

## WYBOCZENIE UDERZENIOWE PRĘTA O DUŻEJ SMUKŁOŚCI

RYSZARD GR Y B O Ś (GLIWICE)

### 1. Sformułowanie problemu i cel pracy

Utratę stateczności pręta, wywołaną uderzeniem podłużnym, określa się jako stan ruchu, podczas którego ugięcia wykazują tendencję nieograniczonego wzrostu. Wzbudzenie ruchu poprzecznego przez uderzenie podłużne wymaga istnienia pewnych czynników inicjujących, którymi są: odstępstwa osi pręta od idealnej prostoliniowości, mimośrodowość siły uderzenia, niejednorodność materiału, stan naprężeń szczątkowych (walcowniczych, spawalniczych) i inne. Przyczyną bezpośrednią ruchu poprzecznego jest fala ciśnień propagująca się wzdłuż pręta z prędkością  $c = \sqrt{E/\rho}$ , gdzie  $E$ ,  $\rho$  oznaczają moduł Younga i gęstość materiału pręta.

Stan krytyczny w sensie wyżej określonym wiąże się z pojęciem «krytycznej strefy wzbudzenia». Jest to odcinek pręta objęty falą ciśnienia w chwili utraty stateczności. Koncepcja krytycznej strefy wzbudzenia została wprowadzona przez GERARDA i BECKERA w roku 1952 [1]. Później posługiwało się nią jeszcze kilka innych badaczy [2, 3, 4], próbując określić tzw. krytyczne parametry uderzenia.

Autorzy pracy [1] analizując wyniki własnych doświadczeń doszli do wniosku, że ani wymienione powyżej czynniki inicjujące ruch poprzeczny, ani smukłość pręta, czy też warunki podparcia końca nieuderzonego, nie wpływają na postać wyboczenia o ile długość krytycznej strefy wzbudzenia jest mniejsza od długości pręta. Do analogicznych wniosków prowadzą także wyniki późniejszych doświadczeń MAŁYSZEWA [9].

Jednakże samą długość krytyczną określano dotychczas teoretycznie przez intuicyjne kojarzenie stanu krytycznego w warunkach dynamicznych z podobnym stanem przy ścisłaniu statycznym (tzn. ze smukłością krytyczną w sensie Eulera) pręta jednym końcem podpartego przegubowo, a na drugim sztywno utwierdzonego [1, 7].

W pracy niniejszej do określenia długości krytycznej dochodzi się przez analizę prędkości (fazowej i grupowej) propagacji fal giętnych w pręcie ścisłanym uderzeniowo. Okazało się, iż faktycznie smukłość fal wybozeniowych pozostaje w pewnym przybliżonym związku z eulerowską smukłością krytyczną, jednakże dla pręta o nieco innych warunkach brzegowych. Wyprowadzono wzory na długość fali wybozeniowej zarówno sprężystej, jak i sprężysto-plastycznej. Konfrontacja z wynikami doświadczeń wykazuje zadowalającą zgodność.

Obliczenia poprzedzone zostały wyprowadzeniem równań różniczkowych opisujących sprzężone drgania podłużno-giętne, ponieważ w tym względzie istnieją w literaturze pewne ostateczności (por. np. [2, 5 - 8]).

## 2. Równania różniczkowe problemu

Na gruncie hipotezy płaskich przekrojów stan przemieszczeń pręta, w którym propaguje się sprzężona fala podłużno-giętna, opisują trzy funkcje:  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ . Pierwsza jest przemieszczeniem osiowym przekroju o odciętej  $x$  w chwili  $t$ , druga oznacza przemieszczenie poprzeczne (ugięcie) punktu na osi centralnej  $y$ , prostopadłej do płaszczyzny zginania, trzecia oznacza kąt obrotu przekroju względem osi  $y$ .

Siły wewnętrzne w pręcie wyrażone są przez przemieszczenia wzorami następującymi:

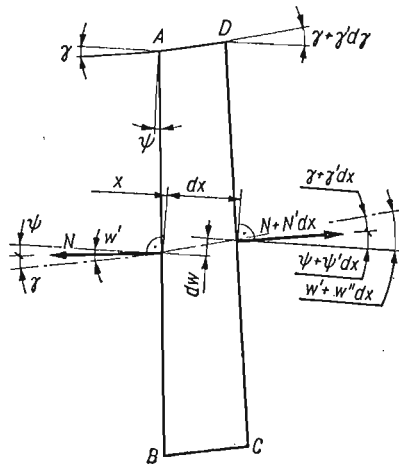
$$(2.1) \quad \text{siła poosiowa (ściskająca)} \quad N(x, t) = EFu'(x, t),$$

$$(2.2) \quad \text{siła poprzeczna (tnąca)} \quad Q(x, t) = k^{-1}GF[w'(x, t) - \psi(x, t)],$$

$$(2.3) \quad \text{moment zginający} \quad M(x, t) = -EI\psi'(x, t).$$

Przecinek u góry oznacza różniczkowanie względem  $x$ , kropką oznaczamy różniczkowanie względem  $t$ ;  $k$  jest współczynnikiem ścinania.

Przechodząc do ustawienia równań ruchu rozpatrzmy najpierw geometrię odkształcenia elementarnego wycinka pręta o długości  $dx$  (rys. 1). Dwie płaszczyzny przekroju poprzecz-



Rys. 1

nego  $AB$  i  $CD$ , pierwotnie równoległe, po odkształceniu obracają się względem siebie o kąt  $\psi'dx$ . Kąty w narożach  $A, B, C, D$ , pierwotnie proste, wskutek odkształceń postaciowych zmieniają się o  $\gamma$  w narożach  $A, B$ , zaś o  $\gamma + \gamma'dx$  w narożach sąsiednich  $C$  i  $D$ . Te same kąty tworzą wektory sił normalnych z kierunkiem stycznej do osi ugiętej. Natomiast wektory tych sił nachylone są do osi  $x$  pod kątami  $\psi$  oraz  $\psi + \psi'dx$  odpowiednio.

Uwzględniając te fakty otrzymujemy następujące warunki równowagi dynamicznej elementarnego wycinka pręta:

$$(2.4) \quad \rho F \ddot{u} = N' - (Q\psi)',$$

$$(2.5) \quad \rho F \ddot{w} = Q' + (N\psi)',$$

$$(2.6) \quad \rho I \ddot{\psi} = -M' + Q - N(w' - \psi).$$

Podstawiamy tu wzory (2.1), (2.2), (2.3) oraz wprowadzamy zmienne bezwymiarowe

$$\bar{x} = \frac{x}{l_m}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{l_m}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_m}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l_m}; \quad l_m \equiv \frac{m}{\rho F}.$$

W dalszym ciągu będziemy jednak pomijać kreski nad  $\bar{x}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ , ponadto różniczkowanie względem  $\bar{x}$  i  $\bar{t}$  nadal będziemy oznaczać przecinkiem i kropką u góry.

Podstawowy układ równań różniczkowych problemu przyjmuje ostatecznie postać

$$(2.7) \quad \ddot{u} - u'' = \gamma[(w' - \psi)\psi]',$$

$$(2.8) \quad \ddot{w} - \gamma w'' = -\gamma\psi' + (u'\psi)',$$

$$(2.9) \quad \ddot{\psi} - \psi'' = \kappa^2(\gamma - u')(w' - \psi),$$

gdzie

$$\gamma \equiv \frac{G}{kE}, \quad \kappa = \frac{l_m}{r} = \frac{m}{\rho Fr}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Równania powyższe opisują sprzężony ruch podłużno-poprzeczny pręta bez krzywizny wstępnej i pozbawionego cech lepkoplastycznych.

### 3. Sprężyste fale wyboczeniowe

Przytoczymy najpierw skrótkowo pewne fakty i wzory dotyczące propagacji fali podłużnej. Jeżeli pominąć wpływ ruchu poprzecznego na ruch podłużny, to zamiast (2.7) otrzymujemy jednorodne równanie falowe  $\ddot{u} - u'' = 0$ . Problem początkowo-brzegowy, jaki formułuje się dla tego równania przy uderzeniu ciałem o skończonej masie, posiada znane rozwiązanie (np. [5])

$$(3.1) \quad u(x, t) = \frac{v_0}{c} (1 - e^{x-t}) \quad \forall x \in [0, t],$$

$$(3.2) \quad u(x, t) = \frac{v_0}{c} [e^{-(x+t-2t)} - e^{x-t}] \quad \forall x \in [t, 2l-t]$$

itd., gdzie  $l$  jest (bezwymiarową) długością pręta,  $v_0$  — prędkością uderzenia. Uderzenie ciałem o nieskończenie dużej masie wywołuje równomierne ściskanie na odcinku  $x \in [0, t]$ , przy czym skrócenie właściwe  $u' = -v_0/c \equiv -\varepsilon_0$ .

Mając dalej na uwadze ten przypadek rozpatrzmy warunki propagacji sprzężonej fali podłużno-giętej. Gdy do (2.8), (2.9) podstawić  $u' = -\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 > 0$ ), to otrzymuje się układ równań

$$(3.3) \quad \ddot{w} - \gamma w'' = -(\gamma + \varepsilon_0)\psi',$$

$$(3.4) \quad \ddot{\psi} - \psi'' = \kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)(w' - \psi),$$

z którego, po eliminacji kąta  $\psi$ , wynika równanie dla funkcji ugięć

$$(3.5) \quad \ddot{\ddot{w}} - (1 + \gamma)\ddot{w}'' + \gamma w'''' + \kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)\ddot{w} + \varepsilon_0\kappa^2(\gamma + \varepsilon_0)w'' = 0.$$

Jest to równanie Timoshenki uogólnione na przypadek pręta ściskanego równomiernie ( $\varepsilon_0 = \text{const}$ ).

Jeżeli równanie (3.5) ma opisywać ruch falowy, to jego rozwiązanie powinno mieć postać okresowej funkcji argumentu  $(c_f t - x)/\Lambda$ , gdzie  $\Lambda$  jest długością fali, zaś  $c_f$  oznacza prędkość fazową ( $0 \leq c_f < c$ ). Niech

$$(3.6) \quad w(x, t) = A \exp \left[ i\pi \frac{2\pi r}{\Lambda} (\bar{c}_f t - x) \right], \quad \bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{c}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Podstawienie w (3.5) daje następujący związek między długością fali i prędkością fazową

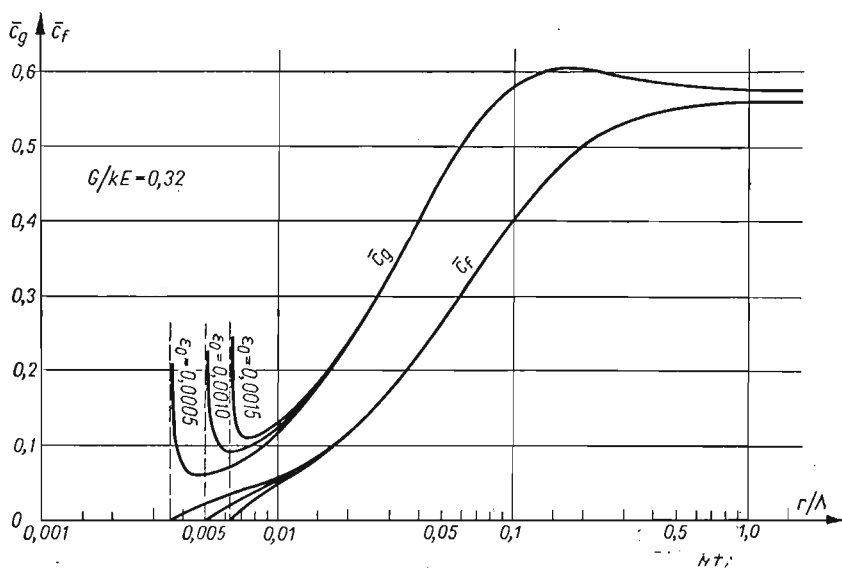
$$(3.7) \quad \frac{\Lambda}{r} = 2\pi \sqrt{\frac{(\gamma - \bar{c}_f^2)(1 - \bar{c}_f^2)}{(\gamma + \varepsilon_0)(\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)}}.$$

Fala o długości  $\Lambda$  propaguje się więc z określoną prędkością fazową, którą można obliczyć jako dodatni pierwiastek równania

$$(3.8) \quad \bar{c}_f^4 - [(\gamma + \varepsilon_0)(\Lambda/2\pi r)^2 + 1 + \gamma]\bar{c}_f^2 - [\varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)(\Lambda/2\pi r)^2 - \gamma] = 0$$

spełniający warunek  $\bar{c}_f < \sqrt{\gamma}$  ( $c_f < \sqrt{G/kQ}$ ).

Na rys. 2 przedstawiony jest wykres zależności  $\bar{c}_f = f(r/\Lambda)$ , skonstruowany na podstawie równania (3.8); jest to tzw. krzywa dyspersji. Przyjęto  $\gamma = G/kE = 0,32$ , co odpowiada wartości ułamka Poissona 0,3 oraz współczynnikowi ścinania  $k = 1,2$ . W zakresie



Rys. 2

fal krótkich i średniej długości ( $r/\Lambda > 0,02$ ) krzywa nie różni się zasadniczo od tej, jaką na podstawie ścisłego rozwiązania otrzymał DAVIES [12] bez uwzględnienia ciśnienia posiosowego. Wpływ tego czynnika uwidacznia się dopiero w zakresie fal długich, gdzie krzywa ulega rozszczepieniu na szereg gałęzi, z których każda odpowiada innej wartości ciśnienia. Ze wzrostem długości fali krzywa dyspersji monotonicznie opada, aż przy długości

$$(3.9) \quad A_k = 2\pi r \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\varepsilon_0(\gamma + \varepsilon_0)}} \approx \frac{2\pi r}{\sqrt{\varepsilon_0}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_0}{2\gamma} \right)$$

przecina oś rzędnych, czemu odpowiada  $c_f = 0$ . Oznacza to, że wzdłuż belki uderzonej poosiowo (ciałem o nieskończenie dużej masie) nie mogą propagować się fale giętne o długości  $\lambda \geq \lambda_k$ , bowiem przy tej długości fali następuje wyoboczenie dynamiczne. Dlatego falę giętą o długości  $\lambda_k$  będziemy nazywać «falą wyoboczeniową».

Ponieważ  $\gamma \sim O(1)$ , zaś  $\varepsilon_0 \sim O(10^{-3})$ , więc zamiast (3.9) można z dużą dokładnością przyjąć

$$(3.10) \quad \lambda_k \approx 2\pi r / \sqrt{\varepsilon_0} = 2\pi r \sqrt{c/v_0}.$$

Fakt, iż nie występuje tu współczynnik  $\gamma$ , a tym samym współczynnik kształtu  $k$ , świadczy o tym, że smukłość krytyczna  $\lambda_k/r$  nie zależy od kształtu przekroju belki, a jedynie od względnej prędkości uderzenia. Tak np. w belce stalowej przy prędkości uderzenia  $v_0 = 10^{-3} c$  wystąpi fala wyoboczeniowa o długości  $2\pi \sqrt{10^3} r \approx 200 r$ . Jak widać z tego przykładu, sprężysta fala wyoboczeniowa może wystąpić tylko w prętach o stosunkowo dużej smukłości  $\lambda$  (w danym przypadku, gdy  $\lambda > 200$ ).

Przejdźmy do określenia «prędkości grupowej»  $c_g$ , lub jej bezwymiarowego odpowiednika  $\bar{c}_g = c_g/c$ . W tym względzie skorzystamy ze znanego związku między prędkościami  $c_f$ ,  $c_g$  i długością fali

$$c_g = c_f - \lambda \frac{dc_f}{d\lambda}$$

lub po zastosowaniu wielkości bezwymiarowych

$$c_g = \bar{c}_f + \frac{r}{\lambda} \frac{d\bar{c}_f}{d(r/\lambda)}.$$

Uwzględniając zależność (3.7) otrzymujemy po wykonaniu licznych rachunków

$$(3.11) \quad \bar{c}_g = \bar{c}_f + \frac{(\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)(\gamma - \bar{c}_f^2)(1 - \bar{c}_f^2)}{\bar{c}_f[(1 + \varepsilon_0)(\gamma + \varepsilon_0) - (\bar{c}_f^2 + \varepsilon_0)^2]}.$$

Przebieg krzywych dyspersyjnych dla rozmaitych wartości  $\varepsilon_0$  wykazuje, iż w zakresie fal średnich i krótkich ciśnienie nie wpływa na prędkość przenoszenia energii fal giętnych (rys. 2). Dla  $r/\lambda \approx 0,2$  występuje maksimum bezwzględne ( $\max \bar{c}_g \approx 0,61$ ), co oznacza, że przy propagacji krótkotrwałego zaburzenia giętnego najszybciej będzie przenoszona energia związana z falą o długości  $\sim 5 r$  (dla przyjętej wartości  $\gamma$ ).

W pobliżu stanu krytycznego ( $\lambda \approx \lambda_k$ ) słuszne są następujące przybliżone wzory na prędkość fazową i grupową:

$$\bar{c}_f \approx \sqrt{\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - \varepsilon_0}, \quad \bar{c}_g \approx 2\bar{c}_f + \frac{\varepsilon_0}{\bar{c}_f},$$

wyprowadzone z (3.7) i (3.11). Przy  $\bar{c}_f = \sqrt{\varepsilon_0/2}$  prędkość grupowa osiąga minimum (które wynosi  $2c \sqrt{2\varepsilon_0}$ ), po czym zaczyna gwałtownie wzrastać aż do nieskończoności przy  $\lambda = \lambda_k$ . Oznacza to, iż energia ruchu poprzecznego wzrasta wówczas nieograniczenie, chociaż ruch nie ma charakteru falowego ( $c_f = 0$ ); jest to sytuacja charakterystyczna dla stanu krytycznego.

Zauważmy, iż fali wyoboczeniowej towarzyszy skrócenie dynamiczne  $\partial u/\partial x = \varepsilon_0 \approx (2\pi r/\lambda_k)^2$ , które zarazem jest skróceniem krytycznym, jakie występuje przy «statycznym» ściskaniu słupa o smukłości  $\lambda_k/r$ , «obustronnie utwierdzonego». Wiąże się to z fak-

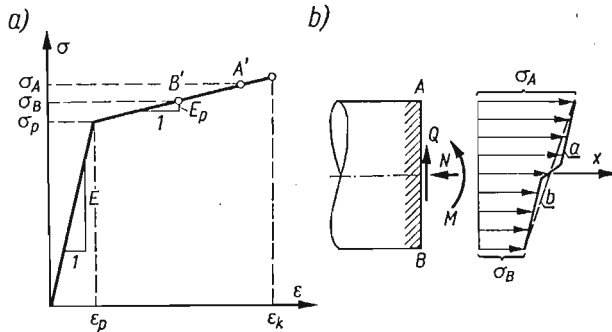
tem, iż warunki brzegowe, jakie występują na czole fali giętej, odpowiadają właśnie sztywnemu utwierdzeniu. To samo powiedzieć można o brzegu uderzonym, jeśli ciało uderzające uniemożliwia swobodę obrotu czołowego przekroju pręta.

#### 4. Plastikzne fale wyboczeniowe

Przy uderzeniu z prędkością  $> \varepsilon_p c$  ( $\varepsilon_p$  oznaczają skrócenie właściwe na granicy plastyczności) pojawiają się wyboczeniowe fale plastikzne. Ich amplitudy są stosunkowo duże, tak, że fale wyboczeniowe dają się łatwo obserwować gołym okiem jako trwałe, faliste wygięcia pręta.

Analiza teoretyczna tego przypadku jest znacznie bardziej skomplikowana niż przypadku sprężystego. Zasadniczym powodem jest nieliniowość charakterystyki  $\sigma(\varepsilon)$  materiału i związana z tym zmienna prędkość propagacji fali, nieliniowy rozkład naprężeń od zginania w przekroju poprzecznym i inne efekty wtórne.

Poszukując rozwiązania przybliżonego przyjmujemy do rozważań charakterystykę sprężysto-plastyczną ze wzmocnieniem liniowym (rys. 3a). W związku z tym rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym będzie opisany linią łamaną (rys. 3b). Jednakże dalsze rozważania ograniczymy do fazy silnie rozwiniętych odkształceń plastycznych, dzięki



Rys. 3

czemu można: po pierwsze — rozkład naprężeń aproksymować prostą o nachyleniu proporcjonalnym do modułu wzmocnienia  $E_p$ , po drugie — założyć, iż naprężenia w warstwach skrajnych (a więc także w warstwie odciążonej przez zginanie) przekraczają granicę plastyczności ( $\sigma_p < \sigma_B < \sigma_A$ ).

Nierównomierny rozkład naprężeń w przekroju implikuje istnienie momentu zginającego:  $M_p = -E_p I \psi'$  [por. (2.3)]. Ponadto wystąpi tam siła ściskająca  $N = F\sigma$  (ciśnienie osiowe  $\sigma > \sigma_p$ ) oraz siła poprzeczna, określona nadal wzorem (2.2), w którym jedynie moduł sprężystości  $G$  zastąpimy odpowiednim modułem wzmocnienia  $G_p$ .

Przy tych założeniach równania dynamiczne pręta w fazie aktywnego płynięcia zachowują postać (2.5), (2.6). Gdy siły wewnętrzne wyrazimy przez przemieszczenia i wprowadzimy nowe wielkości bezwymiarowe

$$\bar{w} = \frac{w}{r}, \quad \bar{x} = \sqrt{s} \frac{x}{r}, \quad \bar{t} = \frac{\sigma}{\sqrt{\rho E_p}} \frac{t}{r}, \quad s = \frac{\sigma}{E_p}, \quad \beta = \frac{G_p}{k\sigma},$$

to otrzymamy

$$(4.1) \quad \ddot{w} - \beta w'' + \frac{1 + \beta}{\sqrt{s}} w' = 0,$$

$$(4.2) \quad s\ddot{\psi} - \psi'' - (1 + \beta)(\sqrt{s} w' - \psi) = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \equiv (\cdot)', \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \equiv (\cdot)' \right),$$

przy czym kreski nad  $\bar{w}$  opuszczamy.

Wyeliminowanie kąta  $\psi$  daje ostatecznie jedno podstawowe równanie zagadnienia

$$(4.3) \quad s\ddot{\bar{w}} - (1 + \beta s)\ddot{w}'' + \beta w^{IV} + (1 + \beta)\ddot{w} + (1 + \beta)w'' = 0.$$

Rozwiązania falowego poszukujemy w postaci

$$(4.4) \quad w(x, t) = A \exp \left[ i \frac{2\pi r}{\Lambda \sqrt{s}} (\bar{c}_f t - x) \right], \quad \left( \bar{c}_f \equiv \frac{c_f}{\sqrt{\sigma/\rho}} \right).$$

Podstawienie w (4.3) daje następujący związek między długością fali i prędkością fazową

$$\frac{\Lambda}{r} = 2\pi \left[ \frac{s\bar{c}_f^4 - (1 + \beta s)\bar{c}_f^2 + \beta}{s(1 + \beta)(1 + \bar{c}_f^2)} \right]^{1/2}.$$

Dla  $c_f = 0$  otrzymujemy długość plastycznej fali wybozczeniowej

$$(4.5) \quad \Lambda_k = 2\pi r \sqrt{\frac{\beta}{s(1 + \beta)}} = 2\pi r \sqrt{\frac{E_p/\sigma}{1 + \beta^{-1}}}.$$

Ponieważ na ogół  $\sigma \ll G_p$ ,  $k \sim O(1)$ , więc  $\beta^{-1} \equiv k\sigma/G_p \ll 1$  i można napisać

$$(4.5') \quad \Lambda_k \approx 2\pi r \sqrt{E_p/\sigma}.$$

We wzorach tych prędkość uderzenia nie występuje jawnie, ale długość fali wybozczenia zależy od  $v_0$  poprzez ciśnienie  $\sigma$ .

Aby wyznaczyć tę zależność weźmy pod uwagę elementarny odcinek pręta o masie  $\rho F dx$ . Po przejściu fali naprężen pęd odcinka wzrasta o  $(\rho F dx) dv$ , gdzie  $v = \partial u / \partial t$  jest prędkością cząstek w ruchu podłużnym. Przyrost pędu następuje pod działaniem impulsu  $d(F\sigma)dt$ . Fala ciśnienia poruszając się z prędkością

$$(4.6) \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}$$

przebiega przez rozważany odcinek w czasie  $dt = dx/\tilde{c}$ .

Na podstawie zasady pędu i impulsu

$$(\rho F dx) dv = d(F\sigma) \frac{dx}{\tilde{c}}.$$

Stąd  $dv = d\sigma/\rho\tilde{c}$  i po scałkowaniu z uwzględnieniem wzoru (4.6)

$$(4.7) \quad v_0 = \int_0^\sigma \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \right)_{\sigma_1}} d\sigma_1.$$

Znając charakterystykę  $\sigma(\varepsilon)$  można całkę powyższą efektywnie obliczyć, a następnie równanie (4.7) rozwiązać względem  $\sigma$ . W ten sposób otrzymamy poszukiwaną zależność  $\sigma(v_0)$ .

Obliczenia są szczególnie proste w przypadku charakterystyki dwuliniowej, jak na rys. 3a; wówczas  $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E$  dla  $0 < \sigma_1 < \sigma_p$  oraz  $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E_p$  dla  $\sigma_p < \sigma_1 < \sigma$ , wobec czego

$$v_0 = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\rho E}} + \frac{\sigma - \sigma_p}{\sqrt{\rho E_p}} \quad \text{dla} \quad v_0 > \frac{\sigma_p c}{E},$$

stąd

$$(4.8) \quad \sigma = E_p \frac{v_0}{c_p} + \left(1 - \sqrt{\frac{E_p}{E}}\right) \sigma_p.$$

Fala podłużna o takiej intensywności propaguje się z prędkością  $c_p = \sqrt{E_p/\rho}$ .

Wzór (4.5) ma charakter przybliżony z powodu kilku uproszczeń przyjętych podczas jego wyprowadzania. Najpoważniejszym źródłem błędu jest faktyczne pominięcie fazy sprężystej w równaniu falowym (4.3), dzięki czemu we wzorze końcowym wystąpił tylko moduł wzmocnienia  $E_p$ . W rzeczywistości fale wyboczeniowe tworzą się w warunkach sprężysto-plastycznego stanu odkształcenia, przy czym  $E \gg E_p$ . Omawiany wzór pozwala więc tylko na oszacowanie długości fali wyboczeniowej z «niedomiarem».

Badania eksperymentalne nad wyboczeniem dynamicznym pręta wykazują pewien rozrzut wartości  $\Lambda_k$  zmierzonych na jednej próbce, a wyniki pomiarów cytowane w literaturze (np. [11]) dotyczą wartości średnich. Dlatego, chcąc skonfrontować te wyniki z teorią, wydaje się słuszne podstawienie w (4.5') zamiast  $E_p$ , średniej wartości modułu w przedziale  $[0, \varepsilon_k]$

$$E_k = \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon_k$  jest maksymalnym skróceniem sprężysto-plastycznym. W przypadku charakterystyki dwuliniowej otrzymujemy

$$E_k = \frac{1}{\varepsilon_k} [E\varepsilon_p + E_p(\varepsilon_k - \varepsilon_p)],$$

przy czym

$$\varepsilon_k = \varepsilon_p + \frac{\sigma - \sigma_p}{E_p}$$

lub po podstawieniu (4.8)

$$(4.9) \quad \varepsilon_k = \frac{v_0}{c_p} - \left(\sqrt{\frac{E}{E_p}} - 1\right) \varepsilon_p.$$

Jeżeli zatem we wzorze (4.5') zamiast  $E_p$  podstawimy  $E_k = \sigma/\varepsilon_k$ , to otrzymamy  $\Lambda_k \approx \approx 2\pi r \varepsilon_k^{-1/2}$  lub

$$(4.10) \quad \Lambda_k \approx 2\pi r \left[ \frac{v_0}{c_p} - \left(\sqrt{\frac{E}{E_p}} - 1\right) \varepsilon_p \right]^{-1/2}.$$

Jest to przybliżony wzór na średnią długość plastycznych fal wyboczenia, wywołanych uderzeniem z prędkością  $v_0 > \sigma_p c/E$ .



## 5. Konfrontacja z doświadczeniem

Spośród licznych eksperymentów, dotyczących uderzeniowego wybooczenia prętów [1, 3, 7, 9, 10, 11] omówimy tu jedynie doświadczenia MALYSZEWA [9] oraz ABRAHAMSONA i GOODIERA [11], w których mierzono długości fal wybooczeniowych, zarówno sprężystych jak i plastycznych.

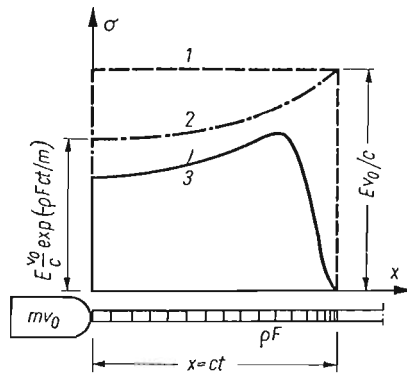
Eksperymenty MALYSZEWA przeprowadzone były na próbkach w postaci kilkumetrowego odcinka drutu stalowego (o średnicy  $d = 3$  mm) lub miedzianego ( $d = 2,6$  mm), spoczywającego swobodnie na płaskim, poziomym podłożu. Smukłość prętów próbnych przekraczała wielokrotnie smukłość fal sprężystych, dzięki czemu można było rejestrować, za pomocą ultraszybkich fotografii, przebieg procesu wybooczenia nie zakłócony działaniem fali odbitej (która powracała do miejsca uderzenia po upływie  $\sim 3,5$  ms).

Uderzenia realizowano przy pomocy młota wahadłowego (dla prędkości  $\leq 5$  m/s) oraz młota wirującego ( $5 < v_0 < 60$  m/s).

Na próbkach miedzianych, przy prędkości uderzenia 5 m/s, tworzyły się sprężyste fale wybooczeniowe o długości od 11 do 22 cm. Ze wzoru (3.10) dla  $r = d/4 = 0,065$  cm,  $c = 3,7 \cdot 10^5$  cm/s,  $v_0 = 5 \cdot 10^2$  cm/s wynika  $\lambda_k \approx 11,1$  cm, co się dobrze zgadza z dolną granicą obserwowanych długości fal.

Występowanie fal dłuższych tłumaczy się odmiennym niż przyjęto w obliczeniach rozkładem naprężeń w strefie wzbudzenia. Przyczyny tego stanu rzeczy są dwojakiej natury: po pierwsze — skończona masa ciała uderzającego, po drugie — efekty lokalne.

Zagadnienie to ilustruje rys. 4. W zakresie sprężystym rozkład równomierny (krzywa 1) wystąpiłby tylko przy uderzeniu ciałem nieskończenie wielkim. Uwzględnienie skończonej masy prowadzi do wykładniczego spadku naprężeń od wartości  $E v_0 / c$  na czole fali ( $x = ct$ ), do wartości  $E(v_0/c) \exp(-\rho F c t / m)$  na brzegu uderzonym (krzywa 2).



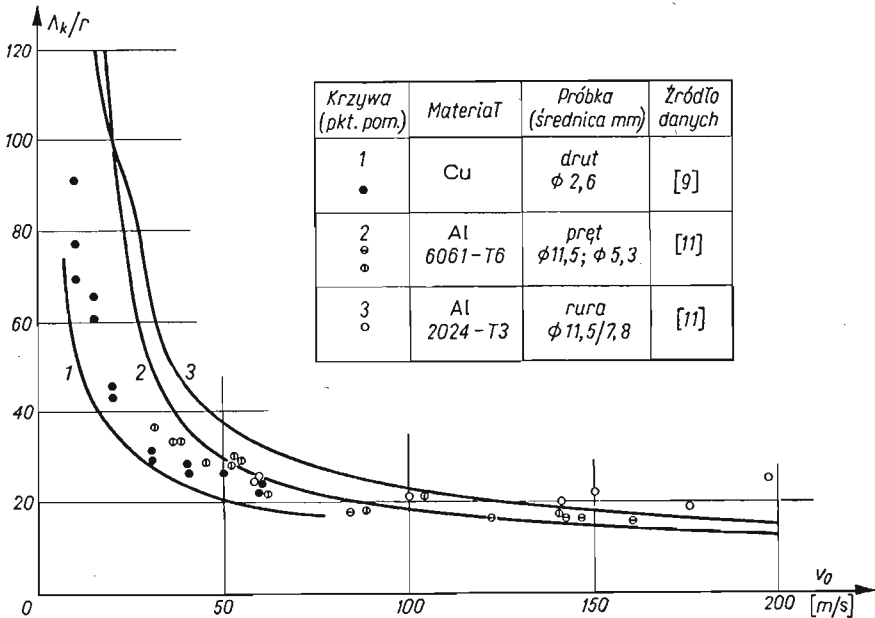
Rys. 4

Wpływ odkształceń lokalnych na rozkład naprężeń w strefie wzbudzenia jest bardzo istotny, ale określenie go na drodze teoretycznej jest problematyczne z uwagi na trudność sprecyzowania rzeczywistych warunków brzegowych, jakie istnieją na powierzchni czołowej podczas zderzenia. Ograniczymy się do przypomnienia najważniejszych wniosków, które wynikają z rozwiązania podobnego lecz nieco uproszczonego zagadnienia kontaktowego

teorii uderzenia (por. np. [13]). Otóż przebieg (w czasie) siły stykowej zależy od geometrii powierzchni w obszarze zetknięcia oraz od charakterystyki sprężysto-plastycznej materiału. Wpływ podatności lokalnej przejawia się przede wszystkim w złagodzeniu ostrości maksimum fali ciśnienia oraz w nieznacznym jego opóźnieniu. Pewną rolę odgrywa tu także lepkość materiału.

W rezultacie rzeczywisty rozkład naprężeń w strefie wzbudzenia jest nie tylko nierównomierny, ale i jego maksimum jest mniejsze od przyjętego w obliczeniach (krzywa 3). Ponieważ zaś mniejszym naprężeniom towarzyszą dłuższe fale wybojeniowe, przeto mamy wyjaśnienie przyczyn powstawania także dłuższych fal sprężystych niż to by wynikało ze wzoru (3.10).

Nieco mniejszej rozbieżności wyników można oczekiwać w przypadku fal plastycznych, bowiem wówczas rozkład naprężeń jest bardziej równomierny. Korzystając ze wzorów rozdziału 4 obliczono długości fal plastycznych w drucie miedzianym dla następujących danych:  $E = 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $E_p = 1,8 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$ ,  $\rho = 8,95 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma_p = 150 \text{ MN/m}^2$ ,  $\varepsilon_p = 0,15\%$ ,  $c_p = 456 \text{ m/s}$ . Wyniki obliczeń przedstawia krzywa 1 na rys. 5, obrazująca zależność  $\Lambda_k/r = f(v_0)$ . Miedź jest materiałem wrażliwym na prędkość odkształcenia, dlatego w obliczeniach dokładniejszych należałoby uwzględnić zależność  $\sigma_p$  od  $v_0$ .



Rys. 5

Doświadczenia opisane w pracy [11] wykonano na prętach aluminiowych (pełnych i rurowych), które rozprędzone do stosunkowo dużych prędkości (30 ÷ 200 m/s) uderzały poosiowo w sztywną, nieruchomą przegrodę. Przy prędkości  $\sim 22 \text{ m/s}$  stwierdzano pierwsze objawy wybożenia plastycznego. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

dla materiału Al 6061-T6:  $E = 0,694 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $E_p = 1,24 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$ ,  $\rho = 2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma_p = 310 \text{ MN/m}^2$ ,  $\varepsilon_p = 0,43\%$ ,  $c_p = 678 \text{ m/s}$ ;

dla materiału 2024-T3:

$E = 0,694 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $E_p = 2,76 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$ ,  $\rho = 2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma_p = 360 \text{ MN/m}^2$ ,  $\varepsilon_p = 0,51\%$ ,  $c_p = 1000 \text{ m/s}$ .

Wyniki obliczeń oraz pomiarów długości fal (oznaczone  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\circ$  na rys. 5) wykazują dobrą zgodność w dużym przedziale prędkości uderzenia. Rozbieżności należy głównie przypisać ograniczonej masie ciała uderzającego oraz wrażliwości aluminium na prędkość odkształcenia. Pewien wpływ ma tu także rozpęcznie próbek w pobliżu brzegów uderzających.

## 6. Uwagi końcowe

Jest godne podkreślenia, iż do wzoru na długość fali wybozeniowej doszliśmy (w rozdziałach 3 i 4) przez ogólną analizę warunków propagacji fal podłużno-giętnych, a więc bez formułowania problemu brzegowo-początkowego. Konfrontacja teorii z wynikami doświadczeń potwierdza słuszność takiego podejścia, a tym samym niezależność długości krytycznej od warunków brzegowych.

Jeżeli smukłość pręta jest mniejsza od  $\lambda_k/r$  lub prędkość uderzenia jest mniejsza od  $c(2\pi r/\lambda_k)^2$ , wówczas wyboczenie sprężyste nie może nastąpić podczas przebiegu pierwszej fali ciśnienia. Stan krytyczny może jednak zaistnieć podczas jednego z następnych przebiegów fali ciśnienia, bowiem kolejne odbicia tej fali (od brzegu utwierdzonego) intensyfikują początkowo stan naprężenia, większym zaś ciśnieniom towarzyszą coraz krótsze fale wybozeniowe.

Analizę dynamiki procesu wybożenia w późniejszej fazie uderzenia komplikuje nader złożony obraz rozkładu ciśnień, jaki wytwarza się wskutek nałożenia fal wielokrotnie odbitych. Dodatkową komplikację rachunkową stanowi lepkość materiału, której wpływ musi być bezwzględnie brany pod uwagę przy analizie późniejszej fazy procesu. Trudności te można zasadniczo pokonać stosując metodę charakterystyk.

Na zakończenie wypada przypomnieć, iż każdy pręt rzeczywisty posiada pewną krzywiznę wstępną lub inne czynniki warunkujące wzbudzenie drgań giętnych. Dlatego wyboczenie uderzeniowe, rozumiane jako wzbudzenie ruchu poprzecznego elementów pręta, występuje zasadniczo przy każdej prędkości uderzenia. Jednakże przy prędkościach mniejszych od  $c(2\pi r/\lambda_k)^2$  ma ono charakter lepkosprężysty, a więc po upływie pewnego czasu od uderzenia (rzędu kilkunastu okresów drgań poprzecznych) odkształcenia związane z falą giętą zanikają. Jest to więc przypadek asymptotycznej stateczności i jako taki nie stwarza niebezpieczeństwa uszkodzenia konstrukcji. Dopiero pojawienie się plastycznych fal wybozeniowych stanowi zagrożenie dla nośności konstrukcji poddanej obciążeniom uderzeniowym.

## Literatura cytowana w tekście

1. G. GERARD, H. BECKER, *Column behaviour under conditions of impact*, Journ. Aeronaut. Sci., 1, 19 (1952), 58 - 60.
2. S. KALISKI, *Stateczność udarowa pręta*, Biul. WAT, 14 (1955).
3. O. И. КАЦИТАДЗЕ, *Теоретическое и экспериментальное исследование ударного продольного изгиба*, Труды Кут. с.-х ин-та 1 (1956), 151 - 168.
4. Г. Н. РАЗМАДЗЕ, О. И. КАЦИТАДЗЕ, *О проблеме ударной продольной устойчивости*, Тр. Кут. с.-х. ин-та 2 (1957), 381 - 386.

5. С. Д. Пономарев и др., *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, т. II, Москва 1952.
6. N. J. HUFFINGTON, *Response of elastic columns to axial pulse loading*, AIAA Journ., 9, 1 (1963), 2099-2104
7. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
8. Б. А. Гордиенко, *Выпучивание стержней при ударном нагружении*, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1 (1969), 185 - 187.
9. Б. М. Малышев, *Устойчивость стержней при ударном сжатии*, инж. ж., Мех. тверд. тела, 4 (1966), 137 - 142.
10. М. Е. Каган, Н. Д. Геня, *Экспериментальное исследование работы деревянных стержней на продольный удар*, Изв. высш. учебн. зав. Строительство и архитектура, 3 (1961), 33 - 38.
11. G. R. ABRAHAMSON, J. N. GOODIER, *Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave*, Trans. ASME, Journ. of Appl. Mech., E 33, 2 (1966), 214-247.
12. R. M. DAVIES, *Stress waves in solids*, Cambr. Univ. Press, 1956.
13. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.

### Резюме

#### УДАРНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕРЖНЯ С БОЛЬШОЙ ГИБКОСТЬЮ

Выведены дифференциальные уравнения описывающие сопряженное движение при продольном изгибе стержня из идеально упругого материала или из упруго-пластического материала с линейным упрочнением. Такого рода движение возникает вследствие продольного удара по одному из концов стержня.

На основе упомянутых уравнений, при предположении о равномерности сжатия в зоне возмущения, исследованы условия распространения продольно-изгибных волн. Оказалось, что каждому значению напряжения сжатия, а следовательно и каждой скорости удара, соответствует некоторая длина изгибной волны, при которой фазовая скорость падает до нуля, а групповая скорость неограниченно возрастает, это является признаком динамической неустойчивости стержня.

Сопоставление формул для длины волны выпучивания с приведенными в [9] и [11] экспериментальными результатами приводит, как для упругих, так и для пластических волн, к хорошему совпадению, однако длина пластической волны лучше описывается формулой в которой модуль упрочнения заменен усредненным по диапазону упруго-пластических деформаций касательным модулем.

### Summary

#### IMPACT BUCKLING OF A SLENDER ROD

Differential equations of coupled longitudinal-flexural vibrations of a rod have been developed. Such a motion is excited by the longitudinal impact of a rigid body. The material of the rod may be ideally elastic or exhibit linear strain-hardening.

The conditions of the propagation of longitudinal-flexural waves have been investigated for a homogeneous compression in the excitation zone. It has been shown that to each compression, i.e. to each impact velocity corresponds a certain wavelength of bending, for which the phase velocity decreases to zero and the group velocity increases infinitely. That is characteristic for instability in the dynamic sense.

A confrontation of the formulas for the buckling wavelenegth with the test results described in [9], [11] shows a good agreement in the range of both elastic and plastic waves. In this second case a better agreement with the experiment is obtained by means of formula (4.5), in which instead of the strain-hardening modulus, the average tangent modulus is substituted.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lutego 1975 r.*