

NIKTÓRE PROBLEMY MODELOWANIA UKŁADÓW MECHANICZNYCH

AGNIESZKA MUSZYŃSKA (WARSZAWA)

W dobie dokonującej się rewolucji naukowo-technicznej niezwykle ważne zadania spełniają maszyny i mechanizmy; one realizują nowe, coraz bardziej złożone procesy wytwórcze, przetwórcze, usługowe. Rola maszyn i mechanizmów z roku na rok jest coraz większa, zarówno ze względu na ogromny ilościowy wzrost produkcji we wszystkich dziedzinach gospodarki, jak i jakościowe przekształcenia produkcji, dyktowane przez wymagania nowych procesów technologicznych i nowych zadań, jak też wprowadzanie coraz to nowych tworzyw konstrukcyjnych oraz materiałów przerabianych przez maszyny. Maszyny realizują różnorodne procesy technologiczne w złożonych warunkach dużych prędkości i wielkich mocy, w rozmaitych stanach cieplnych, w warunkach dużych ciśnień i w próżni, w środowiskach szkodliwych dla człowieka. Nieustannie wzrasta intensywność i wielkość obciążeń, prędkości bezwzględnych ruchów poszczególnych ogniw i prędkości względne w węzłach łańcuchów kinematycznych. Jednocześnie rosną stawiane maszynom wymagania dotyczące wydajności, przy zagwarantowaniu wysokiej precyzji działania, trwałości i niezawodności. Obecne tendencje w tej dziedzinie można krótko scharakteryzować ogólnym dążeniem do wykorzystania granicznych parametrów odnoszących się zarówno do konstrukcji urządzeń, warunków ich pracy, dokładności funkcjonowania, prostoty obsługi, możliwie łatwego, a co za tym idzie — taniego wytwarzania, własności materiałów wykorzystywanych do ich wytworzenia, jak i samych metod wytwarzania poszczególnych części i zespołów maszyn.

Skomplikowanie struktury maszyn, przy jednoczesnym podwyższeniu wymagań dotyczących ich kinematycznych, a w szczególności dynamicznych charakterystyk postawiło szereg istotnych zadań przed konstruktorami, technologami i użytkownikami maszyn. Jedne z ważniejszych — związane są z zadaniami dynamicznych badań maszyn. Agregaty maszynowe przedstawiają złożone układy drgające o wielu stopniach swobody, kinematycznie zamknięte, otwarte lub rozgałęzione, z więzami holonomicznymi i nieholonomicznymi, z elementami sprężystymi i elementami o zmiennej masie i zmiennej bezwładności, z luzami w parach kinematycznych. Elementy maszyn poddane są wymuszeniom okresowym, prawie okresowym, impulsowym, wymuszeniom o charakterze losowym. Wymuszenia działają najczęściej w połączeniu z innymi czynnikami (przy obciążeniu statycznym, w złożonym stanie naprężeń, w zmiennym polu temperatur itp). W takich warunkach dużym niebezpieczeństwem są stany rezonansowe i dynamiczne stany krytyczne oraz stany niestatecznych ruchów drgających, przy których możliwe jest narastanie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Często duże zmienne naprężenia związane ze zjawiskami drganiowymi i z utratą stateczności, prowadzą do zmęczeniowych

pęknięć części maszyn. Oprócz tego, niezależnie od wpływu na wytrzymałość, drgania wywołują zaburzenia w programowym ruchu elementów maszyn, zmieniają własności kinematyczne układów, stanowią źródło hałasu, powodują zakleszczanie, wywołują udary, zwiększone tarcie, powodują wydzielanie się ciepła, stanowią przyczynę nadmiernego rozproszenia energii mechanicznej, a więc obniżają sprawność, wydajność i trwałość całej maszyny. Ponadto drgania elementów maszyn wywierają szkodliwy wpływ na ludzi obsługujących maszyny.

W większości agregatów maszynowych proces roboczy związany jest z ruchem, który powinien być realizowany w wyznaczony, przewidziany sposób.

Drgania elementów maszyn i wszystkie zjawiska dynamiczne, związane z roboczym procesem maszyny są bardzo niekorzystne. Dlatego też, już na etapie projektowania maszyny, niezbędna jest możliwie dokładna znajomość wszystkich procesów dynamicznych, aby uniknąć lub zminimalizować zjawiska niekorzystne.

Agregaty maszynowe przedstawiają skomplikowane struktury zbudowane m.in. z obwodów napędowych, transmisyjnych, roboczych i regulacyjnych, które z kolei składają się z ogniw sprężystych, inercyjnych, hydraulicznych, pneumatycznych i wielu ogniw o bardziej złożonym charakterze. Z tego względu, przy badaniach takich skomplikowanych struktur, właściwe jest przyjęcie dwojakiego podejścia: z jednej strony, konieczne jest szczegółowe badanie poszczególnych elementów struktury, z drugiej zaś ujęcie analityczne całej struktury w postaci modelu wielkiego systemu, rozpatrywanie kompleksowe zarówno rozmieszczeń części składowych, jak i wzajemnych sprzężeń elementów, ogniw i obwodów, relacji między nimi, przepływów energii, przekazywania informacji itd., przy uwzględnieniu dynamiki (zmienności w czasie) wszystkich przebiegających w systemie procesów.

Badania prowadzone według pierwszego schematu mają o wiele dłuższą tradycję i legitymują się już ogromnym dorobkiem. W obecnych czasach, charakteryzujących się jakościowym skokiem w rozwoju nauki i technologii, wywierającym rozległy wpływ na różne dziedziny życia gospodarczego, społecznego, kulturalnego, badania prowadzone według drugiego schematu stają się bezwzględnie koniecznością. W badaniach systemowych tego typu możliwe staje się uwzględnienie nie tylko mechanicznych czy elektrycznych ogniw systemu, ale również układów biologicznych, ekonomicznych i socjologicznych, a więc i ich wzajemnego oddziaływania. Ta dziedzina nauki stawia dziś pierwsze kroki.

Przedmiotem badań prowadzonych według pierwszego schematu są wyizolowane elementy struktury. Elementem struktury może być zarówno jedno proste ogniwo (mechaniczne lub inne), jak i układ składający się z wielu połączonych, współpracujących ze sobą ogniw różnego charakteru. Cała pozostała struktura traktowana jest jako otaczające środowisko zewnętrzne, w określony sposób oddziałujące na ten wyizolowany układ.

Formalne ujęcie zagadnień związanych z analizą działania oraz syntezą, zarówno elementów danej struktury, jak też i większych systemów, rozpoczyna się etapem modelowania [1-16]. Ze względu na złożoność i różnorodność zjawisk i procesów występujących w układach rzeczywistych, trzeba zaniedbać pewne własności tych układów i rozpatrywać układy uproszczone, wyidealizowane. W ogólności modelowanie oznacza imitowanie rzeczywistości istniejącego obiektu za pomocą specjalnego konstruowania analogonów (modeli), w których z określonym przybliżeniem odtwarza się zasady orga-

nizacji i funkcjonowania tego obiektu, co następnie umożliwi uzyskanie informacji o samym modelowanym obiekcie. *M o d e l e m* danego rzeczywistego obiektu (fragmentu rzeczywistości) jest dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając obiekt, zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nowych, nadających się do doświadczalnego sprawdzenia informacji o tym obiekcie. Na podstawie ujawnienia podobieństwa między dwoma układami (modelem i obiektem rzeczywistym), z których jeden traktuje się jako obraz drugiego, w procesie modelowania, z obserwacji poczynionych w jednym układzie uzyskuje się charakterystyki drugiego¹⁾.

W przypadku układów fizycznych, modelowanie obejmuje na ogół dwa etapy: budowanie modelu nominalnego i budowanie modelu matematycznego, oba etapy są ze sobą jednak ściśle powiązane. Dla układów mechanicznych, model nominalny²⁾ przedstawia w uproszczony sposób strukturę układu (przestrzenne rozmieszczenie wyidealizowanych elementów). Model matematyczny stanowi zbiór relacji (wzory, równania, nierówności, warunki logiczne itp.), wiążących wybrane zmienne, opisujące stan układu³⁾.

Niżej omówione zostaną nieco szerzej poszczególne etapy modelowania oraz specyfika modelowania układów mechanicznych.

Zbudowanie adekwatnego modelu nominalnego i matematycznego wymaga zgromadzenia szeregu informacji o modelowanym obiekcie rzeczywistym. Informacje te powinny dotyczyć zarówno jego cech wewnętrznych i sposobu oddziaływania czynników zewnętrznych, jak i celu samych badań. Informacje takie uzyskuje się z eksperymentów, z wyników badań modeli pośrednich (układów cząstkowych, uproszczonych, bez sprzężeń), wreszcie na podstawie doświadczenia zgromadzonego przy badaniu układów podobnych. Zbiór takich informacji o układzie rzeczywistym zawierać powinien pojęcia i relacje bezpośrednio związane z daną dziedziną rzeczywistości. Przy gromadzeniu informacji niezbędne jest przyjęcie od razu określonego, formalnego systemu opisowego (na ogół zaczerpniętego z matematyki — reguły tworzenia zdań, aksjomatów, zasady prowadzenia dowodów, zapis analityczny, tabelaryczny, graficzny itd.), który umożliwi zestawienie i porównywanie zbieranych informacji.

Tak więc, pierwszym krokiem przy modelowaniu jest zgromadzenie informacji o obiekcie rzeczywistym. Im więcej wiemy o tym obiekcie, tym dokładniej, trafniej i logiczniej możemy wyznaczyć bezpośredni cel badań, tym lepiej i stosowniej dobrać model, za pomocą którego chcemy osiągnąć cel badań, tym dokładniej potrafimy wyznaczyć obszar niewiedzy o obiekcie rzeczywistym.

Następnym krokiem procedury modelowania jest podjęcie decyzji dotyczących rozgraniczenia zgromadzonych informacji na «ważne» oraz «nieistotne» dla danego celu lub w danym etapie badań. Jedną z najistotniejszych jest tu decyzja o wydzieleniu, wyizolowaniu interesującego nas układu (obektu) z otaczającego go środowiska. Oddziaływanie środowiska traktuje się następnie jako zewnętrzne zaburzenie działające na układ, skiero-

¹⁾ Model nie jest odbiciem rzeczywistości, lecz tylko odbiciem aktualnie posiadanej o niej wiedzy — stąd nigdy nie może być traktowany jako coś trwałego i nie podlegającego zmianom.

²⁾ zwykle nazywany modelem fizycznym.

³⁾ Często model nominalny przedstawia jedynie ilustrację modelu matematycznego, w sposób obrazowy pomaga przy interpretacji fizycznej zmiennych stanu.

wane tylko w jedną stronę. Sprzężenie zwrotne uważa się za nieistotne i przyjmuje się, że oddziaływanie badanego układu na środowisko nie zmienia stanu tego środowiska. W ten sposób uzyskuje się wyizolowany ze środowiska obiekt — w postaci układu względnie odosobnionego, który stanowić będzie przedmiot dalszych badań. Operacja wyizolowania obiektu z otaczającego środowiska powinna być poprzedzona gruntowną analizą, opartą na przesłankach wynikających głównie z przeznaczenia modelu. Na tym etapie rezygnuje się bowiem z uwzględniania niektórych sprzężeń między elementami lub podukładami. Sprzężenia takie mogą mieć niekiedy znaczny wpływ na zachowanie się układu rzeczywistego — zatem model bez sprzężeń będzie modelem nieadekwatnym⁴³).

Pośród informacji gromadzonych na wstępnym etapie powinny znaleźć się informacje dotyczące zjawisk oraz sytuacji problemowych, które mogą mieć miejsce przy funkcjonowaniu danego układu rzeczywistego. Zjawiska interesują nas już w fazie projektowania układu. Należy przewidzieć sposób, w jaki zachodzą procesy, charakterystyczne dla danego zjawiska i na tej podstawie tak skonstruować i wykonać układ, aby podczas jego eksploatacji procesy uznane za ważne przebiegały w sposób możliwie bliski do założonego. W tym celu należy dysponować zarówno modelami zjawisk, które w zakresie interesujących nas procesów, w powiązaniu ze strukturą układu odzwierciedlają rzeczywistość z dopuszczalnym błędem, jak i dysponować modelami warunków pracy, wynikających z powiązania badanego układu ze środowiskiem. W realizacji tych postulatów, oprócz wiedzy podstawowej, dużą rolę odgrywa «bank informacji» o sposobach funkcjonowania danej klasy układów w charakterystycznych dla nich warunkach eksploatacyjnych. Ten bank informacji jest tworzony na podstawie wyników badań diagnostycznych oraz drogą identyfikacji istniejących i działających układów.

Diagnostyczne badania eksperymentalne dostarczają informacji o procesach mechanicznych, akustycznych, cieplnych, o procesach zużycia itp., przebiegających w czasie funkcjonowania urządzeń mechanicznych oraz informacji o własnościach dynamicznych tych urządzeń, z uwzględnieniem przebiegających w nich procesów. Są to więc informacje dotyczące stanu urządzeń oraz zmienności tego stanu w czasie. Dają one podstawę do prognozowania przebiegu dalszych procesów i wskazówki na temat ewentualnego wprowadzenia modyfikacji i zmian w urządzeniach, w celu doskonalenia tych procesów.

Niestety diagnostyczne badania eksperymentalne nie zawsze mogą być w pełni przeprowadzone, nie zawsze można tą drogą uzyskać wszystkie poszukiwane informacje. Niekiedy zbadanie już tylko statycznych własności obiektów jest zadaniem skomplikowanym. Złożoność tego zadania jest konsekwencją faktu, że własności obiektów zależą zazwyczaj od bardzo wielu zarówno znanych, jak i nieznanymi czynników. Dodatkową trudnością jest jeszcze fakt, że wartości tych czynników, własności samego obiektu i dostępne dla eksperymentatora wielkości wyjściowe, zależne od wspomnianych czynników, mogą podlegać wpływom szumów i zakłóceń. Ponadto, ze względu na niewielki na ogół,

⁴³ Dla przykładu, rezygnując z niektórych sprzężeń zmienia się wartości i liczbę częstości własnych układu drgającego; jeżeli celem jest zbadanie drgań rezonansowych przy wymuszeniu okresowym, należy skonfrontować ze sobą częstości wymuszeń z widmem częstości własnych układu ze sprzężeniami i układu uproszczonego. Ten ostatni może być przyjęty do dalszej analizy wtedy, gdy wartości częstości wymuszeń nie są bliskie wartościom „odrzuconych” częstości własnych, a zmiany wartości częstości własnych, najbliższych wartościom częstości wymuszeń są nieznaczne.

możliwy zakres zmienności wartości parametrów przy przeprowadzaniu konkretnych badań, zebrane informacje są jedynie fragmentaryczne. Zachodzi również obawa pominięcia istnienia współzależności czynników wpływających na badaną własność obiektu i na zaburzenia wejściowe od jakiegoś nieznanego przez eksperymentatora zakłócenia. W «banku informacji» powinny się więc znaleźć informacje z możliwie pełnym opisem okoliczności, w jakich zostały uzyskane.

I d e n t y f i k a c j a jest dziedziną szerszą i znacznie lepiej, w sposób kompleksowy rozpracowaną. Ujmując w sposób ogólny, domeną jej jest poszukiwanie właściwego, najbardziej adekwatnego modelu matematycznego obiektu rzeczywistego, na podstawie wyników eksperymentu dokonywanego bezpośrednio na obiekcie rzeczywistym. Wyniki badań eksperymentalnych są zestawiane z wynikami analizy teoretycznej modelu matematycznego, z uwzględnieniem określonego kryterium porównawczego (funkcja jakości wybierana zgodnie z przeznaczeniem modelu). Model powinien z żadaną dokładnością opisywać zachowanie się obiektu pod działaniem określonych zaburzeń zewnętrznych. Przy identyfikacji, etap budowania modelu nominalnego jest na ogół ograniczony. Proces poszukiwania adekwatnego modelu matematycznego prowadzi się często metodą iteracyjną, z góry zakładając postać struktury modelu i wprowadzając do modelu matematycznego przybliżone charakterystyki układu rzeczywistego, wyznaczone na podstawie znajomości własności elementów i sprzężeń, a następnie modyfikując model drogą pominięcia elementów i sprzężeń mniej ważnych, ze względu na oczekiwane działanie układu (lub też uzupełnienia modelu). Przy zadanej dokładności (kryterium jakości), zgodność modelu i układu rzeczywistego osiąga się drogą szeregu udoskonaleń (zmieniając strukturę i wartości parametrów charakterystyk), które zakończone zostają w momencie, gdy błąd nie przekracza założonej wartości. Taka procedura prowadzi do uzyskania modelu uwzględniającego minimalną liczbę własności niezbędnych, aby reprezentować zachowanie się układu rzeczywistego.

Oczywiście model taki jest adekwatny do układu rzeczywistego tylko w sensie przyjętego kryterium jakości i przy określonym, założonym rodzaju zaburzeń zewnętrznych. Identyfikacja jest ważnym elementem modyfikacji parametrycznej i strukturalnej układów i stanowi jeden z etapów syntezy układów oraz ich optymalizacji pod kątem wybranego kryterium.

Diagnostyczne badania eksperymentalne i identyfikacja stanowią podstawowe źródło informacji dotyczących przedmiotów, stanów, zjawisk i sytuacji problemowych potrzebnych przy modelowaniu układów mechanicznych.

Wybór modeli zjawisk powinien być uzależniony od postawionego celu badań. W modelach zjawisk winny być uwzględnione czynniki wywierające istotny wpływ na badane zjawiska. Rola tych czynników w modelu powinna w zadowalający sposób odzwierciedlać ich rolę w rzeczywistości. Model musi być przy tym zbudowany w taki sposób, aby można było sformułować, a następnie rozwiązać zadania, opisane w przyjętym, sformalizowanym języku matematycznym.

Modele zjawisk imitują (symulują) prawa przyrody, których nie znamy, natomiast obserwujemy skutki ich działania. Przy budowaniu modeli zjawisk tworzy się okoliczności, w których sprawdza się te prawa. Biorąc pod uwagę pewne elementy wiedzy, na podstawie obserwacji i prób, dochodzi się do określonych wniosków, które następnie, w sformalizo-

wany sposób ujmuje się w postaci hipotez. Zależność hipotetyczna skutków i przyczyn umożliwiająca przewidywania nowych zjawisk stanowi model przyczynowy danej klasy zjawisk.

Sytuacje problemowe interesują nas głównie w odniesieniu do szeroko pojętego sterowania. W tej dziedzinie modelowanie jest znacznie trudniejsze. Po pierwsze dlatego, że na ogół nie wszystkie możliwe decyzje sterujące znane są z góry, gdyż w miarę przebiegania procesów w układzie sytuacja może się zmieniać. Po drugie dlatego, iż w tej dziedzinie mamy najczęściej do czynienia z działalnością człowieka, której rezultatem są decyzje, zależne od wielu czynników, istniejących obiektywnie i wywierających wpływ na daną sytuację.

Budowanie nominalnego modelu układu polega na abstrahowaniu, dealizacji i upraszczaniu rzeczywistości (stanów, przedmiotów, zdarzeń), opartym na informacjach o układzie rzeczywistym, przy uwzględnieniu określonego celu. Model nominalny danego układu rzeczywistego jest układem wyidealizowanym, o dobrze zdefiniowanej (w przyjętym systemie opisu) strukturze i charakterystykach elementów składowych, a także o ściśle określonych warunkach granicznych oddzielających go od środowiska zewnętrznego, które również w ściśle zdefiniowany sposób może nań oddziaływać.

Dla układów mechanicznych, jedną z najważniejszych na etapie budowania modelu fizycznego, jest decyzja dotycząca wyboru liczby stopni swobody układu. Pod wpływem sił, rzeczywiste ciała podlegają odkształceniom i — mimo swej dyskretnej atomowo-cząsteczkowej struktury w skali mikro, w skali makro odkształcenia te rozkładają się w sposób ciągły. Mechanika ciała stałego operuje modelami ciągłymi. Przyjmuje się że elementy układu mechanicznego przedstawiają wyznaczone geometrycznymi wymiarami obszary, wypełnione ośrodkiem, mającym określone cechy. Przy założeniu modeli ciągłych układ mechaniczny ma nieskończoną liczbę stopni swobody. W przypadku złożonego układu, przyjęcie modelu ciągłego prowadzi do ogromnych trudności nie tylko natury matematycznej na etapie rozwiązywania równań, lecz już na etapie wstępnym, przy określaniu i wyznaczaniu stałych fizycznych w równaniach konstytutywnych oraz warunkach brzegowych. Pewne ułatwienia wprowadza się zakładając, że ośrodek jest jednorodny i izotropowy oraz że odkształcenia są małe.

Jednak w przypadku złożonych układów zwykle stosuje się całkowitą lub częściową dyskretyzację⁵⁾.

Istnieje szereg metod dyskretyzacji układów ciągłych. Ogólnie jednak wyodrębnić można dwie grupy: metody, w których korzysta się z postulatu o bryłach nieodkształcalnych i elementach bezinercyjnych oraz metody oparte na założeniu postaci drgań. W pierwszej grupie metod przyjmuje się hipotezę, że układ mechaniczny składa się z nieodkształcalnych brył sztywnych, charakteryzowanych przez masę i momenty bezwładności i z odkształcalnych, bezinercyjnych elementów sprężystych i dysypacyjnych, przynoszących tylko siły wzdłużne, reprezentujące siły wewnętrzne między poszczególnymi bryłami. Podział elementów układu na bryły sztywne i sprężyste elementy bezinercyjne jest podziałem

⁵ W szczególnych przypadkach postępuje się odwrotnie: układy łańcuchowe dyskretne wygodniej dla pewnych celów opisać modelami ciągłymi.

umownym i jednocześnie niejednoznaczny. Jako sztywne traktuje się często całe fragmenty konstrukcyjne, jak np. zespoły prądowców, sprężarki, sztywne platformy itp. Jako elementy bezinercyjne — sprężyny, podkładki gumowe, amortyzatory itp. Bryły sztywne i elementy bezinercyjne można również uzyskać na drodze umownego podziału elementów ciągłych.

W drugiej grupie metod dyskretyzacji korzysta się z podstawowych zasad mechaniki (zasady prac przygotowanych, zasady D'Alemberta, zasady Gaussa, Hamiltona itd.). Układy ciągłe charakteryzowane są nieskończoną liczbą stopni swobody, nieskończoną liczbą częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci tych drgań. Układy dyskretne mają skończoną liczbę stopni swobody, częstości drgań własnych i postaci drgań⁶⁾. Przy dyskretyzacji metodami drugiej grupy wybiera się pewną określoną liczbę postaci drgań i odpowiadających im częstości własnych, pozostałe zaś zaniedbuje się, ustalając w ten sposób liczbę stopni swobody układu. Obie grupy metod prowadzą więc do podobnych wyników: liczba stopni swobody zostaje ustalona, a co za tym idzie, ustalona zostaje liczba postaci drgań i częstości własnych. Wprowadzenie idealizacji tego typu powinno być poprzedzone analizą, wyjaśniającą jakie wartości częstości będą miały okresowe oddziaływania zewnętrzne, gdyż widmo częstości zewnętrznych wymuszeń nie powinno pokrywać się z widmem odrzuconych częstości własnych.

Przy idealizacji prowadzonej metodami pierwszej grupy, podział elementów na bryły nieodkształcalne i bezinercyjne elementy sprężyste jest tym dokładniejszy, im większe są różnice wartości sztywności elementów «bezinercyjnych» i elementów «nieodkształcalnych» oraz im większa jest różnica wartości masy tych elementów. Całkowite pominięcie masy elementów sprężystych w praktyce jest uzasadnione⁷⁾ w przypadkach, gdy ich masy są ponad trzykrotnie mniejsze od masy brył. Gdy taka nierówność nie jest spełniona, stosuje się na ogół następane przybliżenie: do masy brył dodaje się pewną część masy elementów sprężystych i w dalszych rozważaniach traktuje się je jako elementy pozbawione masy. W celu obliczenia wartości tej części, można zastosować jedną z metod przybliżonych (metody energetyczne, metody oparte na porównywaniu częstości drgań własnych i inne)

Idealizacja polegająca na podziale układu na bryły nieodkształcalne i bezinercyjne elementy sprężyste jest tym dokładniejsza, im mniejsze są wymiary bryły w stosunku do długości stojącej fali sprężystej, która zawiera najmniejszą liczbę węzłów. Te ostatnie zależą od częstości drgań oraz od prędkości rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w danym ośrodku.

Niekiedy bryły nieodkształcalne w modelu dyskretnym traktuje się jako masy skupione (punkty materialne).

Dyskretyzacją można obejmować cały rozpatrywany układ mechaniczny lub jego części, pozostałe zaś części (składające się na ogół z prostych elementów, jak struny, belki, płyty, membrany) rozpatrywać jako układy ciągłe, połączone w określony sposób z innymi, dyskretnymi elementami układu.

W praktyce decyzja, czy dany układ potraktować jako ciągły czy też jako dyskretny o wybranej liczbie stopni swobody, zależy od argumentów uzasadniających z jednej strony

⁶⁾ Dotyczy to układów liniowych i quasi-liniowych.

⁷⁾ Błąd wartości najniższych częstości własnych rzędu kilku procent.

dokładność, a z drugiej zaś korzyść. Przyjęta liczba stopni swobody zdyskretyzowanego układu i sposób rozmieszczenia zdyskretyzowanych brył, powinny być uzasadnione nie tylko geometrycznymi własnościami układu, lecz głównie wynikami wstępnej analizy dynamicznej. (Dla układów liniowych i quasi-liniowych — zestawienie widm częstości własnych i częstości wymuszeń zewnętrznych).

Przy przeprowadzaniu procedury dyskretyzacji układu należy również pamiętać, że dyskretyzuje się jednocześnie obciążenia (wymuszenia) zewnętrzne, zamieniając obciążenia rozłożone — skupionymi siłami i momentami par sił. Przy wyborze liczby stopni swobody należy zatem kierować się również charakterem obciążeń zewnętrznych przyłożonych do układu.

Opisany wyżej formalizm dyskretyzacji stanowi podstawę powszechnie obecnie stosowanej metody elementów skończonych. Wraz z postępem elektronicznej techniki obliczeniowej metoda ta zyskuje coraz większą popularność i coraz szersze zastosowania.

Następnym etapem modelowania jest formalizacja procesów przebiegających w układzie, która prowadzi do otrzymania *m o d e l u m a t e m a t y c z n e g o*.

Na ogół oba etapy modelowania są ze sobą ściśle powiązane. Przy budowaniu modelu nominalnego dysponujemy dowolnością w podejmowaniu decyzji co do jego struktury. Model nominalny nie jest pojęciem jednoznacznym w stosunku do danego obiektu rzeczywistego. Natomiast wybór modelu nominalnego, związany z wyborem zmiennych opisujących stan układu, już w znacznym stopniu determinuje postać modelu matematycznego. Oczywiście adekwatność wybranego modelu do układu rzeczywistego, a więc i prawidłowość uzyskiwanych wyników teoretycznych można zweryfikować jedynie doświadczalnie — na obiekcie rzeczywistym lub, na symulującym obiekcie rzeczywisty modelu laboratoryjnym.

Postać modelu matematycznego powinna być taka, aby istniała możliwość uzyskania rozwiązania⁸⁾ o żądanej dokładności. Niezbędność idealizacji na etapie budowania modelu nominalnego wywołana jest nie tylko koniecznością uzgodnienia postawionego celu badań z możliwościami obliczeniowymi, lecz i niezbędną otrzymania dostatecznie prostych i łatwych do zanalizowania zależności, zabezpieczających żadaną dokładność. Przedstawienie rzeczywistości «prawie dokładnie» wymaga olbrzymiej, z reguły nieosiągalnej wiedzy o rzeczywistości na etapie idealizacji i prowadzi następnie do ogromnych komplikacji matematycznych na etapie formalizacji. Trzeba zatem szukać kompromisu między dokładnością modelu a nakładami pracy przy jego budowie i rozwiązywaniu.

Przy budowaniu modelu matematycznego korzystamy głównie z praw i aksjomatów fizyki, zapisanych w przyjęty, sformalizowany sposób. Korzystamy m.in. z zależności wyrażających równowagę, opisujących bilans sił, wydatków, przepływów, z równań ciągłości, z zależności geometrycznych.

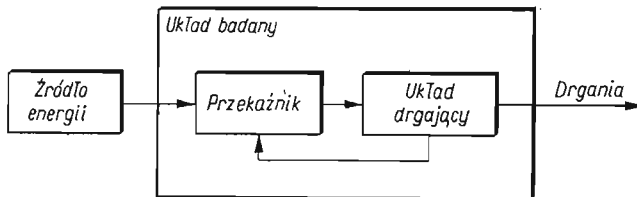
Wybór zmiennych (poszukiwanych zmiennych stanu) zależy zarówno od struktury modelu, jak i od postawionego celu badań. Wybrane zmienne powinny — z jednej strony zabezpieczać wystarczająco wierny opis interesujących nas zjawisk i procesów przebiegających w układzie, z drugiej strony zaś, powinny umożliwiać otrzymanie możliwie prostych zależności matematycznych. «Prostota» tych ostatnich jest oczywiście pojęciem względnym,

⁸⁾ «Rozwiązaniem» nazywamy tu osiągnięcie celu, któremu służyło modelowanie; w przypadku układów mechanicznych najczęściej chodzi o znalezienie charakterystyk ruchu.

gdyż możliwości ich rozwiązywania, uzależnione są od aparatu matematycznego i środków liczących, będących aktualnie w dyspozycji.

W przypadku układów fizycznych (mechanicznych, elektrycznych itd.) model układu charakteryzowany jest przez swą strukturę: składa się z elementów będących ze sobą w określonych relacjach. W sposób formalny stan układu (modelu) opisywany jest przez zbiór wybranych zmiennych stanu, które na ogół są funkcjami czasu. Proces funkcjonowania tego układu opisywany jest przez zmiany wartości zmiennych z biegiem czasu.

W zależności od celu badań, przy uwzględnieniu budowy i sposobu funkcjonowania układu, po przeprowadzeniu operacji wyizolowania układu z otaczającego go środowiska, wyodrębnia się wejście i wyjście układu (modelu). Sygnały wejściowe przedstawiają zbiór czynników zewnętrznych, które wymuszają, ogólnie biorąc, funkcjonowanie układu. Jako sygnały wyjściowe, przyjmuje się pewne procesy lub zmiany sytuacji, z reguły te, poprzez które układ oddziałuje na otoczenie. Na taki układ reprezentujący rzeczywistość działają



Rys. 1

ponadto zakłócenia, będące odzwierciedleniem zakłóceń, występujących w idealizowanej rzeczywistości. Jako przyczyny zakłóceń traktuje się również wszystkie uproszczenia dokonywane świadomie lub nieświadomie podczas idealizacji. Model matematyczny układu przedstawia zbiór relacji wiążących zmienne stanu, wyznaczających charakterystyki stanu układu (a poprzez nie — sygnałów na wyjściu), w zależności od parametrów układu, sygnałów wejściowych, warunków początkowych i czasu. Proces funkcjonowania układu (modelu) opisywany jest przez zmiany z biegiem czasu zmiennych stanu pod wpływem, w ogólności zmiennych, sygnałów wejściowych.

Warto w tym miejscu powiedzieć nieco o strukturze modeli układów, z którymi najczęściej mamy do czynienia.

Jedynymi z najczęściej spotykanych układów mechanicznych (również układów elektrycznych i innych) są układy samowzbudne [17]. Schemat takiego układu przedstawiony został na rys. 1. Dostarczana do układu energia (na ogół w sposób ciągły, ze stałą mocą) zostaje przekształcona przez element układu nazywany tu umownie przekładnikiem. Przekładnik sprzężony jest z pozostałymi elementami układu poprzez pętlę sprzężenia zwrotnego, którym regulowane jest jego działanie. Przy odpowiednim zbilansowaniu energii, w układzie takim wzbudzone są niegasnące drgania. Przekładnikami energii mogą być np. zawory dozujące okresowe dostarczanie energii do układów (np. wahadło z kotwicą, współpracujące z obciążonym kółkiem wychwytywym w mechanizmach zegarowych), tarcie suche (np. w wahadle Frouda), tłumienie materiałowe (np. w wirnikach — przekształcające energię ruchu obrotowego w energię drgań giętnych wału) i szereg innych. Jeżeli energia dostarczana jest do określonych elementów układu w sposób bezpośredni —

mówimy o układzie samowzbudnym ze wzbudzeniem bezpośrednim. Może mieć miejsce również przypadek, w którym energia jest dostarczana drogą okresowych zmian wartości parametrów układu (np. współczynnik sprężystości w okresowo rozciąganej strunie lub zmienna długość wahadła-huśtawka), przy założeniu, że przy dokonywaniu tych zmian zostaje wykonana praca⁹⁾. W rezultacie takiego oddziaływania układ pobudzany jest do drgań. W odróżnieniu od poprzednich, tego typu układy samowzbudne nazywa się układami ze wzbudzeniem parametrycznym.¹⁰⁾ W układach nie wykazujących cech samowzbudności, drgania okresowe mogą być wzbudzane jedynie oddziaływaniem okresowych wymuszeń zewnętrznych (układy pasywne).

Jak już wspomniano wyżej, dla obiektów mechanicznych głównym zjawiskiem, które zwykle stanowi cel badań jest ruch i wszystkie związane z ruchem charakterystyki. Inne zjawiska fizyczne — elektryczne, magnetyczne, ciepłe czy chemiczne, zachodzące w układzie, czy też w otaczającym go środowisku, interesują nas tylko pod kątem wywieranego przez nie wpływu na zmiany ruchu.

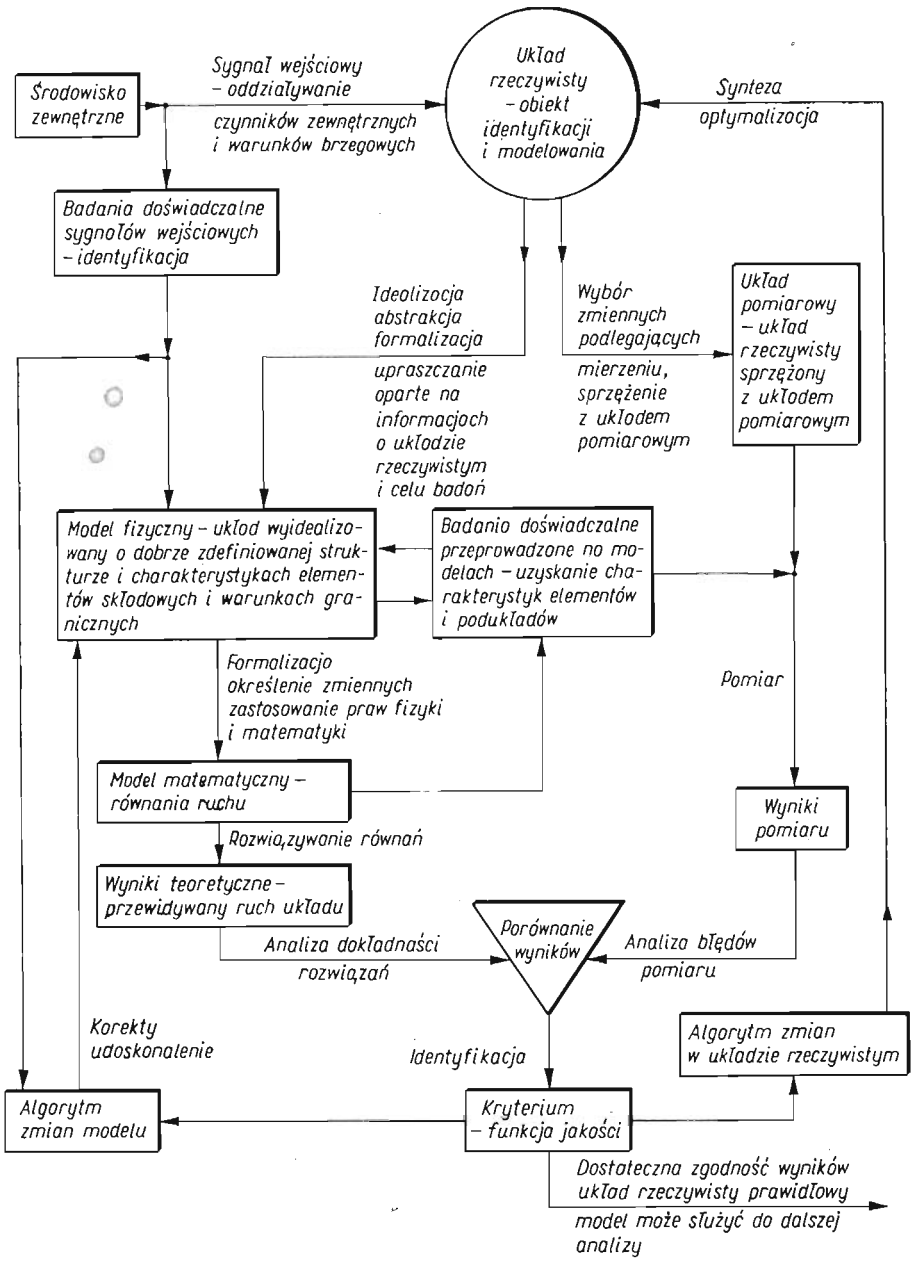
Schemat logiczny zadania, którego rozwiązanie stanowi cel budowania modelu, jest następujący: znane są sygnały wejściowe układu (zaburzenie zewnętrzne) i jedna z dwóch wielkości: struktura lub sygnały wyjściowe. Poszukuje się tej drugiej wielkości. Gdy znana jest struktura — zadanie jest zadaniem analizy, gdy znane są sygnały wyjściowe — mamy zadanie syntezy, na ogół dużo trudniejsze do rozwiązania.

Problematykę modelowania, przedstawioną wyżej, można rozpatrywać z punktu widzenia badań o p t y m a l n y c h. Zagadnienie podstawowe można sformułować następująco: poszukuje się rozwiązania optymalnego ze względu na dane kryterium i operując w danym, ograniczonym zakresie zmienności funkcji i parametrów, które zostały ujęte w modelu matematycznym układu. Zadania optymalizacyjne na ogół stawiane są łącznie z zadaniami syntezy, przy projektowaniu lub modyfikacji urządzeń. W przypadku układów mechanicznych, kryteria optymalizacyjne lub wskaźniki jakości układu mogą być natury technicznej (kombinacje funkcji wymiarów, ciężaru, dokładności, stabilności działania, nieczułości na zaburzenia, bezpieczeństwa, niezawodności, wydajności itp.) lub natury ekonomicznej (kombinacje funkcji ceny, zysku, poziomu inwestycji, spożycia, komfortu, funkcjonalności itp.). Sam proces modelowania również może być potraktowany jako zadanie optymalizacyjne: zbudować model obiektu, który w «najlepszy» sposób będzie opisywać jego zachowanie się, przy uwzględnieniu ograniczeń stawianych przez możliwości obliczeniowe.

Ogólny kompleksowy schemat modelowania, identyfikacji oraz syntezy układu mechanicznego można przedstawić w postaci pokazanej na rys. 2. Układ rzeczywisty, będący obiektem modelowania czy identyfikacji, może przedstawiać jeden wybrany element lub też układ sprzężanych elementów — mechanicznych, elektrycznych, hydraulicznych i innych. W terminach funkcjonalności, układ taki składać się może z obwodów napędowych roboczych transmisyjnych czy regulacyjnych.

⁹⁾ Warunek ten spełniony jest tylko wtedy, gdy zmiany parametrów przebiegają z odpowiednią częstością, przy zachowaniu odpowiedniej fazy względem ruchu układu.

¹⁰⁾ Modelami matematycznymi układów samowzbudnych o bezpośrednim wzbudzeniu są nieliniowe równania różniczkowe (często automatyczne); modelami układów ze wzbudzeniem parametrycznym są równania liniowe lub nieliniowe o zmiennych współczynnikach.



Rys. 2

W zakończeniu należy podkreślić wagę konieczności przeprowadzania gruntowych kompleksowych badań procesów dynamicznych, przebiegających w agregatach maszynowych. Badania takie mogą być dokonywane jedynie w oparciu o właściwie zbudowane modele przy uwzględnieniu specyfiki systemowego ujęcia zagadnienia.

Literatura cytowana w tekście

1. R. BIGRET, *Modélisation et caractérisation*, B 575, Société Rateau-Schneider, Seine 1973.
2. В. А. ВЕНКОВ, *Избранные методологические вопросы моделирования*, Вопросы Философии, II, 1964.
3. W. SZTOF, *Modelowanie i filozofia*, PWN, Warszawa 1971.
4. Н. П. БУСЛЕНКО, *Моделирование сложных систем*, Наука, 1968.
5. O. LANGE, *Calość i rozwój w świetle cybernetyki*, PWN, Warszawa 1962
6. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Certain properties of mechanical models of structures*, Arch. Mech. Stos., 11, 2 (1959).
7. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Pewne uwagi na marginesie jakościowej teorii drgań nieliniowych*, Arch. Autom. Telemek., 8, 1 (1963).
8. J. M. SKOWROŃSKI, *Nonlinear mechanical lumped systems*, Zagadn. Drgań Nielin., 7 (1966).
9. A. MUSZYŃSKA, *O pewnych zagadnieniach związanych z modelowaniem układów mechanicznych*, Zagadn. Drgań Nielin., 9 (1968).
10. W. KUROWSKI, *An introduction to the dynamic diagnostics of mechanisms*, Zagad. Drgań Nielin., 17 (1976).
11. G. LALLEMENT, *Modyfikacje własności dynamicznych układów liniowych*, Dynamika Maszyn, Ossolineum, 1974.
12. *System Identification of Vibrating Structures*, ed. by W. D. PILKEY, R. COHEN, N. York 1972.
13. *Modele matematyczne i identyfikacja procesów*, Wyd. PAN, Ossolineum, 1972.
14. D. GRAUPE, *System Identification*, VRN, 1972
15. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
16. R. H. CANNON, Jr., *Dynamics of Physical Systems*, McGraw-Hill Book Comp., N. Y. 1967.
17. А. А. ХАРКЕВИЧ, *Автоколебания*, Москва 1953.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа посвящена проблеме моделирования механических систем. Рассматриваются такие вопросы: построение номинальной и математической модели, способы дискретизации, роль диагностических экспериментальных исследований и идентификации, проблемы анализа, синтеза и оптимизации. Подчеркивается необходимость проведения тщательного комплексного исследования динамических процессов, протекающих в системах.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF MODELLING OF MECHANICAL SYSTEMS

In the paper discussed are several problems of modelling of mechanical systems such as: construction of nominal and mathematical models, discretization problems, the role of experimental diagnostic and identification tests, the problems of analysis, synthesis and optimization. The role of basic investigations of dynamic processes occurring in mechanical systems is stressed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 września 1975 r.