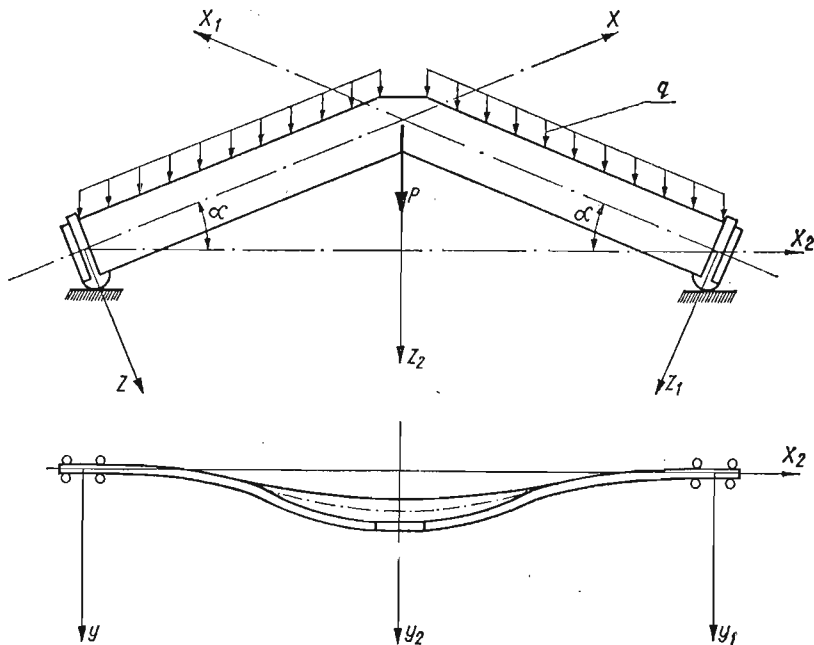


STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA BELKI O OSI ZAŁAMANEJ

ARNOLD WILCZYŃSKI (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania belki dwupodporowej, której oś tworzy linię łamaną (rys. 1). Przyjęto symetryczny układ ramion belki względem osi pionowej z_2 i ograniczono się do przypadku, w którym sztywność belki na skręcanie nieswobodne jest równa zero.



Rys. 1

Przyjęto, że belka poddana jest działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia pionowego q i pionowej siły skupionej P działającej wzdłuż osi symetrii z_2 .

O podporach założono, że uniemożliwiają obrót końców belki względem jej osi oraz względem osi z i z_1 .

Odnosnie do przekroju poprzecznego belki założono, że osie y i z prostokątnego układu x, y, z są głównymi centralnymi osiami bezwładności oraz że sztywność zginania względem osi y jest duża w porównaniu ze sztywnością względem osi z .

Celem pracy jest wyznaczenie pierwszych krytycznych wartości obciążenia $(P, ql)_k$ w zależności od kąta α nachylenia ramienia belki, stosunku wypadkowej obciążenia ciągłego do wartości siły skupionej i odległości miejsca przyłożenia obciążenia ciągłego od osi sił poprzecznych.

Przyjmując, że po utracie stateczności ramiona belki odkształcą się symetrycznie sprowadzono równania różniczkowe równowagi obojętnej ramienia belki do układu dwóch równań całkowych Volterry drugiego rodzaju, których rozwiązania przybliżone wyznaczono metodą iteracji. Na podstawie warunków brzegowych otrzymano następnie warunek służący do określenia obciążeń krytycznych.

Wyniki obliczeń numerycznych, dotyczące belek stalowych o przekroju w kształcie wydłużonego prostokąta, zestawiono w tablicach. W zakończeniu pracy podano przykład liczbowy.

2. Równania różniczkowe równowagi obojętnej

Konstrukcje tego typu, jak rozpatrywana w pracy belka, wykonuje się na ogół z dwóch symetrycznych ramion połączonych węzłem usztywnionym nakładkami. Przyjęto, że węzeł ten ma kształt trójkąta ABC (rys. 2) oraz że pionowa siła P jest zaczepiona w połowie jego wysokości (punkt E). Należy zaznaczyć, że punkt zaczepienia siły P , będącej wypadkową układu sił zewnętrznych działających na węzeł, może przyjmować w praktyce dowolne położenie na osi symetrii z_2 . Jednakże, w celu zmniejszenia liczby dowolnych parametrów występujących w pracy, przyjęto do dalszych rozważań, że miejscem zaczepienia siły P jest punkt E .

Zakładając idealną sztywność węzła, przy przyjętym jego kształcie i punkcie zaczepienia siły P , otrzymujemy model, który stosunkowo łatwo można opisać matematycznie.

Powyższe założenie o idealnej sztywności węzła nie jest oczywiście w zupełności zgodne z rzeczywistością mimo wzmocnień konstrukcyjnych (nakładek). Z uwagi jednak na proporcje wymiarowe układu jest do przyjęcia, zgodnie z zasadą de Saint-Venanta.

Przystępując do wyprowadzenia równań równowagi obojętnej należy zauważyć, że ze względu na symetrię układu, jak i obciążenia, pierwsza postać utraty stateczności będzie symetryczna względem osi y_2 (rys. 1).

Układ sił działających po utracie stateczności na oswobodzoną z więzów belkę przedstawiono na rys. 2, przy czym oznaczono:

M_x moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie xy ,

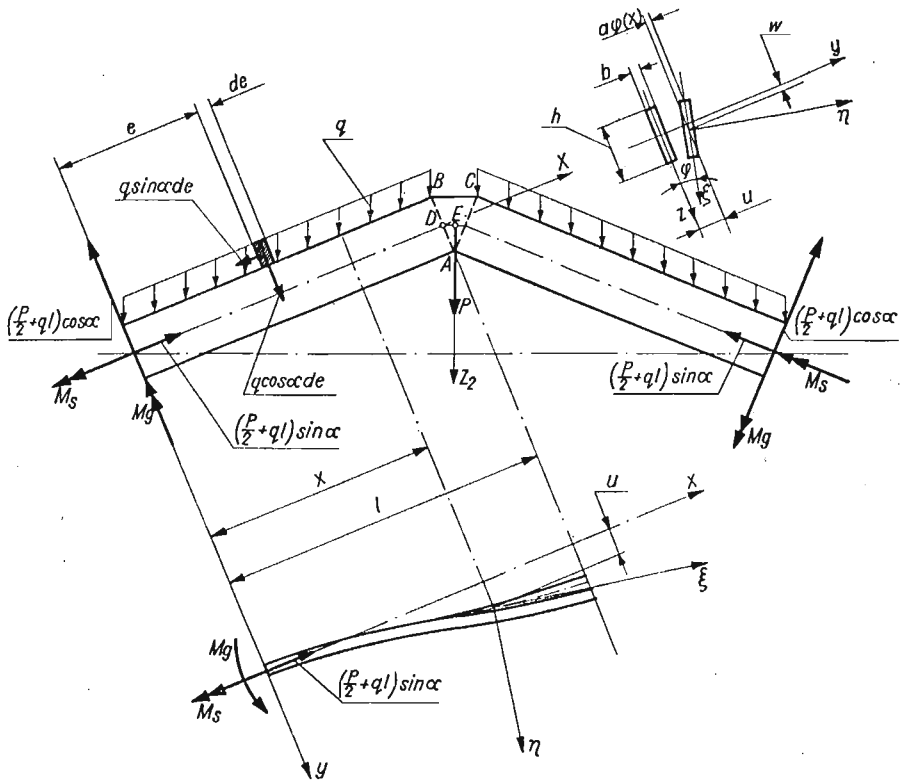
M_y moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie yz ,

a odległość od środka ciężkości przekroju do znajdującego się nad nim punktu przyłożenia obciążenia ciągłego, przy czym $0 \leq a \leq 1/2h$.

Dla $0 \leq x \leq l$ położenie dowolnego przekroju poprzecznego belki po utracie stateczności będzie określone następującymi składowymi:

- przemieszczeniem u środka ciężkości przekroju w kierunku osi y ,
- przemieszczeniem w środka ciężkości przekroju w kierunku osi z ,
- kątem obrotu φ przekroju w płaszczyźnie yz .

Przy tym przemieszczenie w jest pomijalnie małe z uwagi na założenie, że sztywność



Rys. 2

zginania względem osi \$y\$ jest znacznie większa od sztywności względem osi \$z\$. Dlatego w dalszym ciągu pracy składowa \$w\$ oraz jej pochodne nie będą uwzględniane.

Składowe momentów sił zewnętrznych działających na belkę wyrażają się w dowolnym miejscu \$x\$ wzorami:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -M_s + \left(\frac{P}{2} + ql\right)u(x)\cos\alpha - \int_0^x q[u(x) - u(e) - a\varphi(e)]\cos\alpha de, \\
 (2.1) \quad M_y &= -\left(\frac{P}{2} + ql\right)x\cos\alpha + \int_0^x q(x-e)\cos\alpha de + \int_0^x qa\sin\alpha de, \\
 M_z &= -M_\theta + \left(\frac{P}{2} + ql\right)u(x)\sin\alpha - \int_0^x q[u(x) - u(e) - a\varphi(e)]\sin\alpha de.
 \end{aligned}$$

Względem osi układu lokalnego \$\xi, \eta, \zeta\$, związanego ze zwichrzonym przekrojem w miejscu \$x\$, składowe momentów wynoszą:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad M_\xi &= M_x \cos(x, \xi) + M_y \cos(y, \xi) + M_z \cos(z, \xi), \\
 M_\eta &= M_x \cos(x, \eta) + M_y \cos(y, \eta) + M_z \cos(z, \eta), \\
 M_\zeta &= M_x \cos(x, \zeta) + M_y \cos(y, \zeta) + M_z \cos(z, \zeta).
 \end{aligned}$$

Występujące w powyższych równaniach cosinusy kierunkowe z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają wartości podane w tablicy 1.

Tablica 1. Cosinusy kątów między osiami x, y, z a osiami ξ, η, ζ

	x	y	z
ξ	1	u'	w'
η	$-u'$	1	φ
ζ	$-w'$	$-\varphi$	1

Równania równowagi belki w stanie zwichrzonym, po uwzględnieniu przyjętego we wstępie założenia, że sztywność deplanacji jest równa zero, z dokładnością do małych pierwszego rzędu są następujące:

$$(2.3) \quad EJ_{\zeta} \frac{d^2 u}{dx^2} = -M_{\zeta}, \quad GJ_k \frac{d\varphi}{dx} = -M_{\xi},$$

gdzie EJ_{ζ} oznaczają sztywność zginania belki względem osi ζ ,

GJ_k — sztywność skręcania belki względem osi ξ .

Po podstawieniu zależności (2.1) i (2.2) do równań (2.3) i pominięciu małych wyższego rzędu równania równowagi obojętnej przyjmą postać:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} EJ_{\zeta} u''(x) &= M_g + \left[q(x-l) - \frac{P}{2} \right] u(x) \sin \alpha + \left[q \left(\frac{x}{2} - l \right) - \frac{P}{2} \right] x \varphi(x) \cos \alpha + \\ &\quad + \left\{ \varphi(x) \int_0^x a de - \int_0^x [u(e) + a\varphi(e)] de \right\} q \sin \alpha, \\ GJ_k \varphi'(x) &= M_s + \left[q(x-l) - \frac{P}{2} \right] u(x) \cos \alpha + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] x u'(x) \cos \alpha - \\ &\quad - q \cos \alpha \int_0^x [u(e) + a\varphi(e)] de - q u'(x) \sin \alpha \int_0^x a de. \end{aligned}$$

Otrzymane równania są różniczkowo-całkowe, niedogodne do badań. Dlatego zróżniczkowano je, otrzymując układ równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} EJ_{\zeta} u''' + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] u' \sin \alpha + \left\{ \left[\frac{P}{2} - q \left(\frac{x}{2} - l \right) \right] x \cos \alpha - \right. \\ \left. - q a x \sin \alpha \right\} \varphi' + \left[\frac{P}{2} - q(x-l) \right] \varphi \cos \alpha = 0, \\ GJ_k \varphi'' + q a \varphi \cos \alpha - \left\{ \left[\frac{P}{2} - q \left(\frac{x}{2} - l \right) \right] x \cos \alpha - q a x \sin \alpha \right\} u'' + q a u' \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\beta = \frac{Pl^2}{\sqrt{EJ_\zeta GJ_k}}, \quad \gamma = \frac{ql^3}{\sqrt{EJ_\zeta GJ_k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\zeta}}, \quad \lambda = \frac{a}{l}$$

równania (2.5) przyjmą ostatecznie postać:

$$(2.6) \quad u''' + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} u' \sin \alpha + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} x \varphi' \cos \alpha - \\ - \lambda \gamma \frac{\omega}{l^2} x \varphi' \sin \alpha + \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \frac{\omega}{l^2} \varphi \cos \alpha = 0, \\ \varphi'' + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \varphi \cos \alpha - \left[\frac{\beta}{2} + \gamma \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right] \frac{x}{\omega l^2} u'' \cos \alpha + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} x u'' \sin \alpha + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} u' \sin \alpha = 0.$$

3. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla rozpatrywanej belki po utracie płaskiej postaci zginania wynikają ze sposobu podparcia jej końców, układu geometrycznego jej ramion, rozmieszczenia obciążenia i przemieszczenia sztywnego węzła.

Z założeń dotyczących sposobu podparcia końców belki wynikają trzy warunki brzegowe

$$(3.1) \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Symetria obciążenia oraz kształtu belki powodują symetryczne odkształcenie ramion belki względem osi y_2 (rys. 1). Aby zwichrzony układ pozostawał w równowadze, musi być spełniona, wynikająca z równań statyki, następująca zależność wiążąca momenty podporowe M_s i M_g

$$2M_g \sin \alpha + 2M_s \cos \alpha = Pu(l) + 2q \int_0^l [u(x) + a\varphi(x)] dx.$$

Rozpatrując równania (2.4) w miejscu $x = 0$ otrzymamy po uwzględnieniu warunków (3.1)

$$M_g = EJ_\zeta u''(0), \quad M_s = GJ_k \varphi'(0).$$

Ostatecznie otrzymujemy warunek w postaci

$$(3.2) \quad 2EJ_\zeta u''(0) \sin \alpha + 2GJ_k \varphi'(0) \cos \alpha - Pu(l) - 2q \int_0^l [u(x) + a\varphi(x)] dx = 0.$$

Z symetrii odkształcenia belki wynika, iż wektor kąta obrotu przekroju leżącego na osi symetrii z_2 musi być równoległy do osi x_2 . Stąd otrzymujemy kolejny warunek

$$(3.3) \quad u'(l) \cos \alpha - \varphi(l) \sin \alpha = 0.$$

4. Funkcje $u(x)$ i $\varphi(x)$

Korzystając z faktu, że funkcje $u(x)$ i $\varphi(x)$ wraz ze swymi pochodnymi są ciągłe w przedziale $\langle 0, l \rangle$, możemy napisać

$$(4.1) \quad u(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2}x^2u''(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u'''(t) dt,$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi''(t) dt.$$

Uwzględniając warunki brzegowe (3.1) i równania (2.6), oraz dokonując całkowania przez części znajdujemy:

$$(4.2) \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2u''(0) - \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \sin \alpha \int_0^x \left[\beta(x-t) + \frac{\gamma}{l}(x^2 - 4xt + 3t^2 + 2lx - 2t) \right] u(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \cos \alpha \int_0^x \left[\beta(xt - t^2) + \frac{\gamma}{l}(-xt^2 + t^3 + 2lxt - 2lt^2) \right] \varphi(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\omega}{l^2} \lambda \gamma \sin \alpha \int_0^x (x^2 - 4xt + 3t^2) \varphi(t) dt,$$

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{1}{\omega l^2} \left[\left(\frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{\gamma x}{2l} \right) \cos \alpha - \lambda \gamma \sin \alpha \right] xu(x) -$$

$$- \frac{1}{\omega l^2} \cos \alpha \int_0^x \left[\beta + \frac{\gamma}{l}(x - 3t + 2l) \right] u(t) dt + \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \sin \alpha \int_0^x u(t) dt - \frac{\lambda \gamma}{\omega l^2} \cos \alpha \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt.$$

Otrzymane równania stanowią układ równań całkowych Voltery drugiego rodzaju. W celu otrzymania ich rozwiązania przybliżonego zastosowano metodę kolejnych przybliżeń zgodnie ze schematem iteracyjnym

$$(4.3) \quad u_{n+1}(x) = u_0(x) + \int_0^x k_1(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha) u_n(t) dt + \int_0^x k_2(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) \varphi_n(t) dt,$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_0(x) + f_1(x, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) u_n(x) + \int_0^x k_3(x, t, \beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) u_n(t) dt +$$

$$+ \int_0^x k_4(x, t, \gamma, \omega, \alpha, \lambda) \varphi_n(t) dt,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, przy czym przyjęto

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^2u''(0), \quad \varphi_0(x) = x\varphi'(0).$$

Uzyskane rozwiązania mają postać

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u(x) &= u''(0)F_1 + \varphi'(0)F_2, \\ \varphi(x) &= u''(0)F_3 + \varphi'(0)F_4, \end{aligned}$$

gdzie F_i są szeregami potęgowymi zmiennej x , o współczynnikach zależnych od parametrów $\beta, \gamma, \omega, \alpha$ i λ .

Ze względu na dużą pracochłonność metody, przy wyznaczaniu funkcji $u(x)$ i $\varphi(x)$ ograniczono się do trzech kroków iteracyjnych.

5. Krytyczne wartości obciążenia belki

Parę krytycznych wartości obciążenia P i ql wyznaczmy z warunków brzegowych (3.2) i (3.3). Po wprowadzeniu do tych warunków zależności (4.4) otrzymamy układ dwóch równań liniowych jednorodnych względem $u''(0)$ i $\varphi'(0)$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u''(0)A_{1,1} + \varphi'(0)A_{1,2} &= 0, \\ u''(0)A_{2,1} + \varphi'(0)A_{2,2} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $A_{i,k} = f(\beta, \gamma, \omega, \alpha, \lambda)$.

Tablica 2. Współczynnik stateczności β w zależności od α, λ i γ/β

$\frac{\gamma}{\beta}$	$\lambda \backslash \alpha$	$\sin \alpha$					
		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
		0°	5°45'	17°28'	30°	44°26'	64°10'
0	0	6,32	6,07	5,64	5,24	4,80	4,29
	0,05	—	—	—	—	—	—
0,2	0	5,18	5,00	4,71	4,44	4,15	3,78
	0,05	5,15	4,98	4,69	4,43	4,14	3,78
0,5	0	4,07	3,95	3,76	3,60	3,43	3,20
	0,05	4,03	3,91	3,74	3,59	3,42	3,19
1	0	2,99	2,92	2,82	2,74	2,65	2,54
	0,05	2,95	2,88	2,79	2,72	2,64	2,53
2	0	1,96	1,92	1,87	1,85	1,82	1,79
	0,05	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,79
5	0	0,96	0,94	0,93	0,93	0,94	0,95
	0,05	0,94	0,93	0,92	0,93	0,94	0,95

Aby zachodziła utrata stateczności, wielkości $u''(0)$ i $\varphi'(0)$ muszą być różne od zera, zatem wyznacznik charakterystyczny układu (5.1) musi być równy zeru

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Parę krytycznych wartości obciążenia P i qI otrzymamy dla danych wielkości ω , α , λ i γ/β obliczając najmniejszy dodatni pierwiastek równania (5.2). Mając zatem pierwiastek β lub γ , obliczony dla danych ω , α , λ i γ/β , możemy napisać

$$(5.3) \quad P_{kr} = \frac{\beta \sqrt{EJ_{\zeta} G J_k}}{l^2}, \quad (qI)_{kr} = \frac{\gamma \sqrt{EJ_{\zeta} G J_k}}{l^2}.$$

Obliczenia wartości obciążeń krytycznych przeprowadzono dla:

$$\omega = 1,245, \quad \lambda = 0 \text{ i } \lambda = 0,05, \quad \sin \alpha = 0 \div 0,9,$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = 0 \div 5 \text{ i } \frac{\beta}{\gamma} = 0 \div 5.$$

Przyjęta wartość $\omega = 1,245$ odpowiada belkom stalowym mającym przekrój poprzeczny w kształcie wydłużonego prostokąta. Uwzględniając bowiem

$$J_{\zeta} = \frac{hb^3}{12}, \quad J_k = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right) \approx \frac{hb^3}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Tablica 3. Współczynnik stateczności γ w zależności od α , λ i β/γ

$\frac{\beta}{\gamma}$	$\lambda \backslash \alpha$	$\sin \alpha$					
		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
		0°	5°45'	17°28'	30°	44°26'	64°10'
0	0	5,64	5,57	5,55	5,64	5,81	6,05
	0,05	5,49	5,43	5,46	5,59	5,78	6,04
0,2	0	4,80	4,72	4,65	4,66	4,70	4,76
	0,05	4,68	4,63	4,59	4,62	4,68	4,75
0,5	0	3,92	3,83	3,74	3,69	3,65	3,59
	0,05	3,83	3,77	3,70	3,66	3,63	3,58
1	0	2,99	2,92	2,82	2,74	2,65	2,54
	0,05	2,95	2,88	2,79	2,72	2,64	2,53
2	0	2,03	1,97	1,88	1,80	1,71	1,60
	0,05	2,01	1,96	1,87	1,79	1,71	1,60
5	0	1,04	1,00	0,94	0,89	0,83	0,76
	0,05	1,03	0,99	0,94	0,89	0,83	0,76

i przyjmując dla stali $\nu = 0,29$, znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_t}} = \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} = 1,245.$$

Wartość $\lambda = 0$ ($\lambda = a/l$) odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego wzdłuż osi belki, natomiast wartość $\lambda = 0,05$ odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego na górnej krawędzi belki ($a = 1/2h$) w przypadku, gdy $h = 0,1l$.

Zestawienie obliczonych współczynników stateczności β i γ podano w tablicach 2 i 3.

6. Ocena dokładności wyników

Uzyskane wyniki wskutek zastosowania skończonej liczby iteracji (stosunkowo małej, $n = 3$) są obarczone pewnym błędem. Chcąc, choć w przybliżeniu, określić dokładność tych wyników porównano niektóre z nich z wartościami ścisłymi. I tak, w przypadku $\gamma = 0$ otrzymana wartość współczynnika β przy $\alpha = 0^\circ$ jest o 4,9% mniejsza od wartości dokładnej, a w przypadku $\beta = 0$, $\lambda = 0$ otrzymana wartość współczynnika γ jest przy $\alpha = 0^\circ$ mniejsza od wartości ścisłej o około 5%. Innych przypadków nie porównywano ze względu na brak odpowiednich danych w literaturze. Można przypuszczać, że błędy pozostałych wyników będą tego samego rzędu. Przy tym dla kątów α różnych od zera wyniki będą obarczone dodatkowym błędem wynikającym z niedoskonałości modelu przyjętego do opisu matematycznego rozpatrywanego zagadnienia. Jednakże, ze względu na proporcje wymiarowe tego typu belek, błąd ten, zgodnie z zasadą de Saint Venanta, będzie niewielki.

Oczywiście, zwiększenie liczby iteracji polepszyłoby dokładność uzyskanych wyników. Przeprowadzenie czterokrotnej iteracji zwiększyłoby jednak znacznie i tak już pracochłonne obliczenia. Jednakże w jednym przypadku ($\gamma = 0$, $\alpha = 0$) wykonano obliczenia przy czterech iteracjach. Wartości współczynnika β dla tego przypadku, wyliczone przy różnych ilościach iteracji, są następujące:

$$\beta = 5,75 \text{ — przy 2 iteracjach,}$$

$$\beta = 6,32 \text{ — przy 3 iteracjach,}$$

$$\beta = 6,62 \text{ — przy 4 iteracjach.}$$

Natomiast wartość ścisła wynosi $\beta = 6,65$. Zatem błędy powyższych wyników będą wynosić

$$\Delta\beta = 13,6\% \text{ — przy 2 iteracjach,}$$

$$\Delta\beta = 4,9\% \text{ — przy 3 iteracjach,}$$

$$\Delta\beta = 0,5\% \text{ — przy 4 iteracjach.}$$

Jak widać, proces iteracji jest szybkozbieżny.

7. Przykład liczbowy

Wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia belki o stałym przekroju (rys. 1) przy następujących danych:

$$b = 1,5 \text{ cm}, \quad h = 25 \text{ cm}, \quad l = 250 \text{ cm}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad ql/P = 0,5,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2, \quad \omega = 1,245.$$

Dla $\gamma/\beta = ql/P = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$ oraz $\lambda = 0,5 \cdot h/l = 0,05$ znajdujemy z tablic 2 i 3

$$\beta = 3,59, \quad \gamma = 1,79.$$

Wartości obciążeń krytycznych, obliczone na podstawie (5.3), wyniosą

$$P_{kr} = 10,30 \text{ kN}, \quad (ql)_{kr} = 5,15 \text{ kN}.$$

Gdyby przyjąć $\lambda = 0$, otrzymalibyśmy

$$\beta = 3,60, \quad \gamma = 1,80$$

oraz

$$P_{kr} = 10,33 \text{ kN}, \quad (ql)_{kr} = 5,17 \text{ kN}.$$

Wartości te są większe o 0,3% od obliczonych przy uwzględnieniu λ .

Maksymalne normalne naprężenia krytyczne w belce osiągną wartość

$$\sigma_{kr} = 110 \text{ MN/m}^2.$$

W przypadku stali konstrukcyjnych, dla których $k_\sigma \geq 110 \text{ MN/m}^2$, obliczenie obciążenia belki na podstawie k_σ naraziłoby ją więc na utratę stateczności.

Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
2. S. WIŚNIEWSKI, *Stateczność płaskiej postaci zginania belki ściśkanej poosiowo siłami przyłożonymi na jej końcach*, Arch. Bud. Masz., 2, 11 (1964).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА БАЛКИ
С ПЕРЕЛОМЛЕННОЙ ОСЬЮ

В работе рассмотрена задача об устойчивости плоской формы изгиба балки, ось которой имеет излом в вертикальной плоскости. Наклонные участки балки симметричны, нагрузка состоит из равномерно распределенной вертикальной и сосредоточенной силы приложенной в жестком узле, соединяющем наклонные участки.

Принято, что оба конца балки оперты таким образом, что их вращение возможно лишь вокруг осей, перпендикулярных к плоскости, в которой расположена ось балки. Жесткость балки на несвободное скручивание не учитывается.

После приведения дифференциальных уравнений нейтрального равновесия к интегральным уравнениям Вольтерра найдены приближенные решения. На основании граничных условий рассчитаны критические значения нагрузок в зависимости от следующих параметров: угла наклона оси балки, отношения равнодействующей сплошной нагрузки к величине сосредоточенной силы и параметра, определяющего способ приложения сплошной нагрузки.

S u m m a r y

STABILITY OF PLANE FORM OF BENDING OF A BEAM WITH THE DEFLECTED AXIS

In the paper the problem of stability of plane form of bending of a beam with the vertically deflected axis is considered. Authors' considerations deal with the symmetrical system of the arms of the beam loaded by uniformly distributed vertical loads and by a vertical force applied to the rigid node connecting the two arms.

The both beam ends are supported in such a way that their rotation is possible only around the axis perpendicular to the plane in which the axis of the beam is placed. The problem is limited to beams of negligible rigidity for constrained torsion.

After reducing the differential equations of neutral equilibrium to the Volterra-type integral equations, approximate solutions are obtained. Then, by using the boundary conditions, the critical load values as functions of the following parameters are calculated: inclination angle of the beam arm, the ratio of the resultant of the uniform load to the concentrated force, and the parameter describing the manner the uniform load is applied.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1975 r.
