MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 14 (1976)

MACIERZOWY ZAPIS NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RUCHU GENEROWANYCH FORMALIZMEM LAGRANGE'A

ZDOBYSŁAW GORAJ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach mechaniki stoimy przed koniecznością konstrukcji pełnych nieliniowych równań ruchu [1], czy też linearyzacji układu równań nieliniowych i zagadnieniem na wartości własne macierzy stanu. Problemy te są stosunkowo proste w przypadku, jeżeli rozpatrywany układ mechaniczny lub elektromechaniczny można opisać za pomocą niewielkiej ilości stopni swobody, oraz gdy geometria i kinematyka takiego układu nie jest zbytnio skomplikowana. Inaczej sprawa przedstawia się dla układów o większej ilości stopni swobody i skomplikowanej geometrii ruchu. Typowym przykładem może być pojazd jednośladowy. Opisanie pojazdu jednośladowego bez uwzględnienia podatności pneumatyków za pomocą tylko 4 współrzędnych uogólnionych prowadzi do bardzo skomplikowanych, nieliniowych równań ruchu. Tak np. równanie ruchów przechylających zawiera przed uporządkowaniem równania około 300 składników typu $A\dot{q}_i\, \dot{q}_k\, \cos q_i\, \sin q_k$ [4, 7]. Podobnie, chociaż w mniejszym stopniu, złożone są pełne równania nieliniowe obiektów latających z uwzględnieniem wychyleń powierzchni sterowych, czy też elastyczności konstrukcji. W znanych pracach problem ten był częściowo omijany poprzez linearyzację energii kinetycznej złożonego układu mechanicznego, a następnie budowę liniowych równań ruchu. Trzeba podkreślić, że postępowanie takie nie zawsze upraszcza pracę nad konstrukcją równań ruchu w sposób dostateczny. Ponadto nie można wykluczyć błędu przy takim postępowaniu, gdyż może się zdarzyć, że linearyzacja energii i następnie budowa liniowych równań ruchu oraz linearyzacja równań nieliniowych dadzą inne wyniki.

Celem przedstawionej pracy jest budowa całej rodziny macierzy o nieskomplikowanych wyrazach, a następnie pokazanie, jak za pomocą przekształceń algebraicznych można doprowadzić układ nieliniowych równań różniczkowych do postaci normalnej, nadającej się do numerycznego scałkowania za pomocą znanych procedur.

2. Oznaczenia stosowane w pracy

$i, r, \alpha, \lambda, \sigma, \mu$	indeksy zmienne od 1 do n,
j, j'	indeksy zmienne od 1 do 3,
k	indeks zmienny od 1 do l,
β	indeks zmienny od 1 do b,
b	liczba równań więzów nieholonomicznych,

l liczba stopni swobody układów,
n liczba współrzędnych uogólnionych,
$a_{k\sigma}, b_{\sigma\alpha}$ współczynniki transformacji prostej i odwrotnej przy przejściu z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości,
$q_k, \dot{q}_k$ współrzędne i prędkości uogólnione,
π_k, ω_k quasi-współrzędne i quasi-prędkości,
$J_{j'}$ główny, centralny moment bezwładności bryły względem osi j',
M masa bryły,
Q_k^* siła uogólniona odpowiadająca quasi-współrzędnej k,
T, T^* energia kinetyczna bryły wyrażona odpowiednio w prędkościach uogólnionych i w quasi-prędkościach,
V_{cj} składowa prędkości środka masy bryły w kierunku osi j,
$\Omega_{j'}$ składowa prędkości kątowej bryły w kierunku osi j',
$\gamma_{k\alpha}^r$ trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna,
$\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}$ macierze kolumnowe odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły,
$\mathbf{V}_Q, \mathbf{\Omega}_Q$ macierze pochodnych czastkowych odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły względem kolejnych quasi-prędkości, pomnożone odpowiednio przez masę i momenty bezwładności [wzory (9)],
$\mathbf{V}_\pi, \mathbf{\Omega}_\pi$ macierze pochodnych cząstkowych odpowiednio prędkości liniowej i kątowej bryły względem kolejnych quasi-współrzędnych pomnożone odpowiednio przez masę i momenty bezwładności [wzory (9)],
$\mathbf{T}_Q, \mathbf{T}_\pi$ macierze pochodnych cząstkowych energii kinetycznej względem quasi-prędkości i quasi-współrzędnych odpowiednio [wzory (10) i (11)],
$\mathbf{T}_{Q\omega}$ macierz określona wzorem (35),
$\mathbf{T}_R$ macierz «reszt» przy różniczkowaniu energii kinetycznej względem quasi-prędkości,
$\mathbf{V}_P, \mathbf{\Omega}_P$ macierze współczynników rozkładu prędkości odpowiednio liniowej i kątowej względem quasi-prędkości [wzory (12) i (13)],
ω wektor quasi-prędkości,
$\mathbf{V}_R, \mathbf{\Omega}_R$ macierze «reszt» (nie zawierające quasi-prędkości) odpowiednio prędkości liniowej i kątowej [wzory (13)],
$\mathbf{A}$ macierz zdefiniowana wzorem (15),
$\mathbf{C}$ macierz zdefiniowana wzorem (16),
$\mathbf{V}_{QP}, \mathbf{\Omega}_{QP}$ macierze pochodne odpowiednio macierzy $\mathbf{V}_Q$ i $\mathbf{\Omega}_P$,
$\mathbf{V}_{RP}, \mathbf{\Omega}_{RP}$ macierze pochodne odpowiednio macierzy $\mathbf{V}_R$ i $\mathbf{\Omega}_R$,
$\mathbf{V}_{PP}, \mathbf{\Omega}_{PP}$ macierze pochodne odpowiednio macierzy $\mathbf{V}_P$ i $\mathbf{Q}_P$,
$\mathbf{\Gamma}$ macierz współczynników Boltzmanna-Hamela,
$\mathbf{Q}$ macierz sił uogólnionych,
$\mathbf{z}, \mathbf{R}$ macierze określone wzorami (22),
$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dla i-tej bryły wchodzącej w skład układu mechanicznego.

3. Równania Boltzmanna — Hamela dla układu nieholonomicznego w zapisie macierzowym

Równania Boltzmanna-Hamela dla układu nieholonomicznego opisują bardzo szeroki krąg problemów spotykanych w mechanice analitycznej [2]. Można pokazać, jak z równań Boltzmanna-Hamela wynikają równania Maggi oraz Woronca dla układów nieholonomicznych, zarówno w quasi-współrzędnych, jak i we współrzędnych uogólnionych. W przypadku gdy nie istnieją równania więzów nieholonomicznych, równania Boltzmanna-Hamela opisują układ holonomiczny w quasi-współrzędnych. Jeżeli związki transformacyjne z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości są całkowane, to wtedy równania Boltzmana-Hamela przechodzą w znane równania Lagrange'a II rodzaju. Jednak zasadniczym powodem rozważań właśnie nad równaniami Boltzmanna-Hamela jest fakt następujący: największe trudności w konstrukcji nieliniowych równań ruchu stwarzają pojazdy kołowe i obiekty latające. Równania ruchu dla tych obiektów najwygodniej jest budować w układzie współrzędnych związanych z obiektem, a więc w pewnym układzie quasi-współrzędnych. Najlepiej do tego nadają się więc równania Boltzmanna-Hamela [6].

Równania Boltzmanna-Hamela, na podstawie [2], zapisano następująco:

— równania ruchu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma^r_{\alpha k}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_r}\omega_\alpha=Q^*_k, \tag{1}$$

— równania więzów

$$\omega_{l+\beta}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{l+\beta,\lambda}\dot{q}_\lambda=0, \tag{2}$$

— równania transformacji z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości

$$\omega_k=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{k,\lambda}\dot{q}_\lambda, \tag{3}$$

gdzie $r, \alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n$, $\beta = 1, 2, \ldots, b$, $k = 1, 2, \ldots, l$, przy czym $b+l = n$. Gdy $b = 0$, to $l = n$ (układ jest holonomiczny).

Trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna można obliczyć z definicji

$$\gamma^r_{k\alpha}=\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial q_\mu}-\frac{\partial a_{r\mu}}{\partial q_\sigma}\right)b_{\mu k}b_{\sigma\alpha}, \tag{4}$$

gdzie

$$[b_{\sigma,\alpha}]=\left[\begin{array}{c}[a_{k,\sigma}]\\ \hdashline [a_{l+\beta,\sigma}]\end{array}\right]^{-1},$$

lub też ze związków przestawialności mechaniki analitycznej [2], w postaci

$$d\delta\pi_r-\delta d\pi_r=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\gamma^r_{\mu\sigma}d\pi_\mu\delta\pi_\sigma. \tag{5}$$

Założono, że układy mechaniczne, do których można stosować równania Boltzmanna-Hamela dadzą się przedstawić w postaci zbioru brył sztywnych lub elastycznych, połączonych wzajemnie przegubami, i że układy takie można opisać za pomocą skończonej liczby stopni swobody. Aby nie komplikować zapisu, rozważono zagadnienie dla jednej tylko bryły sztywnej całego układu. Pokazano dalej, jak zagadnienie można uogólnić w przypadku n brył.

Korzystając z twierdzenia Köeniga, energię kinetyczną bryły sztywnej wyrażono w quasi-prędkościach

$$T^* = \frac{1}{2} M \sum_{j=1}^{3} V_{cj}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j'=1}^{3} J_{j'} \Omega_{j'}^2. \tag{6}$$

Okazuje się, że ze względu na prostotę zapisu warto niekiedy składowe prędkości środka masy V_{cj} wyrazić w innym układzie współrzędnych niż składowe prędkości kątowej $\Omega_{j'}$.

Następnie wykonano operacje określone w równaniach Boltzmanna-Hamela (1)

$$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} = \sum_{j=1}^{3} V_{ij} M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \omega_k} + \sum_{j'=1}^{3} \Omega_{j'} J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \omega_k}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k} = \sum_{j=1}^{3} V_{cj} M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \pi_k} + \sum_{j'=1}^{3} \Omega_{j'} J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \pi_k}. \tag{8}$$

Wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(j) &= [V_{cj}], & \mathbf{\Omega}(j') &= [\Omega_{j'}], \\ \mathbf{V}_Q(k,j) &= \left[M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \omega_k}\right], & \mathbf{\Omega}_Q(k,j') &= \left[J_{j'} \frac{\partial \Omega j'}{\partial \omega_k}\right], \\ \mathbf{V}_\pi(k,j) &= \left[M \frac{\partial V_{cj}}{\partial \pi_k}\right], & \mathbf{\Omega}_\pi(k,j') &= \left[J_{j'} \frac{\partial \Omega_{j'}}{\partial \pi_k}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

W symbolice macierzowej wzory (7) i (8) przyjmują postać

$$\mathbf{T}_Q(k) = \left[\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\right] = \mathbf{V}_Q(r,j)\mathbf{V}(j) + \mathbf{\Omega}_Q(r,j')\mathbf{\Omega}(j'), \tag{10}$$

$$\mathbf{T}_\pi(k) = \left[\frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}\right] = \mathbf{V}_\pi(k,j)\mathbf{V}(j) + \mathbf{\Omega}_\pi(k,j')\mathbf{\Omega}(j'). \tag{11}$$

Określono następnie współczynniki rozkładu prędkości liniowej i kątowej względem quasi-prędkości

$$\mathbf{V}_P(j,i) = \frac{\partial \mathbf{V}(j)}{\partial \omega_i}, \quad \mathbf{\Omega}_P(j',i) = \frac{\partial \mathbf{\Omega}(j')}{\partial \omega_i}. \tag{12}$$

Wzory (12) pozwalają na następujące rozkłady prędkości:

— prędkości liniowej

$$\mathbf{V}(j) = \mathbf{V}_P(j,i)\,\boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{V}_R(j),$$

— prędkości kątowej

$$\mathbf{\Omega}(j') = \mathbf{\Omega}_P(j',i)\,\boldsymbol{\omega}(i) + \mathbf{\Omega}_R(j'). \tag{13}$$

Na podstawie (10) i (13) określono operacje $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\right)$,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\right)\right] = \dot{\mathbf{V}}_Q\mathbf{V}+\mathbf{V}_Q\dot{\mathbf{V}}+\dot{\mathbf{\Omega}}_Q\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}_Q\dot{\mathbf{\Omega}} = \tag{14}$$

$$= \dot{\mathbf{V}}_Q\mathbf{V}+\mathbf{V}_Q(\dot{\mathbf{V}}_P\boldsymbol{\omega}+\mathbf{V}_P\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\mathbf{V}}_R)+\dot{\mathbf{\Omega}}_Q\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}_Q(\dot{\mathbf{\Omega}}_P\boldsymbol{\omega}+\mathbf{\Omega}_P\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\mathbf{\Omega}}_R) =$$

$$= (\mathbf{V}_Q\mathbf{V}_P+\mathbf{\Omega}_Q\mathbf{\Omega}_P)\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{C} = \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{C},$$

gdzie

$$\mathbf{A}(k, i) = \mathbf{V}_Q(k,j)\mathbf{V}_P(j,i)+\mathbf{\Omega}_Q(k,j)\mathbf{\Omega}_P(j), \tag{15}$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{V}_{QP}(k,j)\mathbf{V}(j)+\mathbf{\Omega}_{QP}(k,j)\mathbf{\Omega}(j)+ \tag{16}$$

$$+\mathbf{V}_Q(k,j)[\mathbf{V}_{PP}(j,i)\boldsymbol{\omega}(i)+\mathbf{V}_{RP}(j)]+\mathbf{\Omega}_Q(k,j)[\mathbf{\Omega}_{PP}(j,i)\boldsymbol{\omega}(i)+\mathbf{\Omega}_{RP}(j)],$$

przy czym

$$\mathbf{V}_{QP}(k,j) = \dot{\mathbf{V}}_Q(k,j), \qquad \mathbf{\Omega}_{QP}(k,j) = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q(k,j),$$

$$\mathbf{V}_{RP}(j) = \dot{\mathbf{V}}_R(j), \qquad \mathbf{\Omega}_{RP}(j) = \dot{\mathbf{\Omega}}_R(j),$$

$$\mathbf{V}_{PP}(j,i) = \dot{\mathbf{V}}_P(j,i), \qquad \mathbf{\Omega}_{PP}(j,i) = \dot{\mathbf{\Omega}}_P(j,i).$$

Oznaczono macierz trójwskaźnikowych symboli Boltzmanna przez $\mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{\Gamma}(r, k, \alpha) = [\gamma^r_{\alpha k}] \tag{17}$$

oraz macierz sił uogólnionych odpowiadających przyjętym quasi-współrzędnym przez $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}(k) = [Q^*_k]. \tag{18}$$

Korzystając z oznaczeń (9)–(11) oraz (14)–(18) równanie (1) zapisano w postaci jednego równania macierzowego

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{C}-\mathbf{T}_\pi+\mathbf{T}^T_Q\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}. \tag{19}$$

Wprowadzono oznaczenia

$$\mathbf{B}(k) = -\mathbf{C}(k)+\mathbf{T}_\pi(k)-\mathbf{T}^T_Q(r)\mathbf{\Gamma}(r, k, \alpha)\boldsymbol{\omega}(\alpha)+\mathbf{Q}(k). \tag{20}$$

Z (20) wynika, że macierz kolumnowa $\mathbf{B}$ jest sumą iloczynów macierzy, które zawierają kombinacje współrzędnych uogólnionych i quasi-prędkości, nie zawierają natomiast pochodnych quasi-prędkości, tzn.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}).$$

Fakt ten ma w dalszych rozważaniach znaczenie zasadnicze, gdyż pozwala na zapis układu równań różniczkowych w postaci normalnej.

Równanie (19) po wprowadzeniu oznaczenia (20) przyjmie postać następującą:

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}. \tag{21}$$

Równanie (21) może być rozwiązane wspólnie z równaniami więzów (2) i równaniami transformacji (3). Jeżeli przy próbie rozwikłania równań (2) i (3) względem $\dot{q}_\lambda$ napotykamy trudności rachunkowe, to można to zrobić na maszynie cyfrowej, zapisując równania (2) i (3) w postaci macierzowej. W tym celu wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \omega \\ --- \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} [a_{k,\lambda}] \\ ----- \\ [a_{l+\beta,\lambda}] \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Korzystając z (22), równania (2) i (3) przedstawiono za pomocą jednego równania macierzowego

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{q}}. \tag{23}$$

Z powyższego wynika, jak zmieni się postępowanie, gdy będzie m brył sztywnych lub elastycznych. Wtedy należy dla każdej bryły oddzielnie zbudować macierz $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{B}_i$, a następnie utworzyć sumy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_i.$$

Tak więc układ mechaniczny składający się z m brył sztywnych lub elastycznych może być opisany za pomocą dwóch równań macierzowych

$$\mathbf{A}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{z}. \tag{24}$$

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na metody rozwiązania układu nieliniowego równań różniczkowych (24). Standardowe procedury w dostępnych maszynach matematycznych pozwalają na rozwiązanie układu równań różniczkowych nieliniowych w postaci normalnej, tzn. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Doprowadzenie układu (24) do postaci normalnej można «pozostawić» samej maszynie cyfrowej, stosując przed każdym krokiem całkowania znane procedury na odwracanie i mnożenie macierzy. W efekcie otrzyma się układ równań różniczkowych

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}. \tag{25}$$

Układ równań (25) jest najbardziej ogólnym opisem matematycznym własności dynamicznych badanego modelu fizycznego.

4. Równania Boltzmana-Hamela dla układu holonomicznego w zapisie macierzowym

Jeżeli układ mechaniczny nie jest skrępowany więzami nieholonomicznymi, to wtedy odpadają równania więzów (2). Słuszne są w związku z tym następujące zależności:

$$b = 0, \quad l = n.$$

Równania transformacyjne (3) przyjmą postać

$$\omega_k = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{k,\lambda}\cdot\dot{q}_\lambda, \tag{26}$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$ przy czym

$$[b_{\sigma,\alpha}] = [a_{k,\sigma}]^{-1}. \tag{27}$$

Wszystkie następne operacje podane w rozdziale 3, określone wzorami (5)-(21), pozostaną bez zmian. Wzory (22) przyjmą postać

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \mathbf{R} = [a_{k,\lambda}]. \tag{28}$$

Tak więc matematyczny opis układu holonomicznego w quasi-współrzędnych sprowadza się do następującego układu równań różniczkowych:

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega}. \tag{29}$$

Jest to układ $n+n = 2n$ równań różniczkowych nieliniowych I rzędu.

5. Równania Lagrange'a w zapisie macierzowym

Założono, że macierz $\boldsymbol{\Gamma}(r, k, \alpha)$ określona wzorem (17) jest tożsamościowo równa zeru. Oznacza to, że wszystkie trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna są równe zeru. Wtedy transformację określoną wzorami (3) oraz (26) można interpretować jako przejście od jednego układu współrzędnych uogólnionych do innego układu współrzędnych uogólnionych. Układ mechaniczny może być wówczas opisany równaniami Lagrange'a II rodzaju. Energia kinetyczna (6) jest funkcją współrzędnych i prędkości uogólnionych i będziemy ją oznaczać przez T. Ponadto spełnione są związki

$$q_k = \pi_k; \qquad \dot{q}_k = \dot{\pi}_k = \omega_k. \tag{30}$$

Wszystkie operacje określone wzorami (6)-(21), pozostają bez zmian. Aby jednak układ równań (21), który jest układem równań różniczkowych II rzędu, można było rozwiązać na maszynie cyfrowej, należy go sprowadzić do układu rzędu I stosując podstawienie, które stanowi analogię do związków (23), w postaci

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{q}}. \tag{31}$$

Ostatecznie otrzymano, że gdy holonomiczny układ opiszemy za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych, to matematyczny zapis ruchu stanowią następujące równania różniczkowe I rzędu

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}), \qquad \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega}. \tag{32}$$

Zaznaczmy ponownie, że sprowadzenie układu (32) do postaci normalnej może dokonać maszyna cyfrowa wykonując operacje odwracania i mnożenia macierzy

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega})\mathbf{B}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}), \qquad \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega}. \tag{33}$$

6. Linearyzacja nieliniowych równań ruchu

Z rozdziałów 3, 4 i 5 wynika, że aby zapisać i rozwiązać nieliniowy układ równań ruchu układu mechanicznego, należy określić całą rodzinę macierzy na podstawie znajomości:

a) rozkładu prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej bryły,

b) równań więzów nieholonomicznych (jeżeli istnieją),

c) równań transformacyjnych z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości,

d) sił uogólnionych działających na układ.

Są to następujące macierze:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{V}(j), & \mathbf{\Omega}(j), & \\
\mathbf{V}_Q(k,j), & \mathbf{\Omega}_Q(k,j), & \\
\mathbf{V}_\Pi(k,j), & \mathbf{\Omega}_\Pi(k,j), & \\
\mathbf{V}_P(j,i), & \mathbf{\Omega}_P(j,i), & \\
\mathbf{V}_R(j), & \mathbf{\Omega}_R(j), & \\
\mathbf{V}_{QP}(k,j), & \mathbf{\Omega}_{QP}(k,j), & \\
\mathbf{V}_{RP}(j), & \mathbf{\Omega}_{RP}(j), & \\
\mathbf{V}_{PP}(j,i), & \mathbf{\Omega}_{PP}(j,i), & \\
\mathbf{\Gamma}(r,k,\alpha), & \mathbf{Q}(k), & \mathbf{R}(i,r).
\end{array}
\tag{34}
$$

W ogólnym przypadku należy zbudować 19 macierzy wyjściowych na podstawie znajomości układu mechanicznego. Ponadto w celu ułatwienia zapisu programu dla maszyny cyfrowej należy zadeklarować dalsze 5 macierzy: $\mathbf{T}_Q(r)$, $\mathbf{T}_\Pi(k)$, $\mathbf{C}(k)$, $\mathbf{A}(k,i)$, $\mathbf{B}(k)$ i «zlecić» maszynie ich obliczenie na podstawie znajomości 19 macierzy wyjściowych.

W najbardziej ogólnej postaci układ równań (25) posiada nieliniowe prawe strony, tzn.

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, t)\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, t),\\
\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q}, t)\mathbf{z}.
\end{aligned}
$$

Liniowym układem równań różniczkowych będziemy nazywać układ równań wynikający z (25), zapisany w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{B}}(t, \mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{D}}(t)\mathbf{z},\\
\dot{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\mathbf{z}.
\end{aligned}
$$

gdzie $\tilde{\mathbf{A}}(t)$, $\tilde{\mathbf{D}}(t)$, $\tilde{\mathbf{R}}(t)$ są macierzami stałymi względem $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{q}$ (tzn. nie zawierającymi $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{q}$). Macierze te mogą być jednak nadal dowolnymi funkcjami czasu. Używając dalej terminów macierze liniowe i stałe, będziemy pod tymi określeniami rozumieli liniowość lub stałość względem $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{q}$ bez względu na zależność tych macierzy od czasu. Ponadto nie będziemy zajmować się określeniem warunków, przy których linearyzacja układu równań jest dopuszczalna ze względu na jakościowe zachowanie się rozwiązań tych równań.

Aby zlinearyzować układ równań różniczkowych (24) lub (25) należy z macierzy **A** i **R** wyodrębnić części stałe, a z macierzy **B** część liniową i stałą. Z (15) wynika, że aby macierz **A** była macierzą stałą, to macierze $\mathbf{V}_Q$, $\mathbf{\Omega}_Q$, $\mathbf{V}_P$, $\mathbf{\Omega}_P$ muszą być stałe. Podobnie z (22) wynika, że aby macierz **R** była stała, to muszą być stałe macierze:

— macierz określająca transformację z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości [wzór (3)]

$$[a_{k,\lambda}],$$

— macierz określająca równania więzów nieholonomicznych [wzór (2)]

$$[a_{l+\beta,\lambda}].$$

Macierz **B** jest następującą kombinacją macierzy wyjściowych:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{V}_{QP}\mathbf{V}-\mathbf{\Omega}_{QP}\mathbf{\Omega}-\mathbf{V}_Q[\mathbf{V}_{PP}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{V}_{RP}]-\mathbf{\Omega}_Q[\mathbf{\Omega}_{PP}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{\Omega}_{RP}]+\mathbf{V}_{\Pi}\mathbf{V}+\mathbf{\Omega}_{\Pi}\mathbf{\Omega}-$$
$$-[\mathbf{V}_Q\mathbf{V}+\mathbf{\Omega}_Q\mathbf{\Omega}]^T\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{Q}.$$

Ażeby macierz **B** była macierzą co najwyżej liniową (tzn. aby nie zawierała elementów kwadratowych i wyższego rzędu) kolejne macierze muszą spełniać następujące warunki:

$\mathbf{V}_{QP}$, $\mathbf{\Omega}_{QP}$ muszą być liniowe. Macierze te nie zawierają elementów stałych, gdyż $\mathbf{V}_{QP} = \dot{\mathbf{V}}_Q$ oraz $\mathbf{\Omega}_{QP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q$. Należy podkreślić, że żądanie, aby macierze $\mathbf{V}_{QP}$, $\mathbf{\Omega}_{QP}$ były liniowe nie jest sprzeczne z poprzednim warunkiem, aby macierze $\mathbf{V}_Q$, $\mathbf{\Omega}_Q$ były stałe, pomimo że $\mathbf{V}_{QP} = \dot{\mathbf{V}}_Q$ oraz $\mathbf{\Omega}_{QP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_Q$. Wynika to z faktu, iż warunki narzucone na macierze wyjściowe tworzące macierze **A** i **B** są od siebie niezależne, gdyż są spowodowane różnymi żądaniami (stałość macierzy **A** oraz liniowość macierzy **B**);

$\mathbf{V}$, $\mathbf{\Omega}$ muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\mathbf{V}_{PP}$, $\mathbf{\Omega}_{PP}$ muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\boldsymbol{\omega}$ jest liniowa;

$\mathbf{V}_{RP}$, $\mathbf{\Omega}_{RP}$ muszą być liniowe. Macierze te nie zawierają elementów stałych, gdyż $\mathbf{V}_{RP} = \dot{\mathbf{V}}_R$ oraz $\mathbf{\Omega}_{RP} = \dot{\mathbf{\Omega}}_R$;

$\mathbf{V}_Q$, $\mathbf{\Omega}_Q$ muszą być stałe, gdyż będą mnożone przez macierze liniowe;

$\mathbf{V}_{\Pi}$, $\mathbf{\Omega}_{\Pi}$ w zależności od badanego obiektu fizycznego i jego modelu, macierze te w postaci wyjściowej, niezlinearyzowanej mogą zawierać elementy stałe, lub też mogą zawierać tylko elementy liniowe i wyższego rzędu. Tak np. dla przedniego zestawu kołowego pojazdu ogumionego i tylko dla rozważanych ruchów antysymetrycznych macierze te zawierają tylko elementy liniowe i wyższego rzędu. Natomiast dla ruchów symetrycznych obiektu latającego macierze te zawierają również elementy stałe. Wobec powyższego macierze $\mathbf{V}_{\Pi}$ i $\mathbf{\Omega}_{\Pi}$ po linearyzacji, w pewnych przypadkach mogą zawierać elementy stałe oraz liniowe. Jeżeli macierze $\mathbf{V}_{\Pi}$ i $\mathbf{\Omega}_{\Pi}$ nie zawierają elementów stałych, to macierze $\mathbf{V}$ i $\mathbf{\Omega}$ mnożone lewostronnie przez $\mathbf{V}_{\Pi}$ i $\mathbf{\Omega}_{\Pi}$ muszą być stałe. Gdy jednak macierze $\mathbf{V}_{\Pi}$ i $\mathbf{\Omega}_{\Pi}$ zawierają elementy stałe, to należy pomnożyć te macierze prawostronnie odpowiednio przez liniowe macierze $\mathbf{V}$ i $\mathbf{\Omega}$, a następnie wyodrębnić części stałe i liniowe z macierzy wynikowych;

$\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{V}_Q$, $\mathbf{\Omega}_Q$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{\Omega}$ muszą być stałe, gdyż ich kombinacje będą mnożone przez liniową macierz $\boldsymbol{\omega}$;

Q po linearyzacji może zawierać tylko elementy liniowe i stałe.

7. Macierzowy zapis operatora Lagrange'a dla układów o prostszej geometrii ruchu

Pod określeniem «bryła o prostszej geometrii ruchu» będziemy rozumieli bryłę znajdującą się w takim ruchu, w którym zdefiniowana poniżej macierz $\mathbf{T}_{Q\omega}$ dla wybranych współrzędnych, uogólnionych i quasi-prędkości nie jest zbytnio skomplikowana, tzn. nie zawiera zbyt długich wyrazów. Podział na bryły o prostszej i bardziej skomplikowanej geometrii ruchu nie jest oczywiście jednoznaczny i zależy od oceny komplikacji dalszych operacji różniczkowania macierzy $\mathbf{T}_{Q\omega}$.

Dla brył o prostszej kinematyce nie warto rozpoczynać budowy równań ruchu od zbudowania macierzy prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej. W takim przypadku wystarczy operator Lagrange'a $L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_k}$ zapisać (za pomocą macierzy) następująco:

$$(35) \qquad \mathbf{L} = \frac{d}{dt}\mathbf{T}_Q - \mathbf{T}_\Pi = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{Q\omega}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_R) - \mathbf{T}_\Pi = \dot{\mathbf{T}}_{Q\omega}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_{Q\omega}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{T}}_R - \mathbf{T}_\Pi,$$

gdzie

$$\mathbf{T}_Q(k) = \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \omega_k}\right],$$

$$\mathbf{T}_{Q\omega} = (k, i) = \left[\frac{\partial \mathbf{T}_Q(k)}{\partial \omega_i}\right],$$

gdzie $\mathbf{T}_R$ oznacza macierz «reszt» przy różniczkowaniu energii kinetycznej względem quasi-prędkości.

Dobrym przykładem ilustrującym zastosowanie powyższych metod jest konstrukcja równań ruchu pojazdu jednośladowego. Aby zbudować pełne nieliniowe równania ruchu pojazdu jednośladowego, należy podzielić go na trzy umowne bryły sztywne: (1) przedni zestaw kierowniczy wraz z przednim kołem bez uwzględnienia ruchu obrotowego przedniego koła, (2) tylna rama wraz z tylnym kołem bez uwzględnienia ruchu obrotowego tylnego koła, (3) koło tylne i przednie przy uwzględnieniu rzeczywistych ruchów tych kół wraz z obrotami własnymi kół (w celu uwzględnienia efektów giroskopowych). W celu otrzymania członów równań wynikłych z ruchu bryły (1) należy zastosować pełną metodę podaną w rozdziale 3; w celu otrzymania członów wynikłych z ruchu brył (2) i sprzężeń pochodzących od umownie wyróżnionej bryły (3) należy zastosować uproszczoną wersję metody macierzowej, podanej w rozdziale 7.

8. Osiągnięte rezultaty

Przedstawiona w pracy metoda pozwala na zapisanie układu równań różniczkowych, opisujących własności dynamiczne układów mechanicznych dyskretnych poprzez zbudowanie 19 macierzy wyjściowych. Metoda posiada dwie zasadnicze zalety w stosunku do metody tradycyjnej.

1. Niektóre macierze, np. $\mathbf{V}_Q$, są wykorzystywane wielokrotnie w konstrukcji równań (24). Ponadto mnożąc macierze przez siebie operuje się wielokrotnie na elementach tych macierzy. Maszyna cyfrowa przed wykonaniem każdego kroku w procesie całkowania musi wcześniej policzyć elementy macierzy **A** i **B**. Ale dla przedstawionej metody maszyna zrobi to tylko jeden raz. Natomiast dla układu równań różniczkowych wyprowadzonych tradycyjnie i rozpisanych w jawnej postaci, maszyna będzie niektóre z elementów liczyła wielokrotnie ze względu na powtarzanie się tych elementów. Przedstawiona metoda skróci czas liczenia maszyny cyfrowej.

2. Wypisanie macierzy wyjściowych bez wykonywania bardzo czasochłonnych mnożeń macierzy przez siebie daje olbrzymią oszczędność czasu przy konstrukcji równań różnicz-

kowych. Ponadto metoda stwarza możliwość łatwej kontroli w celu uniknięcia błędu przy wypisywaniu równań. Łatwo przecież skontrolować nawet kilkanaście macierzy o prostych wyrazach, natomiast prawie niemożliwe jest, by znaleźć błąd w równaniu, które ma kilkaset członów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. GUTOWSKI, *The asymptotic behaviour and properties of nonlinear system of the ordinary differential equations of a first order describing the notion of a mechanical system*, Arch. Mech. Stos., **23**, 1 (1971).
2. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
3. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret. Stos., **5**, 3 (1967).
4. J. MARYNIAK, M. LECH, A. NAŁĘCZ, *Identyfikacja dynamiczna pojazdów na pneumatykach*, Proceedings of the VIII-th Conference on Dynamics of Machines, Praha, Liblice 1973.
5. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych*, Mech. Teoret. Stos., **12**, 4 (1974).
6. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Wpływ sztywności i tłumienia w układzie sterowania sterem wysokości na stateczność podłużną samolotu i oscylacje steru*, Mech. Teoret. Stos, **13**, 2 (1975).
7. R. S. SHARP, *Stability and control of motorcycles*, Mech. Engin. Sci., **13**, 5 (1971).

Резюме

МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫХ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

В работе рассматривается степень осложнений, выступающих во время конструирования нелинейных уравнений движения механической системы, имеющей большое количество степеней свободы и сложную геометрию движения.

Исследована группа жестких или упругих тел с конечным числом степеней свободы, соединенных при помощи шарниров. Для такой совокупности тел введена матричная форма неголомных уравнений Больцмана-Гамеля. Доказано, что систему дифференциальных уравнений в матричной записи можно привести к нормальному виду. Как частные случаи рассмотрены голономическая система в квазискоростях и голономическая система, для которой возможна запись при помощи уравнения Лагранжа.

Описан метод линеаризации матричной системы уравнений. Показана возможность применения матричной системы дифференциальных уравнений для численного интегрирования.

Summary

MATRIX REPRESENTATION OF A NON-LINEAR EQUATIONS OF MOTION DERIVED BY THE APPLICATION OF LAGRANGE'S FORMALISM

The matrix form useful for the numerical calculations of the nonlinear equations of motion for a nonholonomic system of finite number of degrees of freedom is derived by the application of the Boltzmann-Hamel method and written in quasi-velocities and generalized co-ordinates. Advantages of the matrix description and of the method of linearization of the equation in the matrix form are shown. In particular, the case of a holonomic system is discussed in detail.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1975 r.