

ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW DYNAMIKI PŁYT PROSTOKĄTNYCH NA PODSTAWIE ZMODYFIKOWANEJ METODY SIŁ NOWACKIEGO

WACŁAW MIERZEJEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Ścisłe, zamknięte rozwiązania dynamiki płyt prostokątnych dotyczą przypadków podparcia swobodnego na dwu przeciwległych brzegach. Istnieje bardzo obszerna literatura poświęcona przybliżonym metodom obliczania częstości i postaci drgań własnych płyt. Do rozwiązywania problemów dynamiki płyt stosowane są takie metody, jak: Rayleigha-Ritza, Galerkina, szeregów, różnic skończonych oraz elementów skończonych. W wielu pracach ugięcie aproksymuje się funkcjami belkowymi. Wymienić tu można takie prace, jak [2] i [3]. W pracy [4] autorzy stosują, na równi z funkcjami belkowymi, wielomiany. W opublikowanej w 1962 r. pracy [5] uzyskano wyniki przy zastosowaniu metody wykorzystującej szeregi trygonometryczne. Ogólne rozwiązanie dla płyt prostokątnych z dowolnymi warunkami brzegowymi z wykorzystaniem szeregów trygonometrycznych opracował KĄCZKOWSKI [1]. Niezależnie od faktu opublikowania dużej liczby prac trudno uznać problematykę dynamiki płyt za zamkniętą. Istniejące metody, mimo obecnego poziomu techniki obliczeniowej, nie zawsze pozwalają na osiągnięcie efektywnych wyników. Stosowanie funkcji belkowych w metodach wariacyjnych nie wydaje się być z teoretycznego punktu widzenia przekonujące, ze względu na zasadnicze różnice w sformułowaniu problemów płyt i belek. W przypadku płyt z brzegami swobodnymi, funkcje belkowe nie spełniają naturalnych warunków brzegowych, stąd druga pochodna w kierunku normalnym szeregu opisującego ugięcie płyty nie jest jednostajnie zbieżna do odpowiedniej pochodnej funkcji ugięcia. W metodzie opracowanej przez CLASSENA i THORNA [5] spełnia się w sposób przybliżony zarówno równanie różniczkowe, jak i warunki brzegowe.

W przypadku stosowania dotychczasowych metod, wykorzystujących szeregi trygonometryczne, powstają duże trudności przy obliczaniu sił wewnętrznych, spowodowane wolną zbieżnością lub wręcz rozbieżnością szeregów je opisujących.

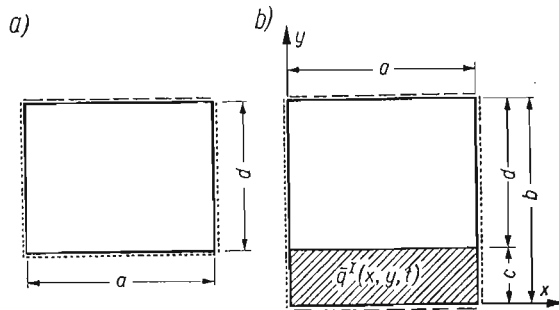
Tematem przedstawionej pracy jest sformułowanie metody, w której rozwiązania zagadnień drgań płyt swobodnych i obciążonych uzyskuje się poprzez rozpatrzenie drgań wymuszonych płyt zastępczych o znanych częstościach i postaciach drgań własnych. Obliczenia oparte są na zmodyfikowanej metodzie sił W. NOWACKIEGO.

2. Opis metody

Równanie różniczkowe drgań swobodnych płyt cienkich ma postać

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w - k^4 w = 0.$$

W przypadku warunków brzegowych, dla których nie jest znane ściśle rozwiązanie (2.1), można dla znalezienia częstości i postaci drgań własnych rozpatrzeć drgania wymuszone płyty zastępczej o dwu przeciwległych brzegach swobodnie podpartych, o znanych częstościach i postaciach drgań własnych. Ma ona większe wymiary niż płyta właściwa, której postaci są poszukiwane. Dla prostoty wstępnych rozważań zakłada się, że płyta właściwa (rys. 1a) ma z trzech stron te same warunki brzegowe, co płyta zastępcza (rys. 1b), przy



Rys. 1. Schemat realizacji warunków brzegowych przy pomocy obciążenia uzupełniającego

czym jeden brzeg jest swobodnie podparty. Brzegi z dowolnymi warunkami brzegowymi zaznaczone są na rysunkach kropkami. Płyta zastępcza poddana jest działaniu harmonicznie zmiennego w czasie obciążenia $\bar{q}^I(x, y, t) = q^I(x, y) \sin \omega t$, zwanego dalej obciążeniem uzupełniającym. Obciążenie to spełnia następujący warunek:

$$(2.2) \quad q^I(x, y) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad c \leq y \leq b.$$

Szczególnym przypadkiem obciążenia uzupełniającego może być obciążenie rozłożone wzdłuż linii prostej, jakie jest stosowane w metodzie NOWACKIEGO.

Aby wykazać możliwość realizacji warunków brzegu swobodnego zakłada się, że po myślowym rozcięciu płyty zastępczej wzdłuż linii $y = c$, powstałe w wyniku tego brzegi obu płyt pozostają swobodne. Niech obie części płyty zastępczej drgają z częstością własną płyty nieobciążonej. Obciążenie $q^I(x, y)$ należy dobrać tak, aby uzyskać następujące zależności między funkcjami ugięcia płyty swobodnej i obciążonej:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w_{\text{obc.}}|_{y=c} &= w_{\text{swob.}}|_{y=c}, \\ \frac{\partial w_{\text{obr.}}}{\partial y} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial w_{\text{swob.}}}{\partial y} \Big|_{y=c}. \end{aligned}$$

Ze związków (2.3) otrzymać można

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_{\text{obc.}}}{\partial x^2} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial^2 w_{\text{swob.}}}{\partial x^2} \Big|_{y=c}, \\ \frac{\partial^3 w_{\text{obc.}}}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=c} &= \frac{\partial^3 w_{\text{swob.}}}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=c}. \end{aligned}$$

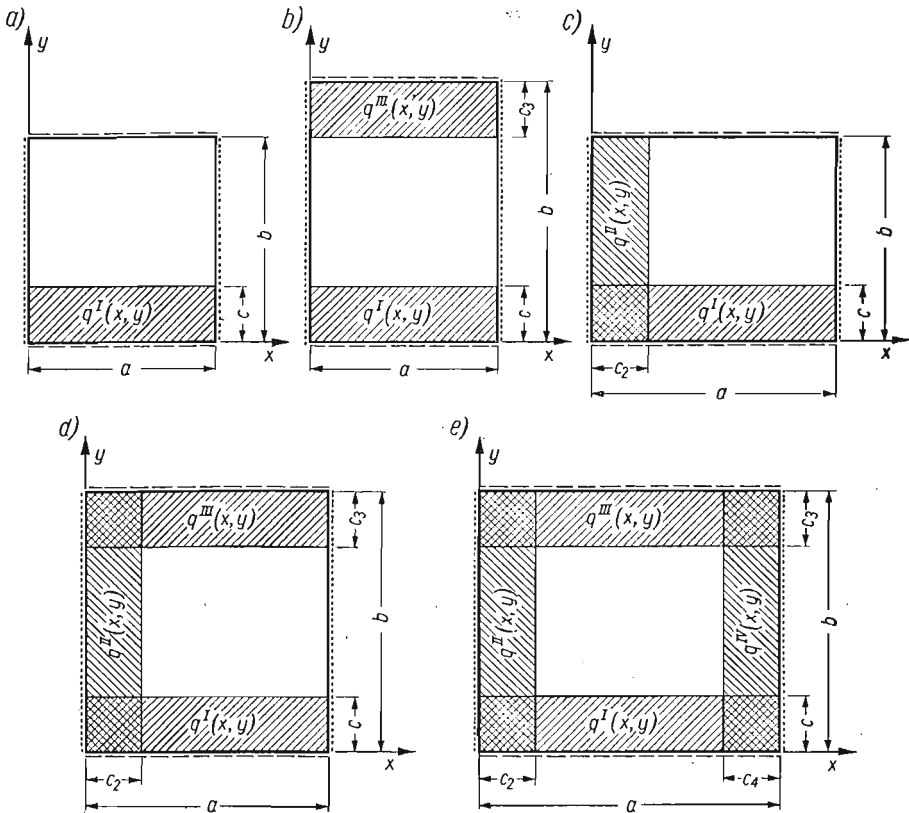
Zgodnie z przyjętym założeniem, obie płyty spełniają dla $y = c$ warunki brzegu swobodnego. Uwzględniając w tych warunkach równania (2.4) otrzymano:

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 w_{\text{obc.}}}{\partial y^2} \Big|_{y=c} = \frac{\partial^2 w_{\text{swob.}}}{\partial y^2} \Big|_{y=c},$$

$$\frac{\partial^3 w_{\text{obc.}}}{\partial y^3} \Big|_{y=c} = \frac{\partial^3 w_{\text{swob.}}}{\partial y^3} \Big|_{y=c}.$$

Spełnienie związków (2.3) implikuje zatem zależności (2.5). Oznacza to możliwość «bezsilowego zszycia» obu części płyty zastępczej przy takim doborze obciążenia uzupełniającego, przy którym spełnione są związki (2.3).

Podobnie wykazać można, że przez odpowiedni dobór obciążenia realizuje się stany odpowiadające dowolnym warunkom brzegowym w dwu lub więcej przekrojach płyty zastępczej, zarówno w rozpatrywanym przypadku drgań swobodnych, jak i przy drganiach wymuszonych. Wszystkie możliwe schematy zastępcze pokazano na rys. 2. Jeżeli płyta



Rys. 2. Schematy zastępcze

właściwa ma przynajmniej jeden brzeg swobodnie podparty, można dobrać płytę zastępczą z takimi samymi warunkami na trzech brzegach, jak warunki płyty właściwej (rys. 2a). Zachodzi wówczas konieczność zrealizowania warunków brzegowych w jednym tylko przekroju.

3. Analiza obciążeń uzupełniających

W poniższych rozważaniach ograniczono się do rozpatrywania drgań swobodnych oraz wymuszonych, ustalonych. Dla zrealizowania warunków brzegowych w przekroju równoległym do podpartych swobodnie brzegów płyty zastępczej można przyjąć amplitudę obciążenia w postaci

$$(3.1) \quad q^I(x, y) = q_1^I(x, y) + q_2^I(x, y),$$

przy czym funkcje $q_i^I(x, y)$, gdzie $i = 1, 2$ powinny umożliwiać spełnienie dwóch warunków brzegowych. W dalszych rozważaniach założono taką budowę tych funkcji

$$(3.2) \quad q_i^I(x, y) = f_i^I(x)g_i^I(y),$$

która umożliwia realizację warunku (2.2) przez odpowiednią konstrukcję funkcji $g_i^I(y)$

$$(3.3) \quad g_i^I(y) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad c \leq y \leq b.$$

Funkcje $g_i^I(y)$ można założyć dowolnie, żądając jedynie spełnienia warunku (3.3). Szukanymi funkcjami, które pozwolą zrealizować dwa warunki brzegowe w przekroju $y = c$ są funkcje $f_i^I(x)$. Obciążenie uzupełniające przedstawić można jako następujący szereg postaci drgań własnych $W_{mn}(x, y)$ płyty zastępczej:

$$(3.4) \quad q_i^I(x, y) = \sum_m \sum_n b_{mn}^{II} W_{mn}(x, y),$$

przy czym $W_{mn}(x, y) = X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y$. Mnożąc obie strony związku (3.4) przez $\sin(r\pi/b)y$, gdzie r dowolna liczba naturalna, następnie całkując w przedziale $0 \leq y \leq b$ przy uwzględnieniu (3.2) można otrzymać

$$(3.5) \quad f_i^I(x) = \sum_m c_{mr}^{II} X_{mr}(x),$$

gdzie

$$c_{mr}^{II} = \frac{b_{mr}^{II}}{a_r^{II}},$$

a_r^{II} jest współczynnikiem rozwinięcia w szereg sinusowy funkcji $g_i^I(y)$. Ponieważ związek (3.5) spełniony jest dla dowolnego r , można napisać następujące zależności:

$$(3.6) \quad \sum_k c_{kn}^{II} X_{kn}(x) = \sum_k c_{kr}^{II} X_{kr}(x).$$

Mnożąc obie strony (3.6) przez $X_{mn}(x)$ oraz całkując w przedziale $(0, a)$ otrzymuje się ostatecznie

$$(3.7) \quad c_{mn}^{II} = \sum_k c_{kr}^{II} f_{mn}^k,$$

gdzie

$$f_{mn}^k = \frac{1}{a} \int_0^a X_{kr}(x) X_{mn}(x) dx.$$

Za pomocą związków (3.7) można wyrazić wszystkie współczynniki c_{mn}^{II} przy $n \neq r$ przez c_{mr}^{II} .

Na szybkość zbieżności szeregu opisującego funkcje $g_l^I(y)$ można wpływać realizując ciągłość tej funkcji i jej k kolejnych pochodnych w przedziale $0 \leq y \leq b$ oraz spełniając związki:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} g_l^I(y)|_{y=0} &= 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, t, \\ \left. \frac{d^{2j} g_l^I(y)}{dy^{2j}} \right|_{y=0} &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} g_l^I(y)|_{y=c} &= 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k, \\ \left. \frac{d^j g_l^I(y)}{dy^j} \right|_{y=0} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym dla k parzystego $t = k/2$, dla k nieparzystego $t = (k-1)/2$.

Powyżej sformułowane warunki dotyczące funkcji $g_l^I(y)$ są warunkami koniecznymi szybkiej zbieżności szeregu obciążenia uzupełniającego (3.4). Wynika to stąd, że ustalając wartość $x = l$, gdzie $l \in (0, a)$ można związek (3.4) zapisać jako pojedynczy szereg trygonometryczny, którego zbieżność będzie wolniejsza od zbieżności szeregu opisującego funkcję $g_l^I(y)$. Zbieżność szeregów obciążeń można zwiększać spełniając warunki (3.8) i (3.9). Szybkość malenia początkowych wyrazów tych szeregów w znacznym stopniu zależy od wartości stosunku c/b . Zbieżność szeregów opisujących funkcje $f_l^I(x)$ związana jest z postacią dobieranych funkcji $g_l^I(y)$, zależy natomiast bezpośrednio od realizowanych warunków brzegowych.

Istnieje oczywisty związek między zbieżnością szeregów opisujących funkcje składowe obciążeń uzupełniających oraz szeregów wyrażających ugięcia, wywołane tymi obciążeniami

$$(3.10) \quad w_l^I(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_m \sum_n \frac{a_n^{II} c_{mn}^{II}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} W_{mn}(x, y),$$

gdzie ω_{mn} oznaczają częstotliwości własne płyty zastępczej.

Uwzględniając związki (3.7) można zapisać (3.10) w postaci

$$(3.11) \quad w_l^I(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_k c_{kr}^{II} \left[\frac{a_r^{II}}{\omega_{kr}^2 - \omega^2} W_{kr}(x, y) + \sum_{n \neq r} \sum_m \frac{a_n^{II}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} f_{mn}^k W_{mn}(x, y) \right].$$

W przypadku realizowania warunków brzegowych w przekroju prostopadłym do dwu podpartych swobodnie brzegów, obciążenie przyjąć można analogicznie do (3.2)

$$(3.12) \quad q_l^{II}(x, y) = f_l^{II}(y) g_l^{II}(x).$$

Funkcje $g_l^{II}(x)$ należy przyjąć z uwzględnieniem warunku

$$(3.13) \quad g_l^{II}(x) \equiv 0 \quad \text{dla } c_2 \leq x \leq a.$$

Obciążenie (3.12) można przedstawić w postaci szeregu

$$(3.14) \quad q_l^{II}(x, y) = \sum_n \sum_m c_n^{III} a_{mn}^{III} X_{mn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

gdzie

$$a_{mn}^{iII} = \frac{1}{\int_0^a X_{mn}^2(x) dx} \int_0^{c_2} g_i^{II}(x) X_{mn}(x) dx.$$

Podobnie, jak w przypadku obciążenia $q_i^I(x, y)$, można wykazać istnienie związków analogicznych do (3.7)

$$(3.15) \quad a_{mn}^{iII} = \sum_k a_{kr}^{iII} f_{mn}^k.$$

Poniżej wykazano, że ciągłość funkcji $g_i^{II}(x)$ oraz jej kolejnych pochodnych jest warunkiem koniecznym szybkiej zbieżności szeregu (3.14). Składowe $X_{mn}(x)$ postaci własnych można zapisać następująco:

$$(3.16) \quad X_{mn}(x) = C_{1mn} \sin \lambda_{1mn} x + C_{2mn} \cos \lambda_{1mn} x + C_{3mn} \operatorname{sh} \lambda_{2mn} x + C_{4mn} \operatorname{ch} \lambda_{2mn} x,$$

gdzie

$$(3.17) \quad \lambda_{1mn} = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma h}{gD} \omega_{mn} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}},$$

$$\lambda_{2mn} = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma h}{gD} \omega_{mn} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}}.$$

Przy założeniu, że funkcja $g_i^{II}(x)$ i k jej kolejnych pochodnych są funkcjami ciągłymi w przedziale $0 \leq x \leq a$, można napisać

$$(3.18) \quad \frac{d^k g_i^{II}(x)}{dx^k} = \sum_m b_m^i X_{mn}(x).$$

Powyższy szereg jest jednostajnie zbieżny w rozpatrywanym przedziale. Pozwala to na jego całkowanie, przy czym powstająca w wyniku tego szeregu część trygonometryczna funkcji $X_{mn}(x)$ jest dzielona przez λ_{1mn} , natomiast część hiperboliczna przez λ_{2mn} . W przypadku płyty podpartej swobodnie na całym obwodzie ω_{mn} rośnie z m^2 . Dla innych warunków brzegowych wzrost ω_{mn} jest porównywalny. Zatem jak wynika z (3.17), otrzymany w wyniku całkowania szereg będzie szybciej zbieżny niż (3.18). K -krotne całkowanie doprowadzi do otrzymania szybkozbieżnego szeregu opisującego $g_i^{II}(x)$.

Obciążenie (3.14) spowoduje następujące ugięcie płyty zastępczej

$$(3.19) \quad w_i^{II}(x, y) = \frac{g}{\gamma h} \sum_n \sum_m \frac{c_n^{iII} a_{mn}^{iII}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} W_{mn}(x, y).$$

Współczynniki c_n^{iII} są wyznaczone przy spełnianiu warunków brzegowych.

4. Drgania płyty wspornikowej

Zastosowanie przedstawionej metody zostanie pokazane na przykładzie drgań płyty wspornikowej. Płyta zastępcza została przyjęta w postaci płyty podpartej swobodnie na dwu przeciwległych brzegach, z jednym brzegiem utwierdzonym i pozostałym swobodnym.

Przy obliczaniu częstości i postaci drgań własnych należy rozpatrzeć drgania wymuszone, harmonicznie zmienne w czasie, płyty zastępczej poddanej działaniu obciążeń $q^I(x, y)$ i $q^{III}(x, y)$. Schemat zastępczy przedstawiony jest na rys. 2b, przy czym przyjmuje się $c_3 = c$. Podstawiając funkcje ugięcia do równań opisujących zerowanie się momentów i sił tnących w przekroju $y = c$, a następnie ortogonalizując lewe strony otrzymanych równań względem funkcji $X_{lr}(x)$ uzyskuje się następujący układ równań:

$$(4.1) \quad \sum_J^{I, III} \sum_{l=1}^2 \left\{ c_{lr}^{II} a_r^{IJ} \frac{-\left(\frac{r\pi}{b}\right)^2}{k_{lr}^2 - k^2} \int_0^a X_{lr}^2(x) dx \sin \frac{r\pi}{b} c + \nu \sum_s c_{sr}^{IJ} \left[\frac{a_r^{IJ}}{k_{sr}^2 - k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^a X_{sr}''(x) X_{lr}(x) dx \sin \frac{r\pi}{b} c + \frac{1}{\nu} \sum_m \sum_{n \neq r} f_{mn}^s \frac{a_n^{IJ}}{k_{mn}^2 - k^2} u_{mn}^I \right] \right\} = 0,$$

$$\sum_J^{I, III} \sum_{l=1}^2 \left\{ c_{lr}^{IJ} a_r^{IJ} \frac{-r^3 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}{k_{lr}^2 - k^2} \int_0^a X_{lr}^2(x) dx \cos \frac{r\pi}{b} c + (2-\nu) \sum_s c_{sr}^{IJ} \left[\frac{a_r^{IJ}}{k_{sr}^2 - k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^a X_{sr}''(x) X_{lr}(x) dx r \cos \frac{r\pi}{b} c + (2-\nu) \sum_m \sum_{n \neq r} f_{mn}^s \frac{a_n^{IJ}}{k_{mn}^2 - k^2} z^I \right] \right\} = 0,$$

gdzie:

$$u_{mn}^I = \left[-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^a X_{mn}(x) X_{lr}(x) dx + \nu \int_0^a X_{mn}''(x) X_{lr}(x) dx \right] \sin \frac{n\pi}{b} c, \\ z_{mn}^I = \left[-n^3 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^a X_{mn}(x) X_{lr}(x) dx + (2-\nu) \int_0^a X_{mn}''(x) X_{lr}(x) dx \right] \cos \frac{n\pi}{b} c,$$

$$s, l, m = 1, 2, 3, \dots, L.$$

Ponieważ szukane postacie własne są symetryczne lub antysymetryczne względem $y = b/2$, przyjąć można w równaniach (4.1) zależności

$$c_{sr}^{II} = c_{sr}^{III}.$$

W przypadku postaci symetrycznych muszą wówczas być spełnione warunki

$$g_l^I(y) = g_l^{III}(b-y).$$

W szeregach opisujących obciążenia i ugięcia wystąpią funkcje W_{mn} z n nieparzystym. W równaniach (4.1) należy przyjąć:

$$r = 1, \quad n = 3, 5, 7, \dots, N.$$

Dla postaci antysymetrycznych:

$$g_l^I(y) = -g_l^{III}(b-y), \quad r = 2, \quad n = 4, 6, 8, \dots, N+1.$$

Układ (4.1) zawiera $2L$ równań. Wielkość N należy dobrać tak, aby zapewnić odpowiednią dokładność aproksymacji funkcji $g_i^f(y)$. Badając wpływ wielkości N na uzyskiwane wyniki można określić jego wartość niezbędną ze względu na żadaną dokładność. Częstość drgań własnych wyznacza się z warunku istnienia nietrywialnego rozwiązania liniowego układu równań (4.1). W przypadku ustalonych drgań wymuszonych należy w rozważaniach, oprócz odkształceń wywołanych obciążeniem uzupełniającym, uwzględnić również ugięcie od obciążenia właściwego, działającego w przedziale $c \leq y \leq b-c$. Amplitudę tego obciążenia przedstawić można w postaci

$$(4.2) \quad p(x, y) = \sum_j \sum_n p_{jn} X_{jn}(x) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Przy realizacji warunków brzegowych uwzględnić trzeba ugięcie wywołane obciążeniem (4.2). Spowoduje to wystąpienie odpowiednich wyrażeń na prawej stronie układu (4.1).

5. Wyniki obliczeń

Według proponowanej metody opracowano programy na maszynie Odra 1204. Płytę zastępczą przyjęto jako podpartą swobodnie na całym obwodzie. Obliczenia przeprowadzono dla płyt z dwojakiego rodzaju warunkami brzegowymi:

- 1) dwa brzegi wychodzące z jednego naroża utwierdzone, pozostałe podparte swobodnie,
- 2) dwa brzegi wychodzące z jednego naroża swobodne, pozostałe podparte swobodnie.

Tablica 1. Częstość i współczynniki obciążeń uzupełniających pierwszej postaci własnej płyty kwadratowej z brzegami wychodzącymi z jednego naroża utwierdzonymi i pozostałymi podpartymi swobodnie

$$\alpha_1^2 = k_1^2 a^2 = a^2 \sqrt{\frac{\gamma b}{gD}} \omega_1$$

L	α_1^2	C_1^{11}	C_2^{11}	$C_3^{11} \cdot 10^1$	$C_4^{11} \cdot 10^2$	$C_5^{11} \cdot 10^2$
8	27,054 140	1,000	-0,341	-0,804	-0,270	-1,052
9	27,054 000	1,000	-0,339	-0,796	-0,262	-1,002
10	27,054 130	1,000	-0,341	-0,803	-0,270	-1,075

L	$C_6^{11} \cdot 10^2$	$C_7^{11} \cdot 10^2$	$C_8^{11} \cdot 10^2$	$C_9^{11} \cdot 10^2$	$C_{10}^{11} \cdot 10^2$
8	-0,265	0,330	0,855		
9	-0,265	0,255	0,681	0,975	
10	-0,328	0,208	0,652	0,846	1,064

Dla pierwszego rodzaju warunków brzegowych przeprowadzono obliczenia częstości podstawowej oraz odpowiadającej jej postaci drgań własnych płyty kwadratowej oraz drgań wymuszonych płyt kwadratowych i prostokątnych, obciążonych siłą skupioną przyłożoną w środku. Efektywne wyniki uzyskano dla stosunku $a/c > 6$. Przykładowe wyniki obliczeń częstości podstawowej oraz odpowiadające pierwszej postaci współczynniki obciążenia uzupełniającego podano w tablicy 1. Na ich podstawie można ocenić wpływ liczby L wyrazów szeregu sinusowego aproksymującego funkcje składowe obciążeń uzupełniających $f_i^I(z)$, gdzie $z = \begin{cases} x & \text{dla } J = I \\ y & \text{dla } J = II \end{cases}$ na dokładność obliczeń. Przy zmianie L w granicach 8–10 wartość częstości pozostaje niezmienna z dokładnością do pięciu miejsc znaczących. Wartość tej częstości uzyskana metodą Rayleigha–Ritza w pracy [6] wynosi $\alpha_1^2 = k_1^2 a^2 = 27,25$, metodą szeregów w [7]:

$$\alpha_1^2 = 27,67,$$

$$\alpha_1^2 = 27,1,$$

$$\alpha_1^2 = 28,3.$$

Tablica 2. Wyniki obliczeń częstości podstawowej płyty kwadratowej z dwoma swobodnymi brzegami wychodzącymi z jednego naroża z pozostałymi podpartymi swobodnie

L	I wariant $g_1^I(y)$	II wariant $g_1^I(y)$
7	$3,7 < \alpha_1^2 < 3,75$	
8		$3,14 < \alpha_1^2 < 3,26$
9	$3,47 < \alpha_1^2 < 3,48$	$\alpha_1^2 = 3,29$
10	$\alpha_1^2 = 3,29$	$3,14 < \alpha_1^2 < 3,2$
11	$3,40 < \alpha_1^2 < 3,42$	$3,26 < \alpha_1^2 < 3,37$
12	$\alpha_1^2 = 3,27$	$\alpha_1^2 = 3,18$
13	$3,375 < \alpha_1^2 < 3,38$	$3,26 < \alpha_1^2 < 3,37$
14	$\alpha_1^2 = 3,256$	$3,14 < \alpha_1^2 < 3,26$
15	$3,35 < \alpha_1^2 < 3,37$	
16	$\alpha_1^2 = 3,248$	$3,15 < \alpha_1^2 < 3,2$
17	$3,335 < \alpha_1^2 < 3,34$	$3,3 < \alpha_1^2 < 3,31$
18	$\alpha_1^2 = 3,245$	

W pracy [6] otrzymano $\alpha^2 = 3,54$ stosując metodę Rayleigha-Ritza.

Równie zadowalające wyniki otrzymano w przypadku drgań wymuszonych płyt kwadratowych i prostokątnych.

Dla drugiego rodzaju warunków brzegowych przeprowadzono obliczenia częstości podstawowej oraz sił wewnętrznych. Efektywne wyniki otrzymano dla a/c w przedziale 1,2-2,5. Ze względu na wolniejszą zbieżność szeregów opisujących pochodne wyższego rzędu występujące w warunkach zerowania się sił tnących i momentów, obliczenia drgań płyty ze swobodnym narożem są bardziej pracochłonne niż w przypadku poprzednim. Zwiększając liczbę L wyrazów szeregów opisujących szukane składowe funkcji obciążenia do 25 nie uzyskano stabilizacji współczynników tych szeregów. Ze względu na to, że wyrazy szeregów ugięć maleją $z/(m^4n^4)$ wspomniany brak stabilizacji współczynników obciążeń nie przesądza możliwości obliczenia sił wewnętrznych, do czego jest nieodzowna trzykrotna różniczkowalność szeregów ugięć. Dla omawianego przypadku warunków brzegowych przeprowadzono analizę numeryczną, z której wynika możliwość obliczenia sił wewnętrznych. Wyniki obliczeń częstości podstawowej dla różnej dokładności aproksymacji obciążeń podano w tablicy 2. Wyniki obliczeń momentów gnących podano w tablicy 3.

Tablica 3. Wyniki obliczeń ugięć i momentów M_y płyty kwadratowej z dwoma swobodnymi brzegami wychodzącymi z jednego naroża, z pozostałymi podpartymi swobodnie, obciążonej siłą $p_0 \sin \omega t$ przyłożoną

$$\text{w środku płyty, } \alpha^2 = 21; \quad P_0 = 0,25 \frac{D}{a^2}$$

nr	x/a	v/a	$L = 14$		$L = 12$	
			W	M_y	W	M_y
1	0	0	$-4,495 \cdot 10^{-3}$	$6,513 \cdot 10^{-5}$	$-4,6 \cdot 10^{-3}$	$4,31 \cdot 10^{-5}$
2	0,247	0	$-1,971 \cdot 10^{-3}$	$3,815 \cdot 10^{-5}$	$-2,033 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-5}$
3	0,247	0,247	$-2,420 \cdot 10^{-4}$	$-9,077 \cdot 10^{-4}$	$-2,598 \cdot 10^{-4}$	$-9,177 \cdot 10^{-4}$
4	0,247	0,576	$1,309 \cdot 10^{-3}$	$-3,008 \cdot 10^{-3}$	$1,338 \cdot 10^{-3}$	$-3,094 \cdot 10^{-3}$
5	0,247	0,740	$1,223 \cdot 10^{-3}$	$-2,792 \cdot 10^{-3}$	$1,251 \cdot 10^{-3}$	$-2,861 \cdot 10^{-3}$
6	0,0086	0,0086	$-4,342 \cdot 10^{-3}$	$2,011 \cdot 10^{-4}$	$-4,446 \cdot 10^{-3}$	$1,794 \cdot 10^{-4}$

Otrzymane w punktach 1 i 2 brzegu swobodnego wartości M_y , różne od zera, są wynikiem przybliżonego spełniania warunków brzegowych. Na podstawie ich wielkości można sądzić o dokładności otrzymanych wyników.

6. Wnioski końcowe

Przeprowadzona metoda jest bardziej pracochłonna od metody opracowanej przez KĄCZKOWSKIEGO [1]. Wynika to z konieczności spełniania dwóch warunków na każdym brzegu oraz z niemożliwości przedstawienia ugięcia odpowiadającego składowym obcią-

żenia w postaci zamkniętej. Natomiast jej zaletą jest możliwość efektywnego obliczenia sił wewnętrznych, co związane jest z większą zbieżnością szeregów ugięć dzięki zastosowaniu obciążeń uzupełniających opisanych odpowiednio gładkimi funkcjami. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że proponowana metoda pozwala na uzyskiwanie zadowalających rozwiązań problemów dynamiki płyt. Można ją również uogólnić na przypadki drgań nieustalonych. Stosowanie płyt zastępczych z takimi samymi warunkami na dwóch lub więcej brzegach, jak dla płyty właściwej, jest związane z aproksymacją poszukiwanego rozwiązania funkcjami o zbliżonych «właściwościach dynamicznych». Wymaga to znajomości częstości i postaci drgań własnych płyt zastępczych lub ich uprzedniego obliczenia. Osiągane tą drogą zmniejszenie końcowego układu równań może być, zwłaszcza w przypadku drgań nieustalonych, nawet przy stosowaniu nowoczesnych maszyn matematycznych, warunkiem efektywności obliczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, *Orthotropic rectangular plates with arbitrary boundary conditions*, AMS, 2, 8 (1956).
2. M. BARTON, *Vibration of rectangular and skew cantilever plates*, J. Appl. Mech., 1, 18 (1951).
3. D. YOUNG, *Vibration of rectangular plates by the Ritz method*, J. Appl. Mech., 4, 17 (1950).
4. H. J. PLASS, J. H. GAINES, C. D. NEWSON, *Application of Reissner's variational principle to cantilever plate deflection on vibration problem*, J. Appl. Mech., 1, 29 (1962).
5. R. W. CLASSEN, C. J. THORN, *Vibration of a rectangular cantilever plate*, J. Aero. Sci., 11, 29 (1962).
6. В. С. ГОНТКЕВИЧ, *Собственные колебания пластинок и оболочек*, Наукова думка, Киев 1964.
7. T. KANAZAWA, T. KAWAI, *On the lateral vibration of anisotropic rectangular plate*, Proc. Japan Nat. Cong. Appl. Mech., 1952.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА НОВАЦКОГО

В работе представлен метод решения колебаний свободных и нагруженных прямоугольных пластин. Решение строится посредством рассмотрения вынужденных колебаний замещающих пластин с известными частотами и модами собственных колебаний. Расчеты основаны на модифицированном методе сил Новацкого. Благодаря тому, что нагрузки с помощью которых реализовались краевые условия на линии отделяющей пластину от ее продолжения выражались через достаточно гладкие функции, была достигнута достаточно быстрая сходимость рядов позволяющая определить внутренние силы. Предлагаемый метод используется для расчета собственных и вынужденных колебаний пластин с двумя видами краевых условий.

Summary

SOLUTION OF THE VIBRATION PROBLEMS OF RECTANGULAR PLATES BASED ON A MODIFICATION OF NOWACKI'S METHOD

This paper presents the method of solution the vibration problems of rectangular plates, free and loaded, by means of analysis of vibration problems of auxiliary plates, the frequencies and modes of which are known. The calculations are based on a modification of Nowacki's method. The loads necessary for reali-

sation of boundary conditions on the line separating the proper plate from the auxiliary one are described by smooth functions. This causes a fast convergence of the series expressing the deflections of the plate and enables the calculations of the internal forces.

The numerical solution of the problem was performed considering two different boundary conditions.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1975 r.
