

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE NIERÓWNOMIERNIE NAGRZANYCH TARCZ WIRUJĄCYCH
Z UWAGI NA NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTĄ I GRANICZNĄ

TADEUSZ LISZKA, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Przy doborze optymalnego profilu tarczy kołowo-symetrycznej założymy bądź spełnienie warunków równomiernej wytrzymałości w całej tarczy (zakres sprężysty), bądź też całkowite uplastycznienie tarczy (zakres plastyczny). Warunki te — przy przyjęciu w obu wariantach tej samej hipotezy wytrzymałościowej — są określone równaniami identycznymi, ewentualnie z dokładnością do stałej, uwzględniającej współczynnik bezpieczeństwa oraz możliwe rozróżnienie granicy sprężystości i granicy plastyczności. Istotna różnica polega tu natomiast na konieczności spełnienia w zakresie sprężystym równania nierozdzielności wyrażonego poprzez naprężenia w oparciu o prawo Hooke'a, podczas gdy, przy założeniu idealnej plastyczności może być ono zawsze spełnione, niezależnie od rozkładu naprężeń (wobec zmienności modułu w równaniach fizycznych).

Kształtowanie z uwagi na nośność graniczną wykazuje więc w tym przypadku w sensie rachunku wariacyjnego o jeden «stopień swobody» więcej, jednak dla sprawdzenia poprawności rozwiązania należy wykazać, że w każdym punkcie ciała moc rozpraszana w stanie granicznym jest nieujemna. W większości przypadków wirujących tarcz kołowo-symetrycznych ten ostatni warunek nie budzi wątpliwości.

Ponadto zakładamy, że schemat plastycznego zniszczenia nie jest poprzedzony dekohezją (por. [18]).

Przy założeniu izotropii materiału sam warunek równomiernej wytrzymałości, względnie warunek plastyczności, można tu sformułować dwojako [20]. W sensie węższym można przez ten warunek rozumieć podwójną równość

$$(1.1) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \begin{cases} \sigma_{0+} \\ -\sigma_{0-} \end{cases}$$

gdzie σ_r , σ_φ są naprężeniami promieniowymi i obwodowymi w tarczy, a σ_{0+} i σ_{0-} są wartościami granicy sprężystości lub plastyczności dla czystego rozciągania i ściskania.

W sensie szerszym zapisujemy go w ogólniejszej postaci

$$(1.2) \quad \sigma_{\text{red}} = \sigma_0,$$

gdzie σ_{red} jest naprężeniem zastępczym według przyjętej hipotezy wytrzymałościowej.

Równanie (1.1) pozostaje słuszne dla każdej hipotezy wyteżeniowej, natomiast warunek (1.2), będąc ogólniejszym, wymaga jednak jej sprecyzowania, a zatem ograniczenia się do pewnej klasy materiałów.

Klasyyczne kształtowanie w oparciu o (1.1) (np. podane przez KACZANOWA [14] rozwiązanie dla tarczy niejednorodnej) kryje w sobie jednak niebezpieczeństwo dwojakiego rodzaju:

— przy kształtowaniu na nośność sprężystą rozwiązanie może być błędne, ponieważ może nie spełnić równania nierozdzielności,

— przy kształtowaniu na nośność graniczną, gdzie warunek nierozdzielności może być spełniony niezależnie, rozwiązanie może nie być optymalne, ponieważ wykorzystując warunek (1.2) można otrzymać rozwiązanie lepsze w sensie przyjętego kryterium.

Optymalne rozwiązanie mogłoby być również uzyskane przy założeniu

$$(1.3) \quad \sigma_{red} \leq \sigma_0,$$

jednak rozwiązania takie nie są autorom znane dla profili opisanych funkcjami klasy C^1 i nie będą przedmiotem niniejszej pracy.

Rozwiązania z wykorzystaniem warunku (1.2) pozwalają również na swobodniejszy wybór warunków brzegowych (np. obciążeń brzegów tarczy pierścieniowej), które przy wykorzystaniu warunku (1.1) praktycznie wynikają z optymalnego rozwiązania.

Kształtując w oparciu o (1.1) (warunek w sensie węższym) tarczę jednorodną bez wpływu temperatury [HUBER [3], KRZYŚ i ŻYCZKOWSKI [9], RANTA MATTI [13] — rozwiązanie podane później, wzór (6.2)] otrzymuje się rozwiązanie optymalne z uwagi na nośność sprężystą, gdyż łatwo stwierdzić, że równanie nierozdzielności pozostaje wtedy spełnione. Wykorzystując szerszy warunek (1.2) otrzymuje się rozwiązanie ogólniejsze, które jednak w szczególnych przypadkach (np. dla tarczy pełnej) pokrywa się z powyższym.

Rozwiązania takie dla tarcz niejednorodnych z uwzględnieniem wpływu temperatury, przy zastosowaniu hipotez wyteżeniowych HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO i TRESKI-GUESTA, rozpatrywali GONTAROWSKIJ i CZEBAJEWSKIJ [4], IGNATIENKO [5], KAPKOWSKI [8] oraz KAPKOWSKI i ŁUKASIEWICZ [6, 7]. RANTA MATTI [13] podał pewne oszacowanie błędu wynikającego z przybliżonego założenia płaskiego stanu naprężenia.

Zbliżone rozwiązania można otrzymać zakładając schodkowy profil tarczy [16] lub będący funkcją odcinkowo liniową [1].

Cele obecnej pracy można streścić następująco:

1. Uzyskanie rozwiązań dla parabolicznego warunku plastyczności typu BURZYŃSKIEGO — STASSI D'ALIA,¹⁾ uogólniającego warunek HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO oraz ocena zakresu stosowalności uzyskanych rozwiązań.

2. Zbadanie problemu tożsamości rozwiązań uzyskanych w zakresie sprężystym i plastycznym oraz ocena dodatkowego zysku na materiale przy kształtowaniu na nośność graniczną, w przypadku braku takiej tożsamości.

¹⁾ Hipotezę paraboliczną, stanowiącą szczególnie przypadek trójparametrowej hipotezy Burzyńskiego formułowało później niezależnie wielu innych autorów (por. Życzkowski [19]); wiązanie jej przez nas z nazwiskami Burzyńskiego i Stassi d'Alia jest czysto umowne.

2. Przyjęte założenia

2.1. Płaski, kołowo-symetryczny stan naprężenia.

2.2. Małe przemieszczenia promieniowe.

2.3. Materiał izotropowy

a) idealnie sprężysty lub

b) idealnie plastyczny,

co odpowiada badaniu nośności sprężystej lub granicznej.

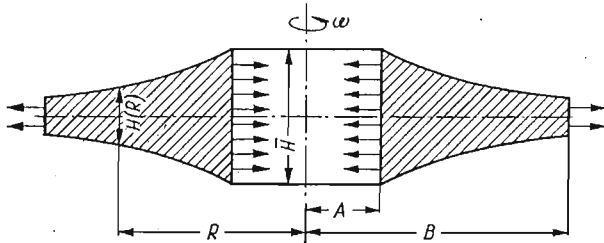
2.4. Równanie hipotezy wyężeniowej

$$(2.1) \quad -\sigma_0^2 \kappa - \sigma_0 (\kappa - 1) (\sigma_r + \sigma_\varphi) + (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi) \leq 0, \quad \kappa = \sigma_{0-} / \sigma_{0+},$$

przechodzącej w przypadku $\kappa = 1$ w hipotezę HMH

$$(2.2) \quad -\sigma_0^2 + (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi) \leq 0$$

jest spełnione w formie równości w całej objętości tarczy.



Rys. 1

2.5. Granica sprężystości (lub plastyczności) σ_0 , moduł sprężystości E i gęstość materiału γ/g są znanymi funkcjami temperatury T i promienia tarczy R .

2.6. Kołowo symetryczny, płaski rozkład temperatury.

2.7. Współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej α , moduł Poissona ν oraz stała κ nie zależą od temperatury i promienia.

3. Stosowane wielkości bezwymiarowe

$r = R/B$ bezwymiarowy promień,

$\beta = A/B$ wewnętrzny promień tarczy,

$0 \leq \beta \leq r \leq 1$,

$h(r) = H(R)/\bar{H}$ bezwymiarowy profil tarczy,

$s_0(r) = \sigma_0(r)/\bar{\sigma}_0$ bezwymiarowa granica plastyczności,

$s_r = \sigma_r/\bar{\sigma}_0$
 $s_\varphi = \sigma_\varphi/\bar{\sigma}_0$ } bezwymiarowe naprężenia,

$w = \frac{\gamma \omega^2 B^2}{g \bar{\sigma}_0}$ «wirowanie tarczy» (bezwymiarowa siła odśrodkowa),

$v = \int_{\beta}^1 h r dr = \frac{V}{2\pi B^2 \bar{H}}$ bezwymiarowa objętość tarczy, (V objętość tarczy),

Bi liczba Biota,

$a = \frac{3\alpha}{\bar{E}\bar{\sigma}_0\bar{T}(1+\nu)}$ bezwymiarowy współczynnik rozszerzalności liniowej materiału

tarczy,

$e = E/\bar{E}$ bezwymiarowy moduł sprężystości,

$t = T/\bar{T}$ bezwymiarowa temperatura,

$C_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ stałe całkowania,

$(\cdot)' = \partial/\partial r(\cdot)$, $(\cdot)^{\cdot} = \partial/\partial t(\cdot)$,

(-) oznacza pewną ustaloną wartość danej wielkości, np. maksymalną. Jej przyjęcie nie wpływa w sposób istotny na wyniki rozważań. Z dowolności przyjęcia tych wartości wynika niemożność uwzględnienia ograniczeń technologicznych (typu $H_1 \leq H \leq H_2$) za pomocą takich wielkości bezwymiarowych. W szczególności dla tarczy jednorodnej o stałej temperaturze wygodnie jest przyjąć $t \equiv e \equiv s_0 \equiv 1$.

4. Podstawowe równania

Równanie równowagi dla tarczy wirującej o zmiennej grubości można więc zapisać w postaci bezwymiarowej następująco:

$$(4.1) \quad h'rs_r - hs_r - hrs_r' + hs_\varphi + hwr^2 = 0.$$

Dla zastosowanej hipotezy wyężeniowej łatwo wykazać słuszność następującej parametryzacji

$$(4.2) \quad \begin{aligned} s_r &= \left[\kappa_1 \left(\cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - (1 - \kappa) \right] s_0, \\ s_\varphi &= \left[\kappa_1 \left(\cos \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - (1 - \kappa) \right] s_0, \end{aligned}$$

gdzie $\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - \kappa + 1}$.

Jest to pewne uogólnienie parametryzacji NADAI'A-SOKOŁOWSKIEGO dla $\kappa \neq 1$. Po jej wykorzystaniu równanie (4.1) można zapisać w postaci:

$$(4.3) \quad h' = h \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \xi - r \left(\sin \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \xi \right) \left(\xi' + \frac{s_0'}{s_0} + t' \frac{s_0'}{s_0} \right) - w_1 r^2}{r \left[\left(\cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) - \kappa_2 \right]}$$

gdzie $w_1 = w/\kappa_1$, $\kappa_2 = (1 - \kappa)/\kappa_1$.

Przy kształtowaniu ze względu na nośność sprężystą do wyznaczenia funkcji $\xi(r)$ służy równanie nierozdzielności

$$(4.4) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi + r\varepsilon_\varphi'$$

wiążące ze sobą odkształcenia promieniowe i obwodowe (ε_r i ε_φ).

Po podstawieniu do (4.4) prawa Hooke'a

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (s_r - \nu s_\varphi) + \alpha t, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\bar{\sigma}_0}{E} (s_\varphi - \nu s_r) + \alpha t \end{aligned}$$

i wykorzystaniu (4.2) otrzymuje się ostatecznie

$$(4.6) \quad \xi' = \frac{2}{r} \frac{\sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi} + \left[\frac{s'_0}{s_0} - \frac{e'}{e} + t' \left(\frac{\dot{s}_0}{s_0} - \frac{\dot{e}}{e} \right) \right] + \frac{\mu(\cos \xi - \kappa_2) + \sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi} + \frac{at'}{s_0 e} \cdot \frac{1}{\mu \sin \xi - \cos \xi},$$

gdzie $\mu = \sqrt{3} \frac{1-\nu}{1+\nu}$.

Dla prostego przypadku nienagranej tarczy jednorodnej ($t = s_0 = e = 1$) równanie to redukuje się do

$$(4.7) \quad \xi' = \frac{2}{r} \frac{\sin \xi}{\mu \sin \xi - \cos \xi}.$$

Przy kształtowaniu ze względu na nośność graniczną spełnienie równania (4.6) nie jest wymagane. Swobodną dotychczas funkcję $\xi(r)$ należy wtedy przyjąć tak, aby spełnić warunek

$$(4.8) \quad v = \int_{\beta}^1 h r dr = \min,$$

czyli zminimalizować objętość tarczy.

Równanie (4.8) z warunkiem (4.3) prowadzi do równania Eulera-Lagrange'a²⁾

$$(4.9) \quad \begin{aligned} -2\sqrt{3} \sin \xi [\kappa_2(\cos \xi + \kappa_3)] - wr^2(\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) \cos \xi + \\ + [\kappa_2(\cos \xi + \kappa_2) + \kappa_3](\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) r \cdot s'_0/s_0 - \\ - \frac{1}{2} wr^3(\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi)^2 \left(\frac{w'}{w} + \frac{s'_0}{s_0} \right) = \\ = \xi' r [\sqrt{3} \kappa_2(1 + \kappa_2 \cos \xi) - \kappa_2^2 \sin \xi + \kappa_3(\sqrt{3} \cos \xi - \sin \xi)], \end{aligned}$$

gdzie $s_0 = s_0(r)$, $w = w(r)$, $\kappa_3 = \kappa/\kappa_1$.

Równanie to dla tarczy jednorodnej ($s'_0 = w' = 0$), przy $\kappa = 1$ upraszcza się do postaci:

$$(4.10) \quad \xi' = \frac{2\sqrt{3} \sin \xi + wr^2(\cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) \cos \xi}{r(\sin \xi - \sqrt{3} \cos \xi)}.$$

Warto zauważyć, że dla nienagranej tarczy jednorodnej, bez wirowania, wykonanej z materiału nieściśliwego, prawa fizyczne (prawo Hooke'a i prawo płynięcia plastycznego) są stowarzyszone z warunkiem HMH. Obowiązują wtedy twierdzenia podane przez

² Patrz Dodatek A.

SAVE'A [15], na mocy których kształtowanie na nośność sprężystą i na nośność graniczną dają identyczne wyniki, zatem równania (4.7) i (4.10) stają się (jak łatwo sprawdzić) identyczne.

Ogólne równania (4.6) i (4.10) wprawdzie nie są identyczne, ale w praktyce zbliżone, co wykorzystano później w rozwiązaniu numerycznym.

5. Ustalenie warunków brzegowych

Kształtowanie tarczy w oparciu o równania (4.3) oraz (4.6) lub (4.9) polega więc na wyznaczeniu funkcji $\xi(r)$ i $h(r)$ przy danych pozostałych wielkościach oraz danych obciążeniach (siłach promieniowych) na brzegach zewnętrznym i wewnętrznym:

$$(5.1) \quad p(r) = h(r) s_r(r) \Big|_{r=1}^{r=\beta}$$

Siła promieniowa na brzegu zewnętrznym $p(1)$ wynika np. z obciążenia wieńcem łopatek i jest przy projektowaniu wielkością zadaną. Obciążenie $p(\beta)$ jest jednak zwykle związane z przemieszczeniem ze względu np. na konieczność zapewnienia zgodności odkształceń wału i osadzonej na nim tarczy. Postać odpowiedniego warunku brzegowego zależy zwykle od wielu czynników technologicznych (np. luzy lub wcisk) nie rozpatrywanych tutaj, toteż obciążenie $p(\beta)$ traktować będziemy również jako wielkość daną. Często przyjmuje się $p(\beta) = 0$, [4, 5, 8], jednak prowadzi to zazwyczaj do nieograniczonej wartości $h(\beta)$ ³⁾.

W przypadku tarczy pełnej warunek dla $r = 0$ ma inny charakter:

$$(5.2) \quad \xi(0) = 0, \quad \pm\pi, \dots$$

Równanie to wynika z zachodzącej tu równości naprężeń obwodowych i promieniowych

$$(5.3) \quad s_\varphi(0) = s_r(0).$$

Kształt tarczy i wyniki projektowania zależą od przyjętych funkcji $s_0(r, t)$, $e(r, t)$, $t(r)$. W celu przeprowadzenia szczegółowych rozważań założymy

$$(5.4) \quad s_0 \equiv e \equiv t \equiv \kappa = 1.$$

Założenia te będą obowiązywać w dalszej części pracy, o ile nie będzie wyraźnie zaznaczone inaczej.

6. Tarcza pełna

6.1. Nośność sprężysta tarczy. Równanie (4.7) ma rozwiązanie zamknięte

$$(6.1) \quad r = \frac{C_1 \exp\left(\frac{\mu}{2} \xi\right)}{|\sin \xi|^{1/2}} \text{ lub}$$

$$(6.2) \quad \xi = 0, \quad \pm\pi, \dots$$

³ Patrz Dodatek B.

Warunki brzegowe dla tarczy pełnej (5.2) spełnia jedynie równanie (6.2), co odpowiada klasycznemu kształtowi tarczy o równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (tu sens szerszy sprowadza się do tego jedyne rozwiązanie)

$$(6.3) \quad h(r) = \exp(\mp wr^2/2),$$

$$(6.4) \quad p(1) = \pm \exp(\mp w/2) \neq 0.$$

(Dolne znaki w równaniach odnoszą się do przypadku obwodowego ściskania tarczy — nieistotnego w praktyce).

6.2. Nośność graniczna tarczy. Warunek (5.2) dla równania (4.10) prowadzi do symbolu nieoznaczonego 0/0. Dla umożliwienia rozwiązania numerycznego funkcje $h(r)$ i $\xi(r)$ rozwinięto w okolicy $r = 0$ w szeregi

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \xi(r) &= A_1 r^2 + A_2 r^4 + A_3 r^6 + \dots, \\ \ln[h(r)] &= a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots, \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych szeregów do równań i porównaniu odpowiednich współczynników otrzymano

$$(6.6) \quad \begin{aligned} a_1 &= -\frac{w}{3\sqrt{3}}, & a_2 &= -\frac{w^2}{48\sqrt{3}}, & a_3 &= -\frac{127w^3}{2^7 3^5 \sqrt{3}}, \\ A_1 &= -\frac{w}{4\sqrt{3}}, & A_2 &= \frac{7w^2}{144\sqrt{3}}, & A_3 &= \frac{131w^3}{2^9 3^3 \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Powyższe rozwiązanie posłużyło do wyznaczenia punktu startu dla numerycznego całkowania równań metodą RUNGEGO KUTTY 4 rzędu na komputerze Odra 1204. Wyniki przedstawiono w tabelicy 1 i na rys. 2, gdzie umieszczono dla porównania również tarczę sprężystą [równanie (6.3)].

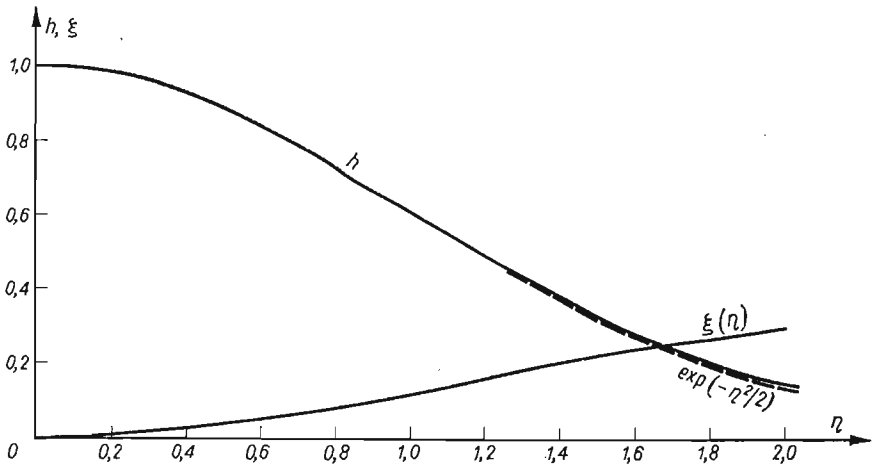
Tabela 1. Tarcza pełna. Rozwiązanie plastyczne i sprężyste

$\eta = r\sqrt{w}$	$\xi(\eta)$	$h(\eta)$ (plast.)	$\exp(\eta^2/2)$ (spręż.)
0	0	1,0000	1,0000
0,2	0,00576	0,9804	0,9802
0,4	0,02242	0,9233	0,9231
0,6	0,04854	0,8357	0,8353
0,8	0,08193	0,7271	0,7261
1,0	0,1201	0,6084	0,6065
1,2	0,1604	0,4900	0,4868
1,4	0,2008	0,3801	0,3753
1,6	0,2394	0,2843	0,2780
1,8	0,2751	0,2051	0,1979
2,0	0,3072	0,1429	0,1353

Tabela 2 zawiera porównanie objętości obu tarcz przy założeniu, że obciążenia na brzegu obu tarcz są takie same i wynoszą $p(1) = 1$. Zysk na kształtowaniu tarczy pełnej w oparciu o nośność graniczną jest tu stosunkowo znaczny i dla $w = 4$ (co odpowiada jeszcze realnym fizycznie wielkościom) wynosi około 19%.

Tablica 2. Porównanie tarczy pełnej plastycznej i sprężystej

w	Tarcza plastyczna		Tarcza sprężysta	
	h_{max}	ν	h_{max}	ν
0,0	1,00	0,500	1,00	0,500
1,0	1,54	0,606	1,65	0,650
2,0	2,44	0,771	2,72	0,859
3,0	3,88	1,005	4,46	1,145
4,0	6,20	1,345	7,40	1,595



Rys. 2

7. Tarcza pierścieniowa

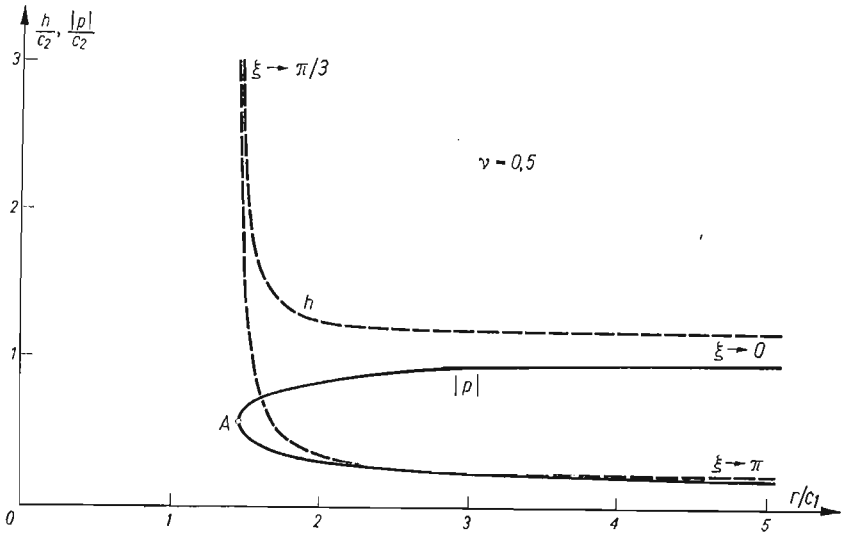
W przypadku tarczy pierścieniowej pozostają słuszne rozwiązania podane poprzednio, lecz są one jedynie szczególnymi przypadkami rozwiązania ogólnego.

Dla tarczy sprężystej, wykorzystując rozwiązanie (6.1), można dla $w = 0$ podać funkcję $h(r)$ w postaci parametrycznej rozwiązując równanie (4.3)

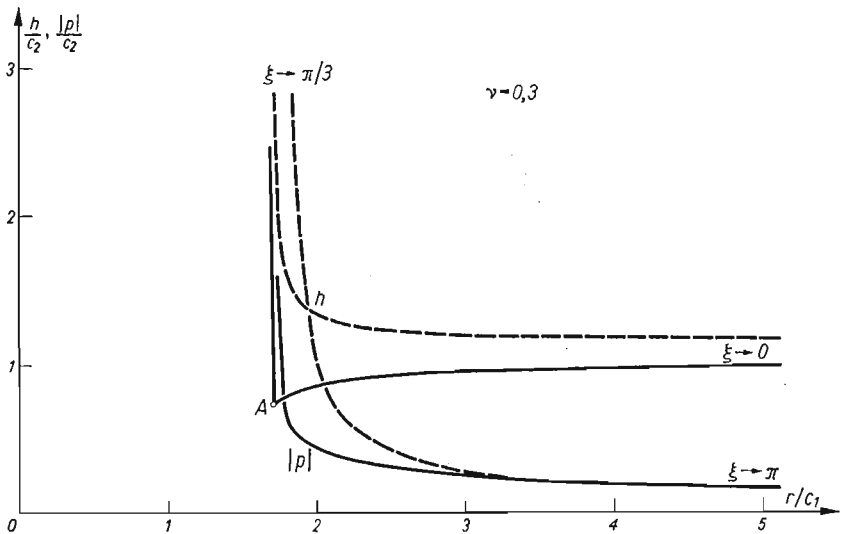
$$(7.1) \quad h = C_2 \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2(1+\nu)} \xi\right)}{\left|\cos\left(\xi + \frac{\pi}{6}\right)\right|^{\frac{3}{2(1+\nu)}}}.$$

Wykresy rozwiązań dla $\nu = 0,5$ oraz $\nu = 0,3$ przedstawiają rys. 3 i 4. Na rysunkach przedstawiono również siłę osiową $p(r)$. Nieograniczony wzrost wartości h i p wynika z osobliwości pojawiającej się w równaniu (4.3) dla $\xi = \pi/3$.

Zamieszczone wykresy służyć mogą do dobierania wartości stałych C_1 i C_2 z warunków brzegowych (5.1). Rysunki zawierają wykresy dwu alternatywnych rozwiązań, toteż należy wybierać odcinki krzywych nie zawierające punktu A . Otrzymane rozwiązanie jest okresowe ze względu na ξ o okresie 2π [rozwiązanie dla $\pi \leq \xi \leq 2\pi$ jest analogiczne do zamieszczonego — różni się jedynie znakiem funkcji $p(r)$].



Rys. 3



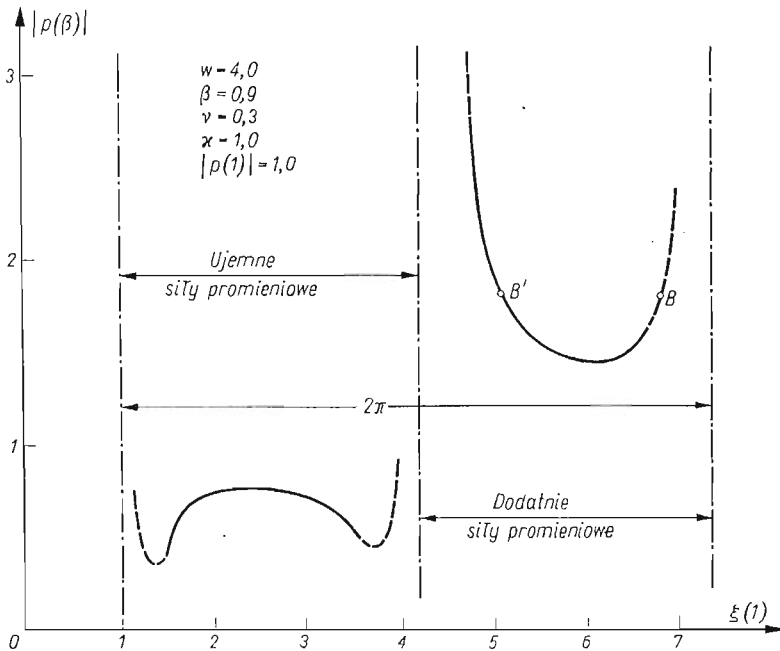
Rys. 4

Na podstawie rys. 3 można stwierdzić, że dla $\nu = 0,5$ stosunek $p(\beta)/p(1)$ musi mieścić się w przedziale $(0,5 \div 3,0)$. Dla $\nu \neq 0,5$ brak jest takich ograniczeń, lecz przekroczenie powyższego zakresu spowoduje znaczne odstępstwa od założonego płaskiego stanu na-

prężenia w wyniku dużych wartości $h'(r)$. Nie można przyjmować obciążeń o przeciwnych znakach ani swobodnego brzegu tarczy, gdyż prowadzi to do nieograniczonego wzrostu $h(r)$ w pewnym punkcie tarczy.⁴⁾

Ze względu na podobieństwo równań rozwiązanie numeryczne, któremu poświęcona będzie następna część pracy, przeprowadzono nie różnicując programów dla nośności sprężystej i nośności granicznej. Całkowanie podstawowego układu równań przeprowadzono za pomocą standardowej procedury «Runge Kutta 4» z biblioteki programów maszyny cyfrowej Odra 1204. Ze względu na występujący tu typ warunków brzegowych («1 + 1») całkowanie przeprowadzono w dwu kolejnych etapach:

1. Przyjmując $p(1) = 1$ i kolejne wartości $\xi(1)$ z przedziału $(0, \pi)$ obliczano $p(\beta)$ dla 6 wartości β . Czas obliczeń dla 30 wartości $\xi(1)$ przy dokładności obliczeń rzędu 10^{-3} (wartości parametrów «eps» i «eta» procedury) wynosił 25–30 min.



Rys. 5

2. Wyznaczenie funkcji $h(r)$ i $\xi(r)$ dla zadanych $p(1)$ i $p(\beta)$ wykorzystując znalezione uprzednio przybliżone punkty startowe dla procedury «regfalsi» służącej do wstrzelania się w dokładną wartość $p(\beta)$. Czas obliczeń przy dokładności 10^{-6} wynosił 4–6 min.

W wyniku działania programu pierwszego otrzymywano wykresy $p(\beta) = f[\xi(1)]$, będące oczywistą informacją o możliwościach dobierania wartości $p(\beta)/p(1)$. Typowy wykres przedstawia rys. 5. Zmiana współczynnika ν lub przyjęcie równań nośności granicznej

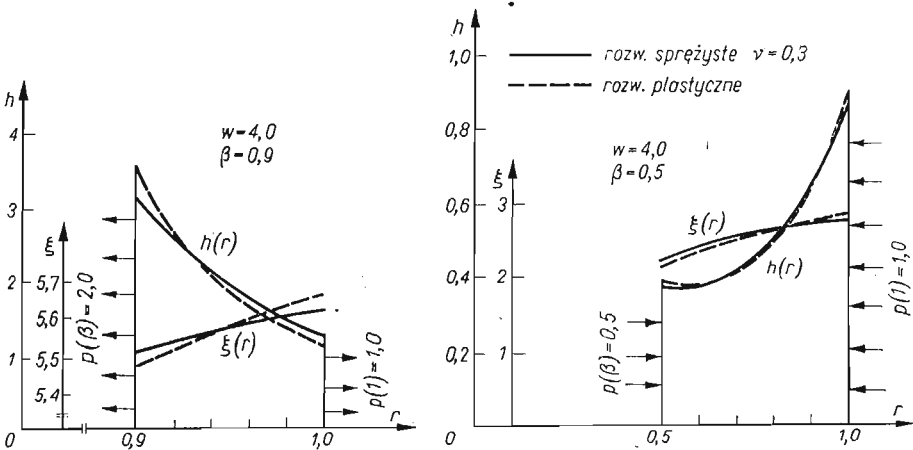
⁴ Szczegółową dyskusję zawiera Dodatek B.

nej powodowało jedynie nieznaczne różnice ilościowe (rzędu kilku %). Z dwu możliwych równoważnych rozwiązań (np. odpowiadających punktom B i B') gałąź odpowiadająca punktowi B' daje rozwiązania o mniejszej objętości tarczy, lecz o większych nachyleniach funkcji $h(r)$ i większej grubości na wewnętrznym brzegu $[h(\beta)]$. W porównaniu z wartościami $p(\beta)/p(1)$ otrzymywanymi z rozwiązania klasycznego (6.3) zakres dopuszczalnych wartości został powiększony, jednak przede wszystkim w górę, co jest zjawiskiem niekorzystnym.

Tablica 3. Objętość tarcz pierścieniowych przy różnych warunkach brzegowych

Lp.	$p(\beta)/p(1)$	β	w	Tarcza sprężysta			Tarcza plastyczna
				$\nu = 0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$	
1	1,5	0,9	1,0	0,218066	0,217832	0,217717	0,217716
2	1,5	0,9	4,0	—	0,103135	—	0,103121
3	1,5	0,75	1,0	0,238141	0,237927	0,237848	0,237837
4	2,0	0,9	4,0	—	0,189136	—	0,189080
5	0,4	0,5	4,0	—	0,201452	—	0,201358
6	0,5	0,75	4,0	—	0,139573	—	0.139417

Teoretycznie wartość $p(\beta)$ można przyjmować dowolnie wielką, jednak obliczenia numeryczne stają się wtedy niedokładne, a w rzeczywistej tarczy zachodzi znaczne odstępstwo od płaskiego stanu naprężenia; toteż linie przerywane na wykresie (rys. 5) przedstawiają przewidywany przebieg krzywych nie mający praktycznego znaczenia. Przeliczone przy-



Rys. 6

kłady kształtowania tarcz zestawione są w tablicy 3, a wykresy $h(r)$ dla przypadków 2 i 5 z tej tablicy przedstawia rys. 6. Zwraca uwagę bardzo niewielki zysk na objętości tarczy dla nośności granicznej — nieporównywalnie mniejszy niż dla tarczy pełnej (tablica 2). Jest to wynikiem innego charakteru warunków brzegowych [równania (5.1) i (5.2)].

8. Porównanie równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym i węższym

Kształtowanie w oparciu o równanie (1.1) (warunek w sensie węższym) odpowiada przyjęciu

$$(8.1) \quad \xi(r) \equiv 0, \quad \pm\pi, \dots$$

zamiast równań (4.6) lub (4.9), które zostają wtedy milcząco pominięte. Wykorzystując równanie (8.1) można scałkować równanie równowagi (4.3)

$$(8.2) \quad h(r) = C_3 s_0 \exp\left(-\int w r s_0^{-1} dr\right).$$

Równanie to, podane przez KACZANOWA [14], może więc dawać nieoptymalne profile tarcz. W pewnych, szczególnych przypadkach kształtowanie w sensie szerszym może jednak dawać identyczne rozwiązanie. Jedynie wtedy rozwiązanie (8.2) jest poprawne.

Warunkiem koniecznym, aby rozwiązanie (8.2) było poprawne w zakresie sprężystym jest spełnienie równania

$$(8.3) \quad \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{e}{s_0} \right) = \frac{at'}{\mu s_0 e},$$

gdzie $s_0 = s_0(r, t)$, $e = e(r, t)$, wynikającego z równania nierozdzielności po podstawieniu (8.1). Z (8.3) wynika więc m.in., że tarcza jednorodna bez wpływu temperatury kształtowana w oparciu o równanie (8.2) będzie przy odpowiednio dobranych warunkach brzegowych optymalna ze względu na nośność sprężystą.

W zakresie plastycznym podstawiając (8.1) do (4.9) otrzymuje się przy $w = \text{const}$, $\kappa = 1$

$$(8.4) \quad -wr + \frac{s_0'}{s_0} - \frac{1}{2} wr^2 \frac{s_0'}{s_0} = 0.$$

Równanie to po możliwym scałkowaniu

$$(8.5) \quad s_0(r) = \frac{c_4}{2 + wr^2}$$

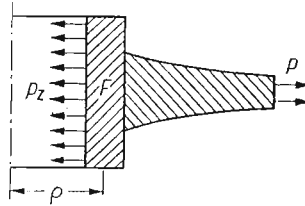
jest warunkiem koniecznym, aby rozwiązanie (8.2) było poprawne przy kształtowaniu na nośność graniczną.

Ze spełnienia jednego z tych równań nie musi jednak wynikać poprawność rozwiązania (8.2), gdyż w rozwiązaniu tym stosunek obciążeń $p(\beta)/p(1)$ jest jednoznacznie wyznaczony i, co za tym idzie, dowolnie wybrane warunki brzegowe dla tarczy pierścieniowej nie muszą być spełnione. Jedynie w przypadku tarczy pełnej, ponieważ warunki brzegowe są inaczej formułowane [równanie (5.2)] spełnienie równań (8.3) lub (8.5) wystarcza dla poprawności rozwiązania (8.2).

9. Połączenie tarczy z pierścieniem

Ze względu na istniejące ograniczenia często zachodzi konieczność projektowania tarczy tylko w części swej objętości spełniającej wyprowadzone powyżej równania. Pozwala to na uniknięcie nieograniczonej wysokości tarczy otrzymanej z powyższych równań

drogą wprowadzenia dodatkowych ograniczeń. Projektując tarczę ze swobodnym brzegiem (co jest przypadkiem często spotykanym) korzystne jest zastosowanie pierścienia o «skupionej» powierzchni przekroju F i pomijalnie małym wymiarze promieniowym przenoszącego siłę promieniową pochodzącą od tarczy i obciążenia zewnętrznego (p_z — równego

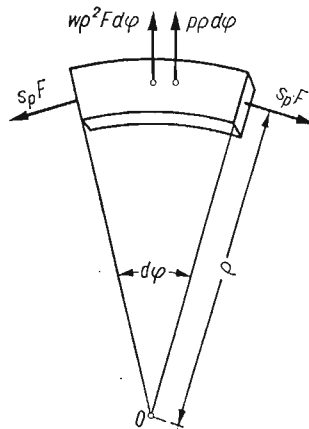


Rys. 7

w tym przypadku 0). Z punktu widzenia matematyki oznacza to dopuszczenie rozwiązań dystrybucyjnych, gdyż pierścień taki można traktować jak dystrybucję $\delta(r-\rho)$, gdzie ρ jest średnim promieniem pierścienia (rys. 7).

Profil tarczy można więc opisać dystrybucją

$$(9.1) \quad h^* = h(r) + F\delta(r-\rho).$$



Rys. 8

Z przyjętych założeń wynika, że w pierścieniu działa jedynie naprężenie obwodowe s_p (definiowane analogicznie do s_r i s_φ), toteż równanie równowagi elementu takiego pierścienia (rys. 8) obciążonego siłą promieniową p

$$(9.2) \quad F d\varphi w \rho^2 + p \rho d\varphi - s_p F d\varphi = 0$$

może służyć do wyznaczania przekroju F

$$(9.3) \quad F = \frac{p \rho}{w \rho^2 - s_p}.$$

W zakresie sprężystym naprężenie s_p można wyznaczyć z warunku zgodności odkształceń tarczy i pierścienia. Przy założeniu, że są one wykonane jako jedna całość otrzymuje się

$$(9.4) \quad F = \frac{h(\varrho) \left(\cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) + p_z}{(1-\nu) \cos \xi + \frac{1+\nu}{\sqrt{3}} \sin \xi - w \varrho^2} \varrho.$$

Jak wykazano w [9] w pierścieniu takim wytężenie jest inne niż w tarczy, co jest zjawiskiem niekorzystnym, a nawet niedopuszczalnym, o ile wytężenie jest wyższe niż w tarczy.

Lepsze wykorzystanie materiału można osiągnąć zakładając pełne uplastycznienie pierścienia (kształtowanie na nośność graniczną). Równanie zgodności odkształceń przy założeniu idealnej plastyczności przestanie wtedy ingerować, zatem

$$(9.5) \quad s_p = \pm 1 \quad \text{i} \\ F = \frac{\mp h(\varrho) \left(\cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi \right) + p_z}{w \varrho^2 \pm 1} \varrho$$

(znaki dolne przyjmuje się dla pierścienia na zewnętrznym brzegu tarczy).

W przypadku tarczy swobodnej obciążenie pierścienia pochodzi jedynie od siły promieniowej w tarczy, a zatem obciążenie $p_z = 0$ i powierzchnia F we wzorach (9.4), (9.5) jest proporcjonalna do $h(\varrho)$. Warunek brzegowy (5.1) na przeciwnym brzegu można zawsze spełnić zmieniając h . Problem optymalnego kształtowania tarczy z dystrybucją staje się dodatkowo problemem optymalizacji parametrycznej, gdzie jako parametr można przyjąć np. $\xi(\varrho)$ w równaniach (9.4), (9.5). Funkcją celu jest wtedy sumaryczna objętość tarczy i pierścienia

$$(9.6) \quad v = \int_{\beta}^1 h^* r dr = \int_{\beta}^1 h r dr + F \varrho = \min, \quad \varrho = \begin{cases} \beta \\ 1 \end{cases}.$$

Próba takiej optymalizacji (przy użyciu nieznacznie zmodyfikowanego programu nr 1) nie dała jednak rezultatu, gdyż otrzymuje się jako wielkość optymalną

$$(9.7) \quad \xi(\varrho)_{\text{opt}} = \pi/3,$$

co odpowiada tarczy bez pierścienia, lecz o nieograniczonej grubości na swobodnym brzegu. Przy kształtowaniu w realnych warunkach należy przyjąć $\xi(\varrho) < \pi/3$, tak aby spełnić nie rozważane tutaj ograniczenia technologiczne (np. maksymalna wysokość pierścienia, zgodność wysokości pierścienia i tarczy itp.). Często połączenia tarczy z pierścieniem nie uda się przy tych założeniach zrealizować, gdyż nie zmieści się on wewnątrz tarczy, wyjdzie ze wzoru ujemna jego powierzchnia lub zbyt duże naprężenie s_p .

10. Uwzględnienie zmiennej temperatury

Najistotniejszy wpływ z upraszczających rozważania założeń (5.4) ma nierównomierny rozkład temperatury w tarczy wywołujący naprężenia termiczne (tylko w zakresie sprężystym) oraz wywołujący zmienność stałych materiałowych.

W przypadku kształtowania na nośność sprężystą możliwe jest dwojaki postawienie zagadnienia:

1. Przyjęcie rozkładu temperatury jako funkcji znanej — wyznaczonej doświadczalnie dla tarczy już istniejącej. Konieczne jest wtedy założenie, że różnica pomiędzy tą tarczą a tarczą dopiero projektowaną będzie niewielka — nie zmieniająca praktycznie rozkładu temperatury.

2. Przyjęcie równań przepływu ciepła dla płaskiej tarczy i całkowanie ich razem z podanymi wyżej równaniami. Podejście takie, choć teoretycznie dokładniejsze, wymaga jednak znacznie większej liczby danych doświadczalnych (często niemożliwych do wyznaczenia) lub też pewnych uproszczeń. Np. ogólne równanie przepływu ciepła dla tarczy (według [17])

$$(10.1) \quad t'' = \frac{-rh't' - ht' + r \text{Bi}(t - t_0)}{rh}$$

wymaga znajomości rozkładu temperatury otoczenia $t_0(r)$ oraz współczynnika wnikania ciepła do tarczy, których w sposób ścisły wyznaczyć się nie da.

Przy kształtowaniu na nośność graniczną możliwe jest jedynie podejście pierwsze, gdyż przy wyprowadzaniu równania (4.9) funkcja $s_0(r)$, a zatem i temperatura traktowane były jako dane. Oczywiście możliwe jest wyprowadzenie równania Eulera — Lagrange'a z równaniem typu (10.1) jako dodatkowym warunkiem pobocznym, choć przy ogólnej zależności $s_0(r, t)$ nie będzie ono miało rozwiązania. Wynika to z faktu, że problem doboru optymalnego profilu i rozkładu granicy plastyczności s_0 sformułowany jak powyżej nie ma rozwiązania dla skończonych wartości $s_0(r)$.

Wyznaczenie rozkładu temperatury i profilu odpowiadających minimalnej objętości tarczy jest zagadnieniem znanym pod nazwą termofrezażu (OGIBAŁOW [11], który sformułował ten problem dla cylindra, mógł dobierać jedynie rozkład temperatury). Uwzględnienie zmiennej temperatury w równaniach nośności sprężystej zmieni objętość tarczy, a w szczególności może ją zmniejszyć, jednak wynik rozwiązania na nośność graniczną jest kresem dolnym możliwych rozwiązań. Wynika z tego, że rozwiązanie powyższego problemu przy pominięciu wpływu temperatury na stałe materiałowe daje się rozwiązać w oparciu o wyprowadzone równania. Należy ukształtować tarczę w oparciu o równania (4.3) i (4.9), a następnie z równania (4.6) wyznaczyć poszukiwaną temperaturę. Przy rozwiązaniu kompletu równań (4.3), (4.6), i (4.9) niewiadomymi będą $h(r)$, $\xi(r)$ i $t(r)$.

Przy uwzględnieniu zmienności stałych materiałowych z temperaturą [przede wszystkim $s_0(r, t)$] problem termofrezażu (zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami) nie daje się tak rozwiązać.

Możliwe jest także postawienie zagadnienia termofrezażu jako problemu wyznaczania optymalnego rozkładu temperatury przy zadanym profilu tarczy. Odpowiada to dokładnie sformułowaniu podanemu przez OGIBAŁOWA — wyznaczenia rozkładu temperatury zapewniającego równomierne wyteżenie materiału w całej objętości tarczy. Dla rozwiązania tego problemu należy rozwiązać układ równań (4.3) (4.6) o niewiadomych $\xi(r)$ i $t(r)$.

11. Wnioski końcowe

W pracy przedstawiono problem kształtowania tarczy wirującej w oparciu o jej nośność sprężystą i graniczną. Kształtowanie na nośność graniczną pozwala w przypadku tarczy pełnej osiągnąć znaczny zysk na objętość (do 19%). W przypadku tarczy pierścieniowej objętość jest jednak niemal niezależna od kryterium kształtowania (podobne wnioski otrzymał również DISTEFANO [2]). Przedstawiono i przedyskutowano pewne ograniczenia na dobór obciążeń przy kształtowaniu tarczy. Ograniczenia te wynikają prawdopodobnie z przyjęcia pełnego uplastycznienia jako jedynego możliwego schematu zniszczenia. Przedyskutowano również możliwości kształtowania tarczy ze swobodnym wewnętrznym brzegiem (Dodatek B) oraz problem połączenia tarczy z pierścieniem usztywniającym. Omówiono zagadnienie doboru optymalnego rozkładu temperatury (termofretażu).

Ze względu na stosowanie numerycznych metod obliczeniowych nie podano rozwiązań w zamkniętej postaci, a jedynie pewne otrzymane rozwiązania numeryczne.

Dodatek A. Wyprowadzenie równań Eulera-Lagrange'a dla kształtowania w oparciu o nośność graniczną.

Do wyznaczenia równania (4.9) posłużymy się ogólną metodą Eulera-Lagrange'a. Uogólniony funkcjonał, po uwzględnieniu ograniczeń (2.1) i (4.1), przyjmie postać

$$(A.1) \quad \int_{\beta}^1 \left\{ \lambda_1 (h' r q_r - q_\varphi h + q_r h + \frac{(q_r \sigma_0)}{\sigma_0} r h + w_1 r^2 h) + \right. \\ \left. + \lambda_2 [\kappa_3 + \kappa_2 (q_r + q_\varphi) - (q_r^2 + q_\varphi^2 - q_r q_\varphi)] + h r \right\} dr = \min,$$

skąd, pisząc równania Eulera-Lagrange'a kolejno względem funkcji $h(r)$, $q_r(r)$, $q_\varphi(r)$ otrzymuje się układ trzech równań

$$(A.2) \quad \lambda_1 \left(r q_r \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} - q_\varphi + w_1 r^2 \right) - \lambda_1' r q_r = 0, \\ \lambda_1 r h \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} + \lambda_2 (\kappa_2 - 2q_r + q_\varphi) - \lambda_1' r h = 0, \\ \lambda_1 h - \lambda_2 (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) = 0,$$

gdzie

$$(A.3) \quad q_r = \frac{\sigma_r(r)}{\sigma_0(r) \kappa_1} = \cos \xi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi - \kappa_2, \\ q_\varphi = \frac{\sigma_\varphi(r)}{\sigma_0(r) \kappa_1} = \cos \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \xi - \kappa_2$$

a λ_1 i λ_2 są mnożnikami Lagrange'a.

Powyższą parametryzację zastosować można na dowolnym etapie wyprowadzania równania (4.9), a w szczególności już w równaniu (A.1) — wówczas otrzymałoby się jeden mnożnik Lagrange'a. Jednak ze względu na konieczność pracochłonnych przekształceń trygonometrycznych najkorzystniej jest zastosować ją jak najpóźniej tzn. po wyrugowaniu z równań (A.2) niewiadomych pomocniczych $\lambda_1(r)$ i $\lambda_2(r)$.

Z równania (A.2₃) wyznacza się $\lambda_2(r)$ i podstawia do (A.2₂). Otrzymuje się wtedy układ dwu równań

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \left(r q_r \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} - q_\varphi + w_1 r^2 \right) - \lambda_1 r q_r &= 0, \\ \lambda_1 \left(r \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\kappa_2 - 2q_r + q_\varphi}{\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r} \right) - \lambda'_1 r &= 0 \end{aligned}$$

liniowy względem niewiadomych λ_1 i λ'_1 . Wyznaczając λ_1 i λ'_1

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{r(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)}{w_1 r^2 (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) + \kappa_2 (q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3}, \\ \lambda'_1 &= \frac{(\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) r \sigma'_0 / \sigma_0 + \kappa_2 - 2q_r + q_\varphi}{w_1 r^2 (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) + \kappa_2 (q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3}, \end{aligned}$$

a następnie różniczkując pierwsze z nich i odejmując stronami otrzymujemy po przekształceniach równanie

$$\begin{aligned} w_1 r^2 (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) (q_r + q_\varphi - 2\kappa_2) + 3(q_r - q_\varphi) [(q_r + q_\varphi) \kappa_2 + 2\kappa_3] - \\ - [\kappa_2 (q_r + q_\varphi) + 2\kappa_3] (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r) r \sigma'_0 / \sigma_0 - (\kappa_2 - 2q_\varphi + q_r)^2 w_1 r^3 \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{w'}{w} \right) = \\ = -3\kappa_2 r (q_\varphi q'_r - q'_\varphi q_r) + \kappa_2^2 r (q'_r + q'_\varphi) - 2\kappa_3 r (q'_r - 2q'_\varphi), \end{aligned}$$

z którego po zastosowaniu parametryzacji (A.3) otrzymujemy (4.9).

D o d a t e k B. Dyskusja rozwiązań prowadzących do nieograniczonej grubości tarczy.

Przy kształtowaniu tarczy o swobodnym brzegu lub obciążonej na obu brzegach w jednym kierunku (do osi lub części od osi) zachodzi konieczność spełnienia w pewnym punkcie tarczy równości (dla $r = \varrho$)

$$(B.1) \quad p(\varrho) = s_r(\varrho) h(\varrho) = 0, \quad \beta \leq \varrho \leq 1.$$

Przy tym założeniu równanie równowagi tarczy (4.3) posiada osobliwość i nie daje się wykorzystać do kształtowania tarczy. Ze względu na duże znaczenie praktyczne przypadek ten wymaga głębszego zbadania i zostanie przeanalizowany dla poszczególnych możliwości wynikających z równania (B.1).

Wszystkie występujące poniżej wielkości będą wartościami odpowiednich funkcji w punkcie $r = \varrho$, toteż otrzymane równania będą równaniami algebraicznymi. Jedyne w punkcie B.2 wykorzystane zostanie rozwinięcie tych funkcji w szereg zmiennej η w najbliższym otoczeniu punktu $r = \varrho$ ($\eta = r - \varrho$).

$$B.1. \quad s_r = 0 \quad (h = 0, \quad h \neq \pm \infty, \quad h' \neq \pm \infty).$$

Przy tych założeniach równanie (4.3) mogłoby być ewentualnie wykorzystane do kształtowania, gdyby można je było doprowadzić do postaci symbolu nieoznaczonego 0/0. W tym celu musi zachodzić:

$$(B.2) \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \xi - \varrho \left(\sin \xi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \xi \right) \xi' - w_1 \varrho^2 = 0.$$

Jedyną wielkością niewiadomą (wartość ξ wynika z warunku $s_r = 0$) jest tu ξ' . Wyliczoną z (B.2) wartość ξ' można podstawić do (4.6) lub (4.9) (a właściwie otrzymanych z nich

równań algebraicznych) i otrzymać równanie wiążące wielkości przyjęte jako znane, np. przy założeniach (5.4) otrzymuje się z (4.7) dla zakresu sprężystego

$$(B.3) \quad w\varrho^2 = \frac{3}{1-2\nu} \quad \text{lub} \quad w\varrho^2 = \frac{1+4\nu}{1-2\nu},$$

albo z (4.10) dla zakresu plastycznego

$$(B.4) \quad w\varrho^2 = \pm 3.$$

Nawet, jeśli dobierzemy z nich prędkość kątową lub promień (co nie zawsze jest możliwe), to i tak nie uda się uniknąć osobliwości równania (4.3) gdyż po zróżniczkowaniu (4.6) lub (4.9) można otrzymać następne równanie algebraiczne, które przy przyjętych wartościach nie będzie spełnione.

$$B.2. \quad s_r = 0 \quad (h = 0, \quad h \neq \pm \infty).$$

Jeżeli dopuści się możliwość $h' = \pm \infty$ tak, aby w równaniu (4.1) pierwszy człon miał wartość skończoną $C \neq 0$ otrzymuje się wtedy, rozwijając odpowiednie funkcje w szeregi i ograniczając się do pierwszych przybliżeń, następujące wyrażenia:

$$(B.5) \quad \begin{aligned} h's_r &= C/\varrho + a_1\eta + a_2\eta^2 + \dots \\ s_r &= A_1\eta + A_2\eta^2 + \dots \\ h' &= \frac{C/\varrho + a_1\eta + \dots}{A_1\eta + \dots} = \frac{C}{A_1\varrho} \frac{1}{\eta} + \frac{a_1}{A_1} + \dots = \left. \frac{dh}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

Po scałkowaniu

$$(B.6) \quad h = C_5 + \frac{C}{A_1\varrho} \ln \eta + \frac{a_1}{A_1} \eta + \dots,$$

skąd otrzymuje się, wbrew założeniom, $h(\varrho) = \infty$.

$$B.3. \quad h = 0, \quad s_r \neq 0.$$

Przy powyższych założeniach z równania równowagi otrzymuje się $h' = 0$, a po n -krotnym zróżniczkowaniu (4.1) względem r

$$(B.7) \quad h^{(n)}(\varrho)s_r = f(h, h', h'', \dots),$$

gdzie f jest liniową kombinacją pochodnych funkcji h aż do $(n-1)$ -szej. Metodą indukcji matematycznej można stąd udowodnić, że wszystkie pochodne funkcji $h(r)$ są w tym punkcie równe zero. Nie wydaje się możliwe opisanie taką funkcją rzeczywistego profilu tarczy.

B.4. Jeżeli równocześnie $h = 0$ i $s_r = 0$, to różniczkując równanie równowagi (4.1) otrzymuje się

$$(B.8) \quad h'(2rs_r - s_\varphi w_1 \varrho^2) = 0,$$

skąd, jeżeli wyrażenie w nawiasie jest różne od zera, otrzymuje się wynik jak poprzednio, w przeciwnym przypadku dochodzi się do związków takich, jak w B.1.

Reasumując: Warunek (B.1) pociąga za sobą nieograniczoną wartość $h(\varrho)$, a zatem prowadzi do tarcz nierealizowalnych technicznie. Wyniki niniejszej pracy, poza rozdziałem 9, nie dają więc podstaw do projektowania tarczy ze swobodnym brzegiem lub z obciążeniami w jednym kierunku. Dla rozwiązania tego problemu konieczne jest przyjęcie innych ograniczeń niż w niniejszej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Цейтлин, *Приближенный метод профилирования сплошных турбинных дисков с учётом несущей способности*, Тр. Куйбышевск. авиац. ин-т., 19 (1965) 273—285.
2. N. DISTEFANO, *Dynamic programming and the optimum design of rotating disks*, JOTA, 10, 2 (1972) 109—128.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika techniczna*, PZWS, Warszawa 1951,
4. В. П. ГОНТАРОВСКИЙ, Б. П. ЧЕБАЛЕВСКИЙ, *Профилирование равнопрочного диска по условию прочности Мизеса*, Проблемы прочности, 1973, 93—95.
5. В. В. ИГНАТЕНКО, *О рациональном профилировании покрывающего диска колеса центробежного компрессора*, Расчёты на прочность, 13 (1968) 87—98.
6. J. KARKOWSKI, S. ŁUKASIEWICZ, *The influence of temperature on the shape of rotating discs of uniform strength*, Bull. Acad. Pol. Sci. techn., 9, 1 (1961) 7—16.
7. J. KARKOWSKI, S. ŁUKASIEWICZ, *Wpływ temperatury na równomierną wytrzymałość krążków wirujących*, Arch. Bud. Masz., 8 (1961) 201—222.
8. J. KARKOWSKI, *Przybliżona metoda kształtowania płaskich tarcz o równomiernej wytrzymałości*, Arch. Bud. Masz., 13 (1966) 377—391
9. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność — wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
10. Е. И. Молганов, В. П. Трушечкин, *Напряжённое состояние дисков газовых турбин*, Термопрочность материалов и констр. элем., Киев, вып. 4, 466—469.
11. П. М. Огибалов, *Деформация трубы под действием внутреннего давления при переменной температуре*, Инж. сборник, 20 (1954), 55—58.
12. W. PRAGER, D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., 9 (1951) 381—389.
13. A. RANTA MATTI, *On the optimum shape of a rotating disk of any isotropic material*, J. of Solids and Struct., 5, 11 (1969) 1247—1257.
14. *Расчёты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*, Машиностроение, Москва 1965.
15. M. A. SAVE, *Some aspects of minimum-weight design*, Engineering Plasticity, Cambr. Univ. Press., 1968, pp. 611—625.
16. A. SEIREG, K. S. SURANA, *Optimum design of rotating discs*, Trans. ASME, Ser. B, 1970, 1—10.
17. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła — podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
18. K. SZUWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *On the phenomenon of decohesion in perfect plasticity*, J. of Solids and Struct., 9 (1973) 85—98.
19. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, IPPT PAN-PWN, Warszawa 1973.
20. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalizacja konstrukcji powłokowej*, Materiały sympozjum «Konstrukcje powłokowe», Kraków 1974.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ ПО УПРУГОМУ И ПЛАСТИЧЕСКОМУ
ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Авторами разработано формирование вращающегося диска из условия равнопрочности (упругое решение) или из условия минимума объема в пластическом состоянии. Принято плоское напряженное состояние и распределение температуры, условие текучести Бужинского-Стасси д'Алиа, физическая неоднородность диска и зависимость физических констант от нагрева. При оптимизации на несущую способность для определения добавочной свободной функции применено классическое вариационное исчисление.

Численные расчеты, выполненные на ЭВМ „Одра 1204”, показали, что хотя формирование на несущую способность дает лучшие результаты, то истинная разница по объему получается лишь для полного диска.

Поставлено условие равнопрочности в широком смысле и рассмотрена корректность условия равнопрочности в узком смысле. Показано, что допущение свободного края диска ведет к неограниченной его толщине. Этого можно избежать, вводя соединение диска с кольцом, несущим радиальную силу. Рассмотрена также проблема термофреттажа, т.е. оптимального распределения температуры в диске.

S u m m a r y

THE OPTIMAL DESIGN OF NONUNIFORMLY HEATED ROTATING DISCS WITH RESPECT TO THEIR ELASTIC AND LIMIT CARRYING CAPACITY

Paper describes the design of rotating discs using the condition of uniform strength (in elastic range) or condition of full yielding (in plastic range). Plane, axially symmetric stress and temperature distribution, Burzyński—Stassi d'Alia parabolic yield condition were assumed; the material constants may depend on the coordinate and temperature (natural and forced non-homogeneity). Design in plastic range had one more free design variable and was based on classical variational calculus.

It was shown, by using an „Odra 1204” computer, that plastic range design produces more optimal discs (of less volume) but there is a very small gain with respect to the elastic design except in the case of a full disc.

Uniform strength condition in the broader sense was assumed and the correctness of the narrower sense condition was discussed. It was proved that free end assumption produces an infinitely large thickness of disc. To get rid of this phenomenon the reinforcement of the disc with the ring (carrying the radial force) was discussed.

The thermofretage problem i.e. the problem of the optimum design of temperature distribution was described and discussed as well.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 września 1975 r.
