

ZASTOSOWANIE METODY MACIERZY PRZENIESIENIA W OBLICZENIU DRGAŃ WŁASNYCH
UKŁADU BELKOWO-LINOWEGO

FRANCISZEK JARZYŃSKI, NGUYEN VAN TINH (POZNAŃ)

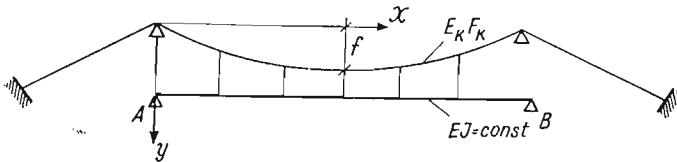
Wstęp

Metoda macierzy przeniesienia jest znana i była dotychczas stosowana w zagadnieniach statycznych i dynamicznych obliczenia belek, ram i kratownic [1, 2, 3]. W artykule niniejszym omówiono obliczenie drgań własnych układu belkowo-linowego przy założeniu stałej sztywności belki na zginanie.

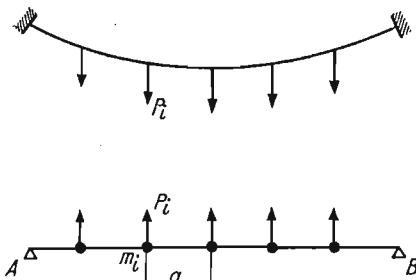
W zakończeniu podano przykład liczbowy. Wyniki otrzymane są zbieżne z wynikami uzyskanymi z wzorów podanych w [4].

1. Przypadek belki

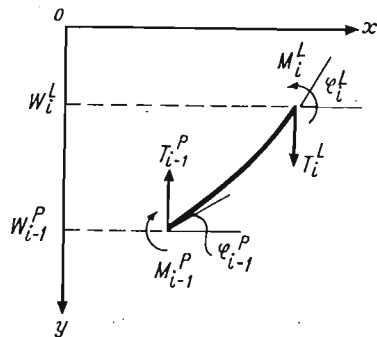
Rozpatrzmy układ belkowo-linowy (rys. 1). Dzielic belkę na przęsła i węzły oraz zakładając, że masy układu są zaczepione tylko w węzłach 1, 2, ..., n (rys. 2), na mocy [1] dla przęsła $i-1, i$ mamy (rys. 3):



Rys. 1



Rys. 2

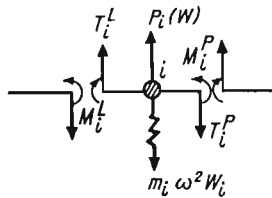


Rys. 3

$$(1) \quad \begin{cases} -W_i^L = -W_{i-1}^P + a\varphi_{i-1}^P + \frac{a^2}{2EJ} M_{i-1}^P + \frac{a^3}{6EJ} T_{i-1}^P, \\ \varphi_i^L = \varphi_{i-1}^P + \frac{a}{EJ} M_{i-1}^P + \frac{a^2}{2EJ} T_{i-1}^P, \\ M_i^L = M_{i-1}^P + a T_{i-1}^P, \\ T_i^L = T_{i-1}^P \end{cases}$$

oraz dla węzła i (rys. 4)

$$(2) \quad \begin{cases} W_i^P = W_i^L, \\ \varphi_i^P = \varphi_i^L, \\ M_i^P = M_i^L, \\ T_i^P = T_i^L - m_i \omega^2 W_i + P_i(W). \end{cases}$$



Rys. 4

Równania (1) i (2) możemy zapisać w postaci

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{-W_i^L}{a} = \frac{-W_{i-1}^P}{a} + \varphi_{i-1}^P + \frac{aM_{i-1}^P}{2EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{6EJ} \\ \varphi_i^L = \varphi_{i-1}^P + \frac{aM_{i-1}^P}{EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{2EJ} \\ \frac{aM_i^L}{EJ} = \frac{aM_{i-1}^P}{EJ} + \frac{a^2T_{i-1}^P}{EJ} \\ \frac{aT_i^L}{EJ} = \frac{aT_{i-1}^P}{EJ} \end{cases}$$

oraz

$$(4) \quad \frac{a^2}{EJ} T_i^P = -m_i \omega^2 \frac{a^3}{EJ} \frac{W_i}{a} + P_i(W) \frac{a^2}{EJ} + \frac{a^2}{EJ} T_i^L.$$

Na podstawie równań (3) i (4) napiszemy równania równowagi przęśła i węzła w sposób następujący:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{0} \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1}^P \quad \text{albo} \quad \bar{Z}_i^L = \bar{F}_i Z_{i-1}^P,$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{q}_i & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_l \quad \text{albo } \bar{Z}_i^p = \bar{K}_i \bar{Z}_i^l,$$

w których:

$$\bar{W} = \frac{W}{a}, \quad \bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{M} = M \frac{a}{EJ}, \quad \bar{T} = \frac{a^2}{EJ} T, \quad \bar{P}_i = \frac{a^2}{EJ} P_i, \quad \bar{q}_i = m_i \omega^2 \frac{a^3}{EJ},$$

\bar{F}_i jest macierzą przęsła, \bar{K}_i — macierzą węzła, ω — częstością drgań własnych układu, $m_i = \mu a$; μ — masą jednostki długości układu, P_i — siłą, pochodzącą od kabla, działającą na węzeł i belki.

Analogicznie możemy napisać równania dla innych węzłów i przęseł. W taki sposób otrzymamy zależność między \bar{Z}_0^* (dla punktu A) i \bar{Z}_{n+1}^* (dla punktu B)

$$(8) \quad \bar{Z}_{n-1}^* = \bar{U} \bar{Z}_0^*$$

gdzie

$$(9) \quad \bar{U} = \bar{F}_{n+1} \bar{K}_n \bar{F}_n \dots \bar{F}_2 \bar{K}_1 \bar{F}_1.$$

Obliczając iloczyn macierzy (9) możemy pominąć kolumny 1 i 3 macierzy \bar{F}_i ponieważ $\bar{W}_A = \bar{M}_A = 0$. Otrzymamy wówczas

$$(10) \quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{11}^* \bar{p}_1 + u_{12}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{1n}^* \bar{p}_n \\ u_{21} & u_{22} & u_{21}^* \bar{p}_1 + u_{22}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{2n}^* \bar{p}_n \\ u_{31} & u_{32} & u_{31}^* \bar{p}_1 + u_{32}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{3n}^* \bar{p}_n \\ u_{41} & u_{42} & u_{41}^* \bar{p}_1 + u_{42}^* \bar{p}_2 + \dots + u_{4n}^* \bar{p}_n \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{T} \\ 1 \end{bmatrix}_{n+1} \quad u_{ij} \neq u_{ji}; \quad u_{ij}^* \neq u_{ji}^*$$

albo

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \bar{U} & \bar{U}^* \bar{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{P} &= \text{Col} \{ \bar{P}_1(w), \bar{P}_2(w), \dots, \bar{P}_n(w) \}, \\ \bar{U} &= \bar{U}(4, 2), \\ \bar{U}^* &= \bar{U}^*(4, n). \end{aligned}$$

Macierze \bar{U} i \bar{U}^* są funkcjami częstości i zależą od parametrów geometrycznych belki. Ponieważ $\bar{M}_B = \bar{W}_B = 0$, ze wzoru (11) otrzymujemy

$$(13) \quad \bar{U}_{13} \bar{Z}_0 + \bar{U}_{13}^* \bar{P} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\bar{U}_{13} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} \quad \bar{U}_{13}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \dots & u_{1,n-1}^* & u_{1n}^* \\ u_{31}^* & \dots & u_{3,n-1}^* & u_{3n}^* \end{bmatrix}.$$

2. Przypadek liny

Stosując ten sam tok postępowania, co w pracy [5], znajdujemy

$$(14) \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{W},$$

gdzie $\mathbf{W} = \text{Col}\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ jest wektorem ugięć węzłów liny i równocześnie węzłów belki. Macierz \mathbf{A} jest macierzą kwadratową, symetryczną i określoną równaniem

$$\mathbf{A} = \frac{H_g}{a} \bar{\boldsymbol{\beta}} + \frac{64f^2 E_k F_k}{(n+1)^5 a^3 \varepsilon} \bar{\boldsymbol{\sigma}},$$

w którym

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$E_k F_k$ — sztywność liny,

$$\varepsilon = 1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2},$$

$H_g = \frac{gl^2}{8f}$ — pozioma składowa naciągu statycznego liny,

g — ciężar jednostki długości układu.

Te same równanie (14) można zapisać w postaci

$$(16) \quad \frac{a^2}{EJ} \mathbf{P} = \frac{a^3}{EJ} \mathbf{A} \frac{\mathbf{W}}{a}.$$

Z równania (7) i (16) mamy

$$(17) \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{W}},$$

gdzie

$$(18) \quad \bar{\mathbf{A}} = \frac{a^3}{EJ} \mathbf{A}.$$

3. Macierz współczynników wpływowych

Wyznaczamy \mathbf{Z}_0 jako funkcję wektora sił następująco:

$$(19) \quad \mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{Q} - \mathbf{P}),$$

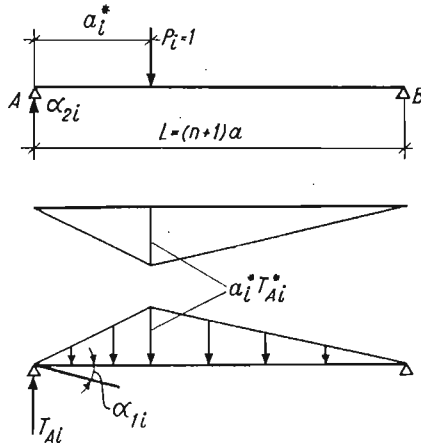
gdzie \mathbf{Q} jest wektorem sił bezwładności określonym wzorem

(20)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{W},$$

$$\mathbf{M} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

$\alpha = \alpha(2, n)$ jest macierzą wpływową między \mathbf{Z}_0 i siłami \mathbf{P}, \mathbf{Q} , α_{1i} oznacza kąt nachylenia przekroju w punkcie A pod działaniem siły jednostkowej w punkcie i belki, α_{2i} oznacza reakcję w punkcie A , gdy siła jednostkowa działa na punkt i belki.



Rys. 5

Rozpatrzmy belkę AB o stałym przekroju (rys. 5). Korzystając ze statycznych równań łatwo znajdujemy

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha_{1i} = - \frac{a_i^* (2L - a_i^*) (L - a_i^*)}{6L EJ} \\ \alpha_{2i} = \frac{L - a_i^*}{L}, \end{cases}$$

Podstawiając

$$L = a(n+1), \quad a_i^* = i \cdot a$$

do (21) otrzymamy

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha_{1i} = - \frac{a^2}{EJ} \frac{i[(2n+2-i)(n+1-i)]}{6(n+1)}, \\ \alpha_{2i} = \frac{n+1-i}{n+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Na podstawie (17), (18), (19), (20) oraz (22) łatwo zauważyć, że

(23)

$$\mathbf{Z}_0 = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{P}}) = \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{W}})$$

gdzie

$$(24) \quad \begin{cases} \bar{q} = \frac{a^3}{EJ} M, \\ \bar{\alpha}_{1i} = -\frac{i[(2n+2-i)(n+1-i)]}{6(n+1)}, \\ \bar{\alpha}_{2i} = \alpha_{2i} = \frac{n+1-i}{n+1}. \end{cases}$$

Po podstawieniu (17), (23) do (13) znajdujemy

$$(25) \quad \bar{U}_{13}[\bar{\alpha}(\bar{q}\bar{W} - \bar{A}\bar{W})] + \bar{U}_{13}^* \bar{A}\bar{W} = \mathbf{0}.$$

Po pomnożeniu lewostronnie (25) przez $\bar{\alpha}^T$ otrzymujemy

$$(26) \quad (\mathbf{C} - \mathbf{B} + \mathbf{D})\bar{W} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} są to macierze kwadratowe określone wzorami:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13} \bar{\alpha}, \\ \mathbf{C} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13} \bar{\alpha} \bar{q}, \\ \mathbf{D} = \bar{\alpha}^T \bar{U}_{13}^* \bar{A}. \end{cases}$$

Dzięki równaniu (26) wyznacznik częstości jest określony

$$(28) \quad \det(\mathbf{C} - \mathbf{B} + \mathbf{D}) = 0.$$

Stosując zależność (26) możemy określić wektory drgań własnych układu.

Przykład. Wyznaczyć częstość podstawową drgań giętnych belki układu podanego na rys. 1, z umieszczonymi na niej symetrycznie dwiema masami skupionymi $m_1 = m_2 = m = \mu a$.

Dane: $L = 1,5$ m; $E = 2,1 \times 10^6$ kGcm⁻²; $J = 20,8$ cm⁴, $E_k = \frac{E}{1,2}$, $F_k = 0,1$ cm², $g = 2$ kGm⁻¹.

Proces eliminacji (8) jest określony wzorem

$$\bar{Z}_3 = \bar{F}_3 \bar{K}_2 \bar{F}_2 \bar{K}_1 \bar{F}_1 \bar{Z}_0,$$

skąd:

$$\bar{U}_{13} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{5}{3} \bar{q} + \frac{\bar{q}^2}{36} & \frac{9}{2} + \frac{4}{9} \bar{q} + \frac{1}{216} \bar{q}^2 \\ 4\bar{q} + \frac{1}{6} \bar{q}^2 & 3 + \frac{5}{3} \bar{q} + \frac{1}{36} \bar{q}^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{1}{36} \bar{q} & \frac{1}{6} \\ 2 + \frac{1}{6} \bar{q} & 1 \end{bmatrix} = \bar{U}_{13}^*$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{a^3}{EJ} \left(\frac{2H_g}{a} + \frac{64f^2 E_k F_k}{3^5 a^3 \varepsilon} \right)$$

$$a_2 = \frac{a^3}{EJ} \left(\frac{64f^2 E_k F_k}{3^5 a^3 \varepsilon} - \frac{Hg}{a} \right),$$

Wykonując obliczenia (27), (28), oraz po obliczeniu a_1 , a_2 otrzymamy

$$427\,804,11\bar{q}^2 - 8\,247\,115,69\bar{q} + 16\,548\,537,18 = 0,$$

skąd mamy dwa pierwiastki $\bar{q}_1 = 2,27$, $\bar{q}_2 = 17$.

Wobec tego częstości podstawowe układu będą

$$\omega_1 = 1,508 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 4,120 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

Metodą zastosowaną w pracy [4] otrzymano

$$\omega_1 = 1,470 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 4,36 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

W układzie bez liny $a_1 = a_2 = 0$, mamy równanie

$$q^2 + 18 - 16q = 0,$$

skąd

$$\omega_1 = 1,095 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}, \quad \omega_2 = 3,84 \sqrt{\frac{EJ}{\mu a^4}} s^{-1}.$$

Wyniki te są zgodne z rezultatem podanym w [6].

4. Wnioski

Metoda macierzy przeniesienia w zastosowaniu do układu belkowo-linowego o małej rozpiętości jest bardziej efektywna w porównaniu z innymi metodami, ponieważ pozwala na pełne wykorzystanie elektronicznej techniki obliczeniowej. Główną jej zaletą jest to, że obliczenie ogranicza się w zasadzie do mnożenia macierzy.

Metoda ta może również służyć do obliczenia drgań własnych układu belkowo-linowego o dużej rozpiętości. Wówczas jednak macierze występujące w równaniu (28) będą bardziej skomplikowane i należałoby je rozwiązywać drogą prób za pomocą EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. E. C. PESTEL, F. A. LECKIE, *Matrix methods in elastomechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, San Francisco 1963.
2. G. RAKOWSKI, *Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych*, Warszawa 1968.
3. E. ŚWITOŃSKI, *Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych*, Mech. Teoret. Stos. 4, 12 (1974).
4. И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *К расчёту висячих мостов и газопроводов на ветровые и сейсмические нагрузки*, Москва 1962.
5. A. F. SMIRNOW, *Obliczenie konstrukcji za pomocą maszyn cyfrowych*, Arkady, Warszawa 1970.
6. K. PISZCZEK, J. WALCZAK, *Drgania w budowie maszyn*, Warszawa 1972.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ В ВАЛОЧНО-ТРОСОВОЙ СИСТЕМЕ

Задача свободных колебаний в балочно-тросовой системе решается с помощью метода матриц переноса. Приводится численный пример, показывающий хорошую сходимость принятых функций.

Summary

APPLICATION OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO THE CALCULATION OF FREE
VIBRATION IN A BEAM — CABLE SYSTEM

Problem of free vibration in a beam — cable system is solved by using the transfer matrix method. Numerical example is given and the results show a good convergence of the functions assumed.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1975 r.
