

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE WIRUJĄCEGO PRĘTA Z UWZGLĘDNIENIEM NIELINIOWOŚCI FIZYCZNEJ MATERIAŁU

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Sformułowane w tytule pracy zagadnienie należy do szerszej klasy problemów optymalizacji kształtu ściskanych lub rozciąganych słupów nie ulegających wyboczeniu. W problemach tych istotna jest konieczność uwzględnienia sił masowych (grawitacyjnych lub bezwładności), które zależą od nie znanego jeszcze, poszukiwanego kształtu.

W większości opublikowanych prac, dotyczących optymalizacji elementów konstrukcji, siły masowe były pomijane. Jako jedną z pierwszych, uwzględniających ciężar własny zginanych belek, należy wymienić pracę BARNETTA [1], w której autor poszukiwał optymalnego kształtu wspornikowej belki obciążonej wyłącznie ciężarem własnym. Znalezione rozwiązanie, opierające się na warunku optymalizacji otrzymanym wcześniej w pracy [2], jest jednak błędne. Rozwiązanie poprawne dla belki liniowo-sprężystej przedstawiono w pracy CHERNA [3], a dla belek nieliniowo-sprężystych, sprężysto-plastycznych lub wykazujących ustalone pełzanie, w pracy GAJEWSKIEGO [5]. Optymalne kształty belek wspornikowych, poddanych równoczesnemu działaniu obciążeń zewnętrznych i sił masowych, przy wymienionej wyżej nieliniowości fizycznej materiału znaleziono w pracy GAJEWSKIEGO [4].

W zagadnieniach kształtowania ściskanych słupów siły masowe odgrywają jeszcze większą rolę. Optymalizacja kształtu słupów ściskanych, nie ulegających wyboczeniu, wykonanych z jednorodnego, liniowo-sprężystego materiału była przedmiotem pracy GRYCZA [7]. Optymalny kształt wyznaczono w niej na podstawie kryterium największej sztywności. W pracy GAJEWSKIEGO [4] rozwiązano podobny problem przy pewnych typach nieliniowości fizycznej i niejednorodnym (pod względem ciężaru właściwego oraz własności mechanicznych) materiale słupa. Wykazano, że w przypadku jednorodnego słupa ściskanego, charakteryzującego się minimalnym przemieszczeniem swobodnego końca (przy ustalonym ciężarze), jego kształt nie zależy od postaci prawa fizycznego i jest taki sam, jak w zakresie liniowo-sprężystym (jest on równocześnie słupem o wyrównanych naprężeniach).

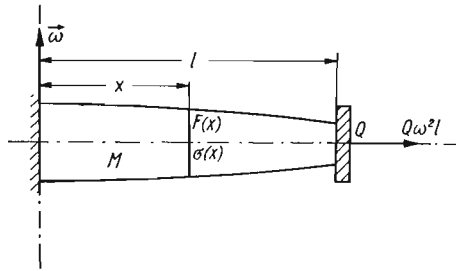
2. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem niniejszej pracy jest problem optymalnego kształtowania pręta o długości l z umieszczoną na jego końcu $x = l$ masą skupioną Q i obracającego się ze stałą prędkością kątową ω dokoła osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez jego drugi koniec:

$x = 0$ (rys. 1). Przyjmiemy, że materiał pręta jest niejednorodny. Wówczas siła działająca na jednostkę objętości $q(x)$ może opisywać zarówno zmienność gęstości materiału $\varrho(x)$, jak i niejednorodność zewnętrznego pola sił grawitacyjnych lub bezwładności $g(x)$

$$(2.1) \quad q(x) = \varrho(x)g(x).$$

W pewnych zagadnieniach [4], wielkość $q(x)$ może być rozumiana również jako ciężar właściwy.



Rys. 1

W niniejszej pracy założymy ponadto, że materiał pręta wykazuje nieliniowość fizyczną oraz podłużną niejednorodność własności mechanicznych. Związek między naprężeniem i odkształceniem wyrazimy wobec tego wzorem

$$(2.2) \quad \varepsilon^* = \mathcal{F}(\sigma^*),$$

w którym \mathcal{F} jest daną funkcją klasy C_1 ,

$$(2.3) \quad \varepsilon^* = \varepsilon/\varepsilon_0, \quad \sigma^* = \sigma/\sigma_0,$$

oraz parametry σ_0 i ε_0 są znanymi funkcjami zmiennej x i można je zapisać jako iloczyny pewnych stałych materiałowych i danych funkcji

$$(2.4) \quad \varepsilon_0 = \varepsilon^{(0)}e(x), \quad \sigma_0 = \sigma^{(0)}s(x),$$

$\varepsilon^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$ — pewne stałe.

Nieliniowe prawo fizyczne (2.2) może opisywać materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne (bez odciążenia) oraz znajdujące się w stanie ustalonego pełzania. W tym ostatnim przypadku wielkość ε należy rozumieć jako prędkość odkształcenia, chociaż w dalszym ciągu będziemy opuszczali kropkę nad ε . W związku z tym, pewne wielkości fizyczne zdefiniowane w zakresie sprężystym lub sprężysto-plastycznym, będą musiały być zastąpione przez analogiczne, lecz inne wielkości w teorii ustalonego pełzania. Tak więc, przemieszczenie zastąpimy prędkością, energię — mocą itp. Ponadto pominiemy wpływ odkształceń sprężystych towarzyszących pełzaniu oraz nie będziemy rozważali zagadnień związanych ze zjawiskiem relaksacji.

Spośród licznych schematyzacji wykresów doświadczalnych zależności (2.2) [80], w przykładach liczbowych będziemy przyjmowali prawo potęgowe

$$(2.5) \quad \varepsilon^* = \sigma^{*n} \quad \text{lub} \quad \sigma^* = \varepsilon^{*\mu},$$

w którym n oznacza całkowitą liczbę dodatnią (na ogół nieparzystą), a $\mu = 1/n$. Gdy $n = 1$ otrzymujemy liniowo-sprężyste zachowanie się materiału, gdy natomiast $n \rightarrow \infty$ opisany jest zakres sztywno-plastyczny.

Jako funkcję celu (koszt) można rozważać tu ogólny funkcjonal [4]

$$(2.6) \quad I = \int_0^l \psi_1(x, \sigma, \sigma', \sigma'', \dots, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, F, F', \dots) dx$$

zależny od zmiennej x , naprężeń i ich pochodnych, odkształceń i ich pochodnych oraz pola powierzchni przekroju i jego pochodnych.

Jako dodatkowe warunki ograniczające musimy przyjąć równanie różniczkowe równowagi

$$(2.7) \quad (\sigma F)' + qF = 0$$

oraz warunek ustalający całkowitą objętość słupa

$$(2.8) \quad \int_0^l F dx = V = \text{const.}$$

Równanie (2.8) może być zastąpione przez warunek ustalający całkowitą masę słupa tylko w przypadku, gdy masa właściwa materiału jest stała

$$(2.9) \quad \varrho \int_0^l F dx = M, \quad \varrho(x) = \text{const.}$$

Zagadnienie optymalizacji polega tu na znalezieniu takiej funkcji $F(x)$, która minimalizuje funkcjonal (2.6), przy warunku w postaci równania różniczkowego (2.7) oraz warunku izoperymetrycznym (2.8) albo (2.9).

3. Rozwiązanie ogólne

Postępując zgodnie ze znanymi regułami rachunku wariacyjnego [6], [4], dochodzimy do skomplikowanego układu równań różniczkowych z nieznanym funkcyjnym mnożnikiem Lagrange'a.

W niniejszej pracy przyjmujemy nieco inny sposób rozwiązania zagadnienia, polegający na otrzymaniu równania Eulera-Lagrange'a w postaci jednego równania różniczkowo-całkowego i przybliżonym jego rozwiązaniu. Sposób ten prowadzi szybko do wystarczająco dokładnych wyników.

Ponieważ odkształcenie ε i jego pochodna mogą być wyrażone zawsze za pomocą naprężenia σ i jego pochodnej z przyjętego prawa fizycznego (2.2), zatem do dalszych rozważań przyjmujemy funkcjonal (2.6) w nieco mniej ogólnej postaci

$$(3.1) \quad I = \int_0^l \psi(x, \sigma, F, F') dx.$$

Również równanie różniczkowe równowagi (2.7) zapiszemy w postaci ważnej dla wirującego słupa o stałej gęstości ϱ , przedstawionego na rys. 1. (w tym przypadku $q(x) = \varrho \omega^2 x$)

$$(3.2) \quad \sigma(x) = \frac{1}{F} \left[Q\omega^2 l + \int_x^l q(\zeta) F(\zeta) d\zeta \right].$$

Przedstawiony problem minimalizacji funkcjonau (3.1) z warunkiem (3.2) należy do szerszej klasy problemów minimalizacji funkcjonauów typu (3.1) z warunkiem

$$(3.3) \quad \sigma(x) = \varphi_1(F) + \varphi_2(F) \int_x^l \varphi_3(\zeta, F, F') d\zeta,$$

w którym φ_1 , φ_2 i φ_3 są danymi funkcjami ciągłymi swoich argumentów. Poszukiwana funkcja $F(x)$ znajduje się tu również pod znakiem całki. Po prostych obliczeniach otrzymujemy równanie Eulera-Lagrange'a w postaci

$$(3.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial F} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial F'} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{d\varphi_1}{dF} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \frac{d\varphi_2}{dF} \left(\int_x^l \varphi_3 d\zeta \right) + \\ + \frac{\partial \varphi_3}{\partial F} \left(\int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \varphi_2 d\zeta \right) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \varphi_3}{\partial F'} \left(\int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \varphi_2 d\zeta \right) \right] = 0.$$

Dalszy ciąg obliczeń zależy od przyjętej funkcji celu (kilka możliwości przedstawiono w pracy [4]); ograniczymy się tu do minimalizacji przemieszczenia końca słupa

4. Minimalizacja przemieszczenia końca słupa

Będziemy zatem poszukiwali takiego kształtu pręta, wśród prętów o stałej masie (2.9), który charakteryzuje się minimalnym przemieszczeniem końca $x = l$, równym

$$(4.1) \quad u_l = \int_0^l \varepsilon(x) dx = \int_0^l \varepsilon_0(x) \mathcal{F}(\sigma^*) dx = \int_0^l \psi[x, \mathcal{F}(\sigma^*)] dx$$

lub takiego kształtu wśród prętów o stałym przemieszczeniu końca $x = l$, równym u_l , który charakteryzuje się minimalną masą (objętością).

Optymalny kształt jest tu wyznaczony przez układ trzech równań: (3.4), (3.2), i (2.9) albo (4.1), które przyjmują postać:

$$(4.2) \quad \left[Q\omega^2 l + \varrho\omega^2 \int_x^l \zeta F(\zeta) d\zeta \right] \mathcal{F}'(\sigma^*) - F^2 \left[\lambda + \varrho\omega^2 x \int_0^x \frac{\mathcal{F}'(\sigma^*)}{F} d\zeta \right] = 0,$$

$$(4.3) \quad \sigma^* = \frac{1}{\sigma_0 F} \left[Q\omega^2 l^2 + \varrho\omega^2 \int_x^l \zeta F(\zeta) d\zeta \right],$$

$$(4.4) \quad \varrho \int_0^l F dx = M \quad \text{albo}$$

$$(4.5) \quad \int_0^l \varepsilon(x) dx = u_l,$$

gdzie M jest daną masą pręta, a u_l jest danym przemieszczeniem końca pręta, $\mathcal{F}'(\sigma^*) = d\mathcal{F}/d\sigma^*$, λ jest stałym mnożnikiem Lagrange'a.

W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że pole powierzchni przekroju pręta jest iloczynem pewnego przekroju podstawowego F_0 i bezwymiarowej funkcji $\Phi(x)$

$$(4.6) \quad F(x) = F_0 \Phi(x)$$

oraz wprowadzimy następujące bezwymiarowe wielkości:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \xi &= x/l, & \sigma_0^* &= \frac{Q\omega^2 l}{\sigma_0 F_0}, & \mu &= \frac{\rho F_0 l}{Q}, \\ \bar{M} &= \frac{M}{\rho F_0 l}, & \bar{u}_l &= \frac{u_l}{\varepsilon_0 l}, & \varepsilon_0 &= \text{const}, \sigma_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.6) i (4.7) do równań (4.2)—(4.5) otrzymujemy:

$$(4.8) \quad \mathcal{F}'(\sigma^*) \left[1 + \mu \int_{\xi}^1 \zeta \Phi(\zeta) d\zeta \right] - \Phi^2 \left[\Lambda + \mu \xi \int_0^{\xi} \frac{\mathcal{F}'(\sigma^*)}{\Phi} d\zeta \right] = 0$$

$$(4.9) \quad \Phi \sigma^* = \sigma_0^* \left[1 + \mu \int_{\xi}^1 \zeta \Phi(\zeta) d\zeta \right],$$

$$(4.10) \quad \int_0^1 \Phi(\xi) d\xi = \bar{M}$$

albo

$$(4.11) \quad \int_0^1 \mathcal{F}(\sigma^*) d\xi = \bar{u}_l.$$

W równaniach powyższych stała μ charakteryzuje stosunek masy pręta do masy umieszczonej na jego końcu; w przypadku niewielkiej masy pręta w porównaniu z masą skupioną Q może być przyjęta jako mały parametr.

Rozwiążemy teraz układ równań (4.8)—(4.11) rozwijając niewiadome funkcje σ^* i Φ oraz stałą Λ na szeregi potęgowe ze względu na μ , opuszczając jednak wyższe od drugiej potęgi μ :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^*(\xi) + \mu \sigma_1^*(\xi) + \mu^2 \sigma_2^*(\xi) + \dots \\ \Phi(\xi) &= \Phi_0(\xi) + \mu \Phi_1(\xi) + \mu^2 \Phi_2(\xi) + \dots \\ \Lambda &= \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \mu^2 \Lambda_2 + \dots \end{aligned}$$

Funkcję \mathcal{F} charakteryzującą dowolne prawo fizyczne przedstawimy również w postaci szeregu potęgowego małego parametru

$$(4.13) \quad \mathcal{F}(\sigma^*) = \mathcal{F}(\sigma_0^*) + \mu \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_1^* + \mu^2 \left[\mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] + \dots$$

i analogicznie

$$(4.14) \quad \mathcal{F}'(\sigma^*) = \mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \mu \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* + \mu^2 \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] + \dots$$

Podstawiając (4.12) i (4.14) do układu równań (4.8)—(4.11) i przyrównując do zera wyrażenia przy kolejnych potęgach małego parametru μ otrzymujemy następujące układy równań algebraicznych na kolejne współczynniki: $\sigma_i^*(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$, Λ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$):

$$\mathcal{F}'(\sigma_0^*) - \Phi_0^2 \Lambda_0 = 0, \quad \Phi_0 - 1 = 0,$$

$$(4.15) \quad \int_0^1 \Phi_0 d\xi = \bar{M} \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \mathcal{F}(\sigma_0^*) d\xi = \bar{u}_1,$$

$$\mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* - 2\Phi_0 \Lambda_0 \Phi_1 = \Phi_0^2 \Lambda_1 + \Phi_0^2 \xi \int_0^\xi \frac{\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0} d\zeta - \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta,$$

$$(4.16) \quad \Phi_0 \sigma_1^* + \sigma_0^* \Phi_1 = \sigma_0^* \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta,$$

$$\int_0^1 \Phi_1 d\xi = 0 \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_1^* d\xi = 0,$$

$$\mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_2^* - 2\Phi_0 \Lambda_0 \Phi_2 = \Phi_1^2 \Lambda_0 + 2\Phi_0 \Phi_1 \Lambda_1 + \Phi_0^2 \Lambda_2 +$$

$$+ 2\Phi_0 \Phi_1 \xi \int_0^\xi \frac{\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0} d\zeta + \Phi_0^2 \xi \int_0^\xi \frac{\Phi_0 \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^* - \Phi_1 \mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{\Phi_0^2} d\zeta -$$

$$(4.17) \quad - \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} - \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \sigma_1^* \int_\xi^1 \Phi_0 \zeta d\zeta - \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \int_\xi^1 \Phi_1 \zeta d\zeta,$$

$$\Phi_0 \sigma_2^* + \sigma_0^* \Phi_2 = -\Phi_1 \sigma_1^* + \sigma_0^* \int_\xi^1 \Phi_1 \zeta d\zeta,$$

$$\int_0^1 \Phi_2 d\xi = 0 \quad \text{albo} \quad \int_0^1 \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \sigma_2^* + \frac{1}{2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \sigma_1^{*2} \right] d\xi = 0.$$

Całkowe warunki (4.15)₃, (4.16)₃, (4.17)₃ określają stałe Λ_i ; zależnie od tego czy przyjmie-my warunek ustalający masę pręta czy też przemieszczenie otrzymujemy różne postacie rozwiązania.

4.1. Warunek stałej masy pręta (4.10). W tym przypadku mamy:

$$(4.18) \quad \Phi_0 = 1, \quad \sigma_0^* = \frac{Q\omega^2 \rho l^2}{\sigma_0 M}, \quad F_0 = \frac{M}{\rho l}, \quad \mu = \frac{M}{Q},$$

$$(4.19) \quad \Phi_1 = a + b\xi^2, \quad \sigma_1^* = \sigma_0^*(c + d\xi^2), \quad \Lambda_1 = \frac{1}{3} \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*),$$

gdzie

$$a = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]}, \quad b = -\frac{9\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]},$$

$$c = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 2\sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]}, \quad d = \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}'''(\sigma_0^*)]};$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = & \frac{1}{[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]} \left\{ -A_2 + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - a^2 \right) + \right. \right. \\
& + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{6}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c - ac \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}c^2 \right) \left. \right] + \\
& + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(-\frac{3}{2}a - 2ab \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b - \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}d - ad - bc \right) + \right. \\
(4.20) & \left. + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) cd \right] \xi^2 + \\
& + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(-\frac{23}{12}b - b^2 \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{4}b - \frac{5}{6}d - bd \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}d^2 \right) \right] \xi^4 \left. \right\}, \\
\sigma_2^* = & \sigma_0^* \left[-\Phi_2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - ac \right) + \left(-\frac{1}{2}a - ad - bc \right) \xi^2 + \left(-\frac{1}{4}b - bd \right) \xi^4 \right], \\
A_2 = & \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(-a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{5}b^2 - \frac{2}{15}b \right) + \\
& + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{45}b - ac - \frac{1}{3}ad - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{5}bd \right) + \\
& + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}cd + \frac{1}{10}d^2 \right).
\end{aligned}$$

Dla prawa potęgowego (2.5) otrzymujemy następujące rozwiązania (tylko z pierwszymi poprawkami):

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi) &= 1 + \mu \frac{n+2}{2(n+1)} \left(\frac{1}{3} - \xi^2 \right) + \dots, \\
\sigma^* &= \sigma_0^* \left\{ 1 + \mu \left[\frac{2n+1}{6(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} \xi^2 \right] + \dots \right\}, \\
(4.21) \quad A &= n\sigma_0^{*(n-1)} \left[1 + \frac{1}{3}(n-1)\mu + \dots \right], \\
\sigma_0^* &= \frac{Q\omega^2 \rho l^2}{\sigma_0 M}.
\end{aligned}$$

Dokładniejsze rozwiązanie przedstawiamy w drugim przypadku.

4.2. Warunek stałego przemieszczenia (4.11). Otrzymujemy tu:

$$(4.22) \quad \Phi_0 = 1, \quad \sigma_0^* = \mathcal{F}_{-1}(\bar{u}_1), \quad A_0 = \mathcal{F}'(\sigma_0^*), \quad F_0 = \frac{Q\omega^2 l}{\sigma_0 \mathcal{F}_{-1}(\bar{u}_1)},$$

gdzie \mathcal{F}_{-1} oznacza funkcję odwrotną do \mathcal{F} .

$$(4.23) \quad \Phi_1 = a + b\xi^2, \quad \sigma_1^* = \sigma_0^*(c + d\xi^2), \quad A_1 = -\frac{2}{3}\mathcal{F}'(\sigma_0^*),$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{7\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, & b &= -\frac{9\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + 3\sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, \\
 c &= \frac{-\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}, & d &= \frac{3\mathcal{F}'(\sigma_0^*)}{6[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]}; \\
 \Phi_2 &= \frac{1}{[2\mathcal{F}'(\sigma_0^*) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*)]} \left\{ -A_2 + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(\frac{11}{6}a + \frac{1}{4}b - a^2 \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c - ac \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}c^2 \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(-\frac{3}{2}a + \frac{4}{3}b - 2ab \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}d - ad - bc \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) cd \right] \xi^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left(-\frac{23}{12}b - b^2 \right) + \sigma_0^* \mathcal{F}''(\sigma_0^*) \left(-\frac{1}{4}b - \frac{5}{6}d - bd \right) + \sigma_0^{*2} \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) \left(\frac{1}{2}d^2 \right) \right] \xi^4 \right\}, \\
 \sigma_2^* &= \sigma_0^* \left[-\Phi_2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - ac \right) + \left(-\frac{1}{2}a - ad - bc \right) \xi^2 + \left(-\frac{1}{4}b - bd \right) \xi^4 \right], \\
 A_2 &= \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \left\{ \left(\frac{2}{3}a - \frac{4}{45}b - a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{5}b^2 + 2ac + \frac{2}{3}ad + \frac{2}{3}bc + \frac{2}{5}bd \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma_0^{*2} \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \mathcal{F}'''(\sigma_0^*) - 2\sigma_0^* \mathcal{F}'(\sigma_0^*) \mathcal{F}''(\sigma_0^*) - \sigma_0^{*2} [\mathcal{F}''(\sigma_0^*)]^2}{[\mathcal{F}'(\sigma_0^*)]^2} \left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}cd + \frac{1}{10}d^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Dla prawa potęgowego (2.5) wzory (4.22) i (4.23) dają przybliżone rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\xi) &= 1 + \mu \left[\frac{3n+4}{6(n+1)} - \frac{n+2}{2(n+1)} \xi^2 \right] + \dots, \\
 \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* \left[1 + \mu \frac{1}{2(n+1)} \left(-\frac{1}{3} + \xi^2 \right) + \dots \right], \\
 A &= n\bar{u}_1^{\frac{n-1}{n}} \left(1 - \frac{2}{3}\mu + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Dokładniejsze wyniki przedstawimy w szczególnych przypadkach: a) materiału liniowo-sprężystego dla $n = 1$ i b) materiału sztywno-plastycznego dla $n \rightarrow \infty$.

a) *Materiał liniowo-sprężysty* $n = 1$. Po prostych obliczeniach znajdujemy stałe:

$$a = 7/12, \quad b = -3/4, \quad c = -1/12, \quad d = 1/4, \quad A_2 = 47/180,$$

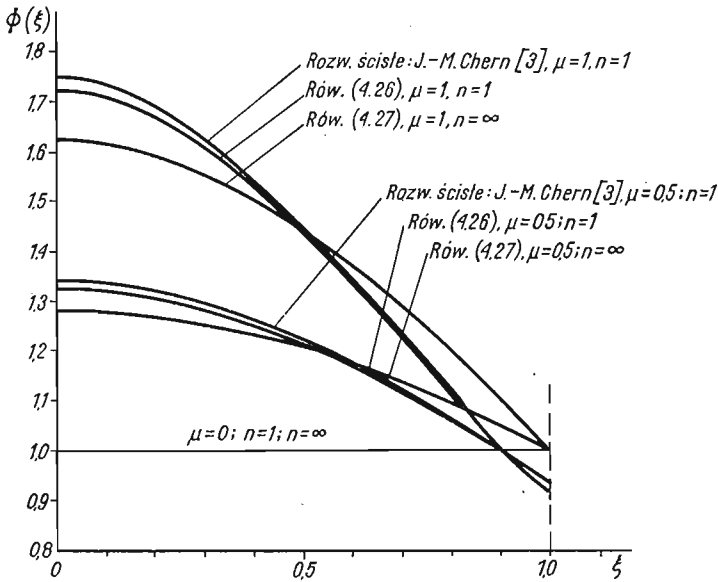
następnie drugie poprawki:

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= \frac{101}{720} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{21}{48} \xi^4, \\
 \sigma_0^* &= \frac{1}{80} \sigma_0^* (1 - 5\xi^4)
 \end{aligned}$$

oraz ostateczny wynik:

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= 1 + \mu \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{4} \xi^2 \right) + \mu^2 \left(\frac{101}{720} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{21}{48} \xi^4 \right) + \dots, \\ \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* \left[1 + \mu \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \xi^2 \right) + \mu^2 \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{16} \xi^4 \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Istnieje możliwość porównania wyników (4.26) z obliczeniami ścisłymi dla tego samego problemu, przedstawionymi w pracy CHERNA [3], otrzymanymi tylko w zakresie linio-wo-sprężystym. Okazuje się, że maksymalny błąd rozwiązań (4.26) dla wartości małego



Rys. 2

parametru $\mu = 1$ (dla $\xi = 0$) nie przekracza 1,8%. Należy przypuszczać, że również dla innych wartości wykładnika n oraz innych praw fizycznych błąd rozwiązania przybliżonego jest bardzo mały (dla dość małych μ np. $\mu \leq 1$).

b) *Material sztywno-plastyczny* $n \rightarrow \infty$. Przechodząc z n do nieskończoności obliczamy stałe:

$$a = 1/2, \quad b = -1/2, \quad c \sim -1/6n, \quad d \sim 1/2n, \quad A_2 \sim \sigma_0^{*(n-1)} \frac{11}{45} n,$$

następnie drugie poprawki do funkcji Φ i σ^* :

$$\Phi_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)^2, \quad \sigma_2^* = 0$$

oraz ostateczny wynik:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= 1 + \frac{1}{2}\mu(1-\xi^2) + \frac{1}{8}\mu^2(1-\xi^2)^2 + \dots, \\ \sigma^*(\xi) &= \sigma_0^* + \dots \end{aligned}$$

W tym przypadku (w stanie granicznym) możemy otrzymać rozwiązanie ściśle przyjmując $\sigma^* = \sigma_0^* = \text{const}$ i rozwiązując równanie (4.9). Poszukiwany optymalny kształt jest określony funkcją

$$(4.28) \quad \Phi = e^{\frac{1}{2}\mu(1-\xi^2)},$$

która dla niewielkich wartości μ może być rozwinięta w szereg (4.27). Optymalny kształt pręta przedstawiono na rys. 2 dla $\mu = 0$; $\mu = 0,5$; $\mu = 1,0$ oraz dla $n = 1$ i $n = \infty$; zależy on w sposób istotny od postaci prawa fizycznego.

Literatura cytowana w tekście

1. R. L. BARNETT, *Minimum weight design of beams for deflection*, J. of Eng. Mech., Proc. ASCE, EM 1, 87, (1961), 75-109.
2. R. L. BARNETT, *Minimum deflection design of uniformly accelerating cantilever beam*, J. Appl. Mech. 30, (1963) 466-467.
3. J. M. CHERN, *Optimal structural design for given deflection in presence of body forces*, Int. J. Solids Struct., 7 (1971) 373-382.
4. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, 5 (1975).
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej obciążonej ciężarem własnym przy nieliniowości fizycznej materiału*, Rozpr. Inż., 3, 24 (1976).
6. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
7. J. GRZYCZ, *Kształtowanie na największą sztywność słupów ścisłanych osiowo*, *Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, Część I, 132-139, PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków 1968.
8. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва 1966.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА

Предметом является оптимальное формирование стержня длины l с расположенной на его конце $x = L$ массой, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его другой конец $x = 0$.

Принято, что материал стержня проявляет нелинейную зависимость между напряжением и деформацией согласно физическому закону, который может описывать нелинейно-упругие, упруго-пластические или находящиеся в состоянии установившейся ползучести материалы. После общей постановки задачи принята функция цели в виде функционала, выражающего перемещение конца стержня, а ограничение — в виде заданного объема (в двойственной постановке).

Оптимальные формы стержня, полученные для степенного физического закона при разных значениях показателя n , показаны на рисунке. Они существенно зависят от вида физического закона.

Summary

OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN OF THE ROTATING ROD WITH PHYSICAL NONLINEARITY OF MATERIAL

The subject of the paper is minimal weight design of a rod of length l that carries a concentrated mass Q at $x = l$ and rotates at constant velocity ω about an axis through $x = 0$ that is perpendicular to the rod.

It has been assumed that material of the rod is characterized by nonlinear dependence between stress and strain. Physical law can describe nonlinearly-elastic, elastic-plastic as well as rheological behaviour of materials.

On the basis of the general formulation of the problem, optimal design of the rod for minimum axial displacement at $x = l$ has been done under the constraint that the volume is equal to the given value (in dual formulation).

The optimal shapes of the rod obtained for different values of exponent n in the case of power physical law, presented graphically, essentially depend on the form of the physical law.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1975 r.
