultaty obliczeń przedstawione są na rysunkach 7÷16. Wszędzie cyfrą 1 oznaczono wykresy uzyskane z rozwiązania układu (2.21) dla przypadku «a», gdzie

$$A = 0,6, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0;$$

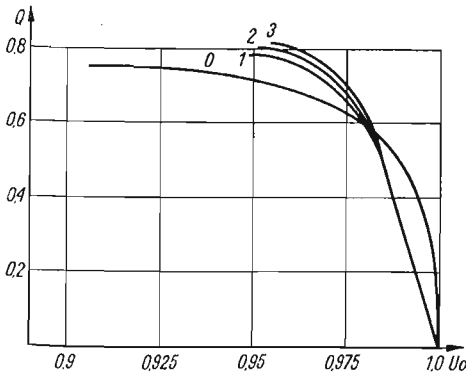
cyfrą 2 oznaczono wyniki dla przypadku «b», gdzie

$$A = 0, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0,4;$$

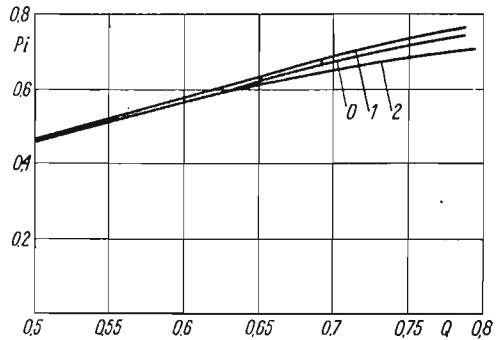
cyfrą 3 oznaczono wyniki dla przypadku «c», gdzie

$$A = 0,6, \quad m = 13 \quad \text{ i } \quad c_0 = 0,4;$$

zaś cyfrą 3 oznaczono rezultaty obliczeń uzyskane z rozwiązania układu (1.2) ÷ (1.3).

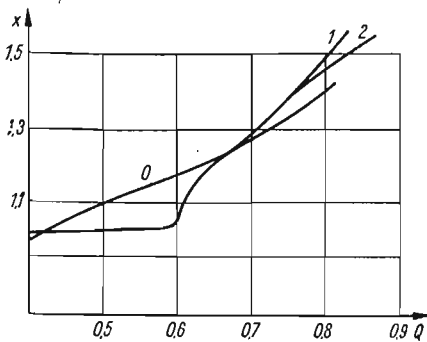


Rys. 8. Wykresy funkcji $Q = f(u_0)$

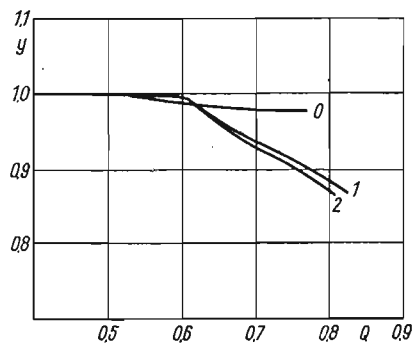


Rys. 9. Wykresy funkcji $p_i = f_i(Q)$ dla punktu w środku długości powłoki

Wartości A , m , c zostały tak dobrane (por. [6]), aby przyjęta na ich podstawie charakterystyka sprężysto-plastyczna była możliwie dobrym przybliżeniem charakterystyki potęgowej zastosowanej w [1]. Rysunek 8 rzuca światło na zagadnienie stateczności

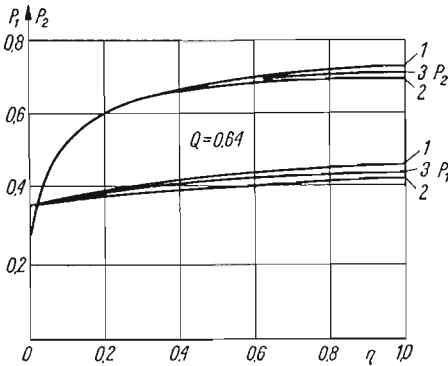


Rys. 10. Wykres $x = x(Q)$ dla punktu w środku powłoki

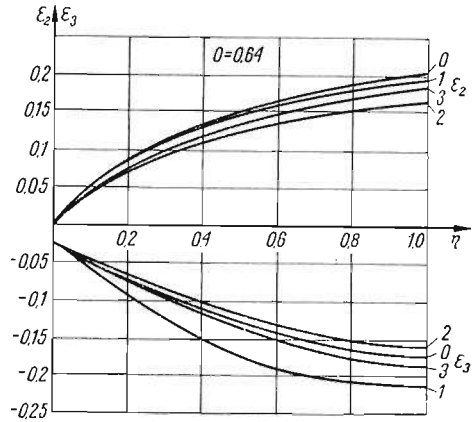


Rys. 11. Wykres $y = y(Q)$ dla punktu w środku powłoki

powłok i przedstawia zależność u (przyjmowany na brzegu swobodny warunek) od obciążenia Q . Rysunek 7 ilustruje zmianę kształtu powłoki w procesie obciążania, rysunek 11 przedstawia, w zależności od Q , przesuwanie wzdłuż osi y swobodnego denka powłoki zaś na rys. 10 obserwujemy przesuwanie punktu w środku długości powłoki wzdłuż osi x .

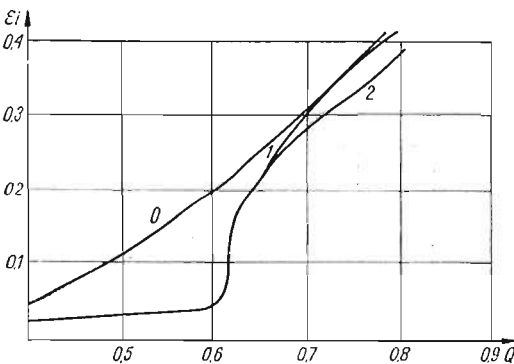


Rys. 12. Rozkład naprężeń głównych wzdłuż osi powłoki η

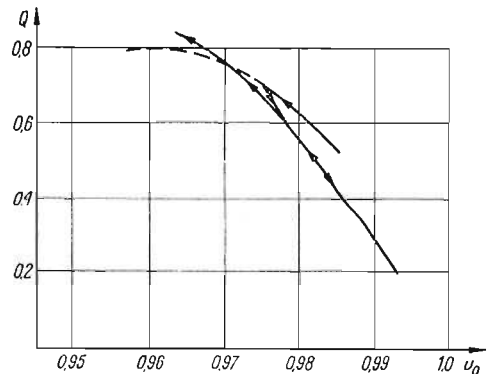


Rys. 13. Rozkład odkształceń głównych wzdłuż osi powłoki η

Rysunki 12 i 13 pokazują rozkład odkształceń głównych i intensywności naprężeń wzdłuż współrzędnej η . Na rysunkach 9 i 14 przedstawiony jest wzrost intensywności naprężeń i odkształceń, wybranego punktu w środku powłoki obliczonej dla przypadków 0, 1 i 2, dla przypadku 2 pokazany jest na rys. 15 i 16 przebieg odciażania powłoki (od wartości obciążenia $Q = 0,7$), a następnie ponownego obciążenia.



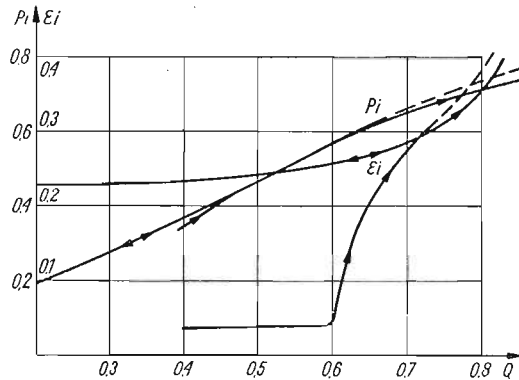
Rys. 14. Wykres funkcji $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(Q)$ dla punktu w środku powłoki



Rys. 15. Wykres funkcji $Q = f(u_0)$ przy odciażaniu

Na podstawie przytoczonych tu wyników można przeprowadzić szereg ważnych porównań. I tak porównując wyniki uzyskane z rozwiązania układu (2.21) z analogicznymi wynikami dla układu (1.2 i 1.3) widać, że największe różnice występują dla stosunkowo

małych obciążeń, a więc tam gdzie odchylenie w przebiegu charakterystyk fizycznych jest najgłębsze. Różnice te można zniwelować przez odpowiedni dobór charakterystyki sprężysto-plastycznej, a w szczególności przez zastosowanie aproksymacji wieloodcinkowej. Przede wszystkim jednak porównanie wyników uzyskanych dla przypadków 1, 2, 3 pozwala na zaobserwowanie wpływu przyjętej hipotezy wzmocnienia na rozwiązania rozważanej



Rys. 16. Wykres funkcji $\epsilon_i, P_i = f(Q)$ przy odciążaniu i powtórnym obciążeniu

powłoki. Uwzględnienie translacji powierzchni plastyczności wpłynęło na zwiększenie stateczności tej powłoki (rys. 8), a dla tych samych obciążeń dało, dla odkształceń i naprężeń, wartości niższe niż przy wzmocnieniu izotropowym. Podczas prób odciążania i ponownego obciążania zaznaczył się dość wyraźnie wpływ «historii obciążania».

Literatura cytowana w tekście

1. J. ORKISZ, J. WILK, *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 7 (1969).
2. R. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, ZAMP, 9a (1958).
3. В. В. Новожилов, *О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений*, Прикл. Мат. и Мех., 3, 28 (1964).
4. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, 1971.
5. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, 11 (1967).
6. Г. Б. Талыпов, *К теории пластичности учитывающей эффект Баушингера*, Инж. Журн. МТТ, 6 (1966).
7. J. WILK, *Pelzanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok niesprężystych w zakresie skończonych odkształceń*, Rozpr. Inż., 2, 18 (1970).
8. J. WILK, *Systemowe rozwiązywanie wiotkich osiowo-symetrycznych powłok przy zastosowaniu EMC Odra-1204*, (praca przygotowywana do druku).

Резюме

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

В работе дана новая система дифференциальных уравнений для осесимметрических оболочек, которые под влиянием нагрузки могут существенным образом изменять свою первоначальную форму, испытывая при этом большие деформации. Уравнения пластического течения основаны

на физических соотношениях, выведенных для общего случая упрочнения с учетом смещения и расширения поверхности текучести. Численные примеры иллюстрируют метод и показывают правильность разработанных алгоритмов решения.

Summary

FINITE DEFORMATIONS OF SLENDER AXI-SYMMETRIC SHELLS MADE OF MATERIALS OBEYING THE KINEMATIC STRAIN-HARDENING LAW

In this paper is derived a new system of differential equations for axially-symmetric shells capable of changing their initial form essentially under the loading. Equations based on the theory of plastic flow are derived at a general type of hardening with translation and extension of a yield locus. Numerical examples are computed as an illustration and verification of the algorithms proposed.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 października 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 25 września 1975 r.
