

TENSOR TARCIA COULOMBA*)

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W zagadnieniach dynamiki ciał stałych nie rozwikłanym do końca problemem jest opis matematyczny niezachowawczych sił tarcia w połączeniach i w miejscach styku elementów konstrukcji.

Podstawowymi cechami każdego takiego opisu winno być oparcie się o wyniki podstawowych badań fizycznych oraz łatwość stosowania tego opisu w badaniach ruchu ciał. Istnienie sił tarcia na powierzchniach styku poruszających się ciał pociąga za sobą konieczność uwzględnienia warunków granicznych ruchu, historii przemieszczeń oraz stanu więzów w styku [1, 2]. Niezbędny jest więc również taki opis tarcia, aby możliwa była analiza całokształtu zjawisk towarzyszących ruchowi.

W pracach poświęconych dynamice ciał stałych z udziałem sił tarcia na ogół wykorzystuje się znany model tarcia Coulomba, np.: [1; 3, 4]. Ten sam opis tarcia stosowany jest w problemach kontaktowych oraz wytrzymałości połączeń tarciovych i układów warstwowych przy quasi-statycznej zmianie obciążenia, np.: [5]. Do nielicznych należą prace będące próbą znalezienia, w oparciu o założenia Coulomba, wygodnego dla dynamiki opisu tarcia [6, 7].

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie opisu siły tarcia w postaci tensora uwzględniającego złożone własności powierzchni trących się.

2. Zagadnienia tarcia suchego

Tarciem suchym suwnym nazywa się całokształt zjawisk występujących między stykającymi się, niesmarowanymi powierzchniami ciał stałych, spowodowanych działaniem siły normalnej dociskającej te ciała i siły stycznej przemieszczającej lub usiłującej je przemieścić [8]. Zazwyczaj przy omawianiu tarcia przedstawia się dwa jego mechanizmy: tarcie statyczne i tarcie kinetyczne.

W niniejszej pracy rozważa się przypadek poruszających się względem siebie ciał znajdujących w styku. Przyjmuje się, że na powierzchni styku obowiązują prawa tarcia kinetycznego. Względne przemieszczenie ciał nazywa się poślizgiem.

Siła wzajemnego docisku ciał i prędkość poślizgu są tzw. parametrami tarcia, bowiem stanowią one bezpośrednią przyczynę omawianego zjawiska i wpływają na jego charakter.

*) Praca wykonana w ramach planu badań MR I/26, temat 09.3.

Dotychczas zdaniem autora nie opracowano ogólnej teorii, która określałaby jednoznacznie współczynniki tarcia lub siłę tarcia w zależności od własności ciał i parametrów tarcia. Podstawowa trudność tkwi w dużej liczbie czynników wpływających w sposób istotny na przebieg zjawiska tarcia [8]. W pracy przyjęto, że siła tarcia określona jest znanym wzorem Amontonsa i Coulomba. Stały w czasie współczynnik tarcia μ zależy od materiału trących się ciał i konfiguracji powierzchni styku.

Zwykle zakłada się, że chropowatość powierzchni styku trących się ciał jest jednorodna i izotropowa.

HUBER [9] zauważył, że współczynnik tarcia podłużnego może być różny od współczynnika tarcia poprzecznego na skutek np.: rodzaju obróbki (struganie, toczenie) lub struktury walcowniczej ciał. Możemy mówić zatem o chropowatości ortotropowej i anizotropowej.

3. Model tarcia ortotropowego Hubera

Tarcie odpowiadające chropowatości ortotropowej nazywamy tarcie ortotropowym. Kierunek siły tarcia w tym przypadku jest przeciwny kierunkowi poślizgu przy ruchu w kierunkach ortotropii. Jeśli poślizg następuje w innych kierunkach, kierunek siły tarcia nie pokrywa się z nimi. Mówimy wtedy, że siła tarcia zbacza z kierunku prędkości poślizgu.

Niech osie x, y układu Oxy pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii na płaszczyźnie styku. Niech μ_1 i μ_2 są współczynnikami tarcia wzdłuż osi x i y , natomiast μ_α współczynnikiem odpowiadającym poślizgowi w kierunku tworzącym kąt α z osią x . HUBER w [9] przyjął, że

$$(3.1) \quad \mu_\alpha = \mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha.$$

Postulując zależność (3.1) Huber wzorował się na zależności między naprężeniami normalnymi w płaskim stanie naprężenia

$$(3.2) \quad \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha,$$

gdzie σ_α , σ_x i σ_y są naprężeniami normalnymi na bokach trójkątnego elementu wyciętego z napiętej płaszczyzny. Kąt, o który musi zbaczać kierunek siły tarcia od kierunku poślizgu przy $\alpha \in (0, \pi/2)$, oznacza się przez β . Wyznaczając kąt β HUBER wykorzystał analogię z kątem, o który zbacza naprężenie całkowite p_α określone wzorem

$$(3.3) \quad p_\alpha = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2},$$

od kierunku naprężenia normalnego σ_α w płaskim stanie naprężenia. Tangens tego kąta wynosi

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha}{-\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha}.$$

Zgodnie z powyższymi założeniami składowe T_x i T_y siły tarcia dane są wyrażeniami

$$(3.5) \quad T_x = \mu_\alpha N \cos(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_1 N \cos \alpha,$$

$$(3.6) \quad T_y = \mu_\alpha N \sin(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_2 N \sin \alpha.$$

Z wzorów (3.5) i (3.6) nie można wydzielić części zależnej tylko od funkcji kąta α charakteryzującego kierunek poślizgu na powierzchni styku.

4. Tensor tarcia suwnego i jego własności

Weźmy dwie dwuwymiarowe przestrzenie wektorowe \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . Przyjmijmy w \mathcal{E}_1 ortogonalną bazę wersorów \mathbf{k}_i ($i = 1, 2$) a w \mathcal{E}_2 dowolną bazę wersorów \mathbf{e}_j ($j = 1, 2$). Niech przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2 \equiv \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ będzie produktem tensorowym przestrzeni \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . Każdy element tej przestrzeni jest liniową kombinacją polibaz $\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Może być więc zapisany w postaci

$$(4.1) \quad \mathbf{Q} = Q^{ij} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Niech \mathcal{A} będzie liniowym odwzorowaniem przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{E}_1$ w przestrzeń tensorową $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{E}_1$. Wówczas

$$(4.2) \quad \bigvee_{\mathbf{Q} \in \mathcal{T}_2} \bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathcal{T}_1} \mathcal{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{Q}\mathbf{a},$$

gdzie $\mathcal{A}(\mathbf{a}) \in \mathcal{T}_1$, [10].

Niech elementami przestrzeni \mathcal{E}_1 będą kontrawariantne wektory \mathbf{t} tarcia odpowiadające jednostkowemu dociskowi, a elementami przestrzeni \mathcal{E}_2 będą dowolne kontrawariantne wersory \mathbf{v} wektora prędkości poślizgu.

Definicja: Nieosobliwy tensor \mathbf{Q} nazywamy tensorem tarcia, jeżeli \mathbf{Q} nasunięty lewostronnie na wersor \mathbf{v} wektora prędkości poślizgu jest wektorem przeciwnym do wektora siły tarcia Coulomba \mathbf{t} przy jednostkowym docisku, tzn.

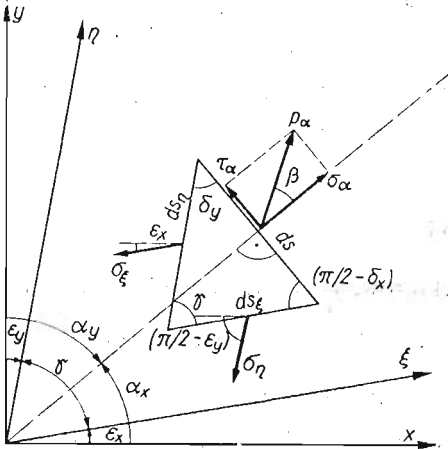
$$(4.3) \quad \mathbf{t} = -\mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Wektor siły tarcia przy dowolnym docisku N określa zależność

$$(4.4) \quad \mathbf{T} = N\mathbf{t}.$$

W przypadku tarcia ortotropowego przyjęto nieortogonalny układ współrzędnych $O\xi\eta$ na płaszczyźnie styku. Kąty γ , ϵ_x , ϵ_y orientują układ $O\xi\eta$ względem prostokątnego układu Oxy , rys. 1. Kierunek poślizgu określają α_x i α_y . Założono, że rozkład sił tarcia

w ukośnokątnym układzie współrzędnych jest taki jak rozkład naprężeń na bokach trójkątnego elementu w płaskim stanie naprężenia. Element taki wraz z orientacją względem układu współrzędnych i kierunku poślizgu pokazano na rys. 1. Przyjęto, że naprężenia p_α na boku ds rozkładają się na naprężenia równoległe do linii ξ i η na bokach ds_ξ i ds_η .



Rys. 1. Analogia tarcia ortotropowego z płaskim stanem naprężenia

Naprężenia p_α określa wzór (3.3), w którym

$$(4.5) \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} (\sigma_\xi \cos^2 \delta_x + \sigma_\eta \sin^2 \delta_y),$$

$$(4.6) \quad \tau_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} (\sigma_\eta \cos \delta_y \sin \delta_y - \sigma_\xi \cos \delta_x \sin \delta_x).$$

gdzie, $\delta_x = \alpha_x - \varepsilon_x$ i $\delta_y = \pi/2 - \alpha_y + \varepsilon_y$.

Niech μ_1 i μ_2 są współczynnikami tarcia wzdłuż osi ξ i η , a μ_α jest współczynnikiem tarcia przy poślizgu w kierunku nachylonym do osi x pod kątem α_x i przez założoną analogię z p_α określonym wzorem

$$(4.7) \quad \mu_\alpha = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{(\mu_1 \cos^2 \delta_x + \mu_2 \sin^2 \delta_y)^2 + (\mu_2 \cos \delta_y \sin \delta_y - \mu_1 \cos \delta_x \sin \delta_x)^2}.$$

Kąt zbroczenia kierunku tarcia od kierunku poślizgu przy $\alpha \in (0, \pi/2)$ określa wzór

$$(4.8) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_\eta \cos \delta_y \sin \delta_y - \sigma_\xi \cos \delta_x \sin \delta_x}{\sigma_\xi \cos^2 \delta_x + \sigma_\eta \sin^2 \delta_y},$$

gdzie za σ_ξ i σ_η należy podstawić odpowiednio μ_1 i μ_2 . Zgodnie z przyjętymi założeniami otrzymano następujące wzory na składowe siły tarcia w układzie Oxy

$$(4.9) \quad T^1 = -N(\mu_1 \cos \varepsilon_x ds_\eta + \mu_2 \sin \varepsilon_y ds_\xi) = \\ = -\frac{N}{\sin \gamma} [\mu_1 \cos \varepsilon_x \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) + \mu_2 \sin \varepsilon_y \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)],$$

$$(4.10) \quad T^2 = -N(\mu_1 \sin \varepsilon_x ds_\eta + \mu_2 \cos \varepsilon_y ds_\xi) = \\ = -\frac{N}{\sin \gamma} [\mu_1 \sin \varepsilon_x \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) + \mu_2 \cos \varepsilon_y \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)].$$

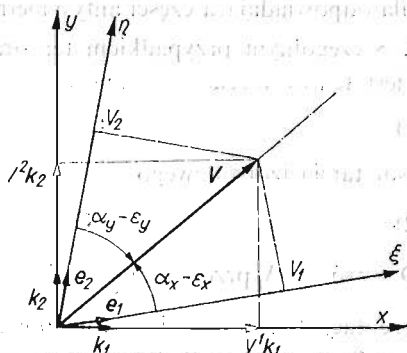
W powyższych związkach wykorzystano następujące zależności:

$$(4.11) \quad ds_{\xi} = \frac{\sin \delta_y}{\sin \gamma} \quad \text{i} \quad ds_{\eta} = \frac{\cos \delta_x}{\sin \gamma}.$$

Łatwo zauważyć, że $\cos(\alpha_x - \varepsilon_x)$ i $\cos(\alpha_y - \varepsilon_y)$ są kosinusami kierunkowymi wektora prędkości poślizgu w układzie ukośnokątnym $O\xi\eta$, rys. 2. Kosinusy kierunkowe wektora prędkości w układzie Oxy określają relacje

$$(4.12) \quad \cos \alpha_x = \frac{V^1}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}} \quad \text{i} \quad \cos \alpha_y = \frac{V^2}{\sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2}},$$

gdzie V^1 i V^2 są składowymi wektora prędkości poślizgu w bazie $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$.



Rys. 2. Wektor prędkości poślizgu i jego składowe

Zgodnie z wyprowadzonymi wzorami reprezentacją tensora tarcia w wybranym powyżej przypadku tarcia jest następująca macierz

$$(4.13) \quad (\mathbf{Q}) = (Q^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \cos \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_1 \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \cos \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \mu_1, \mu_2 \in \langle 0, +\infty \rangle \quad \text{i} \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

Nadto musi być spełniony warunek

$$(4.15) \quad (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

Utworzony w ten sposób tensor \mathbf{Q} oraz ogólny tensor tarcia mają następujące właściwości:

1. Moc siły pochodzącej od części antysymetrycznej tensora tarcia jest równa zeru.

D o w ó d: Reprezentacją macierzową antysymetrycznej części tensora tarcia jest macierz

$$(4.16) \quad (\mathbf{Q}^A) = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(4.17) \quad A = \frac{1}{2} (Q^{21} - Q^{12}).$$

Siłą tarcia przy jednostkowym docisku, pochodzącą od części antysymetrycznej tensora tarcia jest

$$(4.18) \quad \mathbf{t}^A = -\mathbf{Q}^A \mathbf{v}.$$

Wersor \mathbf{v} w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ może być przedstawiony następująco

$$(4.19) \quad \mathbf{v} = [v^1, v^2]^T.$$

Stąd, otrzymujemy moc siły \mathbf{t}^A

$$(4.20) \quad M = -\mathbf{v}^T(\mathbf{Q}^A \mathbf{v}) = -[v^1, v^2] \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Siła odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia ma charakter zachowawczy.

2. Szczególnym przypadkiem tensora tarcia o ortotropii zgodnej z osiami układu Oxy jest tensor tarcia ortotropowego

$$(4.21) \quad \mathbf{Q} = \mu_1 \mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$

i tensor tarcia izotropowego

$$(4.22) \quad \mathbf{Q} = \mu(\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{k}_2 \otimes \mathbf{e}_2).$$

D o w ó d: W przestrzeni \mathcal{E}_2 wybrano ortonormalną bazę wersorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Elementy reprezentacji tensora tarcia ortotropowego otrzymano wprost z (4.13) zakładając $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\mu_1 \neq \mu_2 \neq 0$. Ponadto przy wyznaczaniu reprezentacji tensora tarcia izotropowego z (4.13) przyjęto dodatkowo $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$.

3. Każdy tensor tarcia ortotropowego i izotropowego jest tensorem symetrycznym.

D o w ó d: Ponieważ w przypadku tensora tarcia ortotropowego i izotropowego

$$(4.23) \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q},$$

więc częścią symetryczną tensora tarcia jest

$$(4.24) \quad \mathbf{Q}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}.$$

Część antysymetryczna tego tensora równa jest zeru.

4. Każdy tensor tarcia ortotropowego (4.13) którego elementy reprezentacji utworzono przy zachowaniu warunków (4.14) i (4.15) ma dwie rzeczywiste wartości własne i dwa wektory własne.

D o w ó d: Wartości własne tensora tarcia \mathbf{Q} określa równanie

$$(4.25) \quad \det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Stąd po łatwych przekształceniach otrzymuje się dla tensora (4.13) równanie kwadratowe postaci

$$(4.26) \quad \lambda^2 \cos^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \lambda(\mu_1 + \mu_2) \cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\mu_1 \sin 2\varepsilon_x + \mu_2 \sin 2\varepsilon_y)^2 + \\ + (\mu_1 \cos^2 \varepsilon_x + \mu_2 \sin^2 \varepsilon_y) \cdot (\mu_1 \sin^2 \varepsilon_x + \mu_2 \cos^2 \varepsilon_y) = 0.$$

Przy spełnieniu warunków (4.14) i (4.15) wyróżnik tego równania jest nieujemny ($\Delta \geq 0$), więc pierwiastki są liczbami rzeczywistymi.

5. Każdy tensor tarcia ortotropowego (4.21) ma dwie wartości własne, którymi są liczby μ_1 i μ_2 oraz dwa wektory własne postaci

$$(4.27) \quad \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

D o w ó d: W przypadku tensora tarcia ortotropowego równanie (4.25) sprowadza się do postaci

$$(4.28) \quad (\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda) = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są μ_1 i μ_2 . Stąd już łatwo określić wektory własne spełniające równanie

$$(4.29) \quad \mathbf{Qm} = \lambda \mathbf{m}.$$

6. Każdy tensor tarcia izotropowego ma wartość własną podwójną równą współczynnikowi tarcia μ , a jego wektorem własnym jest dowolny wektor.

Prosty dowód pominięto.

W przypadku tarcia ortotropowego (4.21), współczynnik tarcia odpowiadający poślizgowi w kierunku określonym kątem α wynika z wzoru (4.7) po podstawieniu $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ i $\gamma = \pi/2$,

$$(4.30) \quad \mu_\alpha = \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}.$$

W przypadku tarcia izotropowego (4.22) współczynnik tarcia μ_α można otrzymać z (4.7) po podstawieniu $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\gamma = \pi/2$ oraz $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$. Stąd

$$(4.31) \quad \mu_\alpha = \mu.$$

Dla różnych formuł matematycznych współczynnika μ_α (3.1) i (4.30) wynikają różne zależności na składowe wektorów siły tarcia, (3.5) (3.6) i (4.9) (4.10). Sposoby wyznaczenia kąta β w [9] i niniejszej pracy są identyczne.

Dla porównania uzyskanych wyników z pracą [9] przeprowadzono obliczenia błędu względnego między formułami matematycznymi μ_α określonymi wzorami (3.1) i (4.30). W tym celu utworzono następującą funkcję błędu

$$(4.32) \quad \Delta(\alpha, \kappa) = \frac{\sqrt{(\kappa \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}}{\kappa \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} - 1,$$

gdzie $\mu_1 = \kappa \mu_2$. Wartości współczynników tarcia μ_1 i μ_2 nie mogą zbyt różnić się, jak również różnica ta z reguły maleje z czasem na skutek np.: docierania się elementów maszyn i urządzeń [9]. Porównanie wartości współczynników tarcia podanych w ogólnie dostępnych poradnikach inżynierskich pozwala oszacować zmienności κ . Przykładowo rozważmy tarcie: a) stali o stal — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,18; 0,15 \rangle$ stąd $\kappa \in \langle 1,2; 0,83 \rangle$, b) stali o żelwo — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,17; 0,11 \rangle$ więc $\kappa \in \langle 1,55; 0,65 \rangle$, c) skóry o drewno — $\mu_1, \mu_2 \in \langle 0,5; 0,3 \rangle$, $\kappa \in \langle 1,67; 0,6 \rangle$.

Maksymalny błąd oszacowano przez określenie kresu górnego funkcji błędów przy różnych przedziałach zmienności współczynnika κ , otrzymując

$$(4.33) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,5; 2 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,0612 \equiv 6,12\%,$$

$$(4.34) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,2; 5 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,343 \equiv 34,3\%,$$

$$(4.35) \quad \sup_{\substack{\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle \\ \kappa \in \langle 0,1; 10 \rangle}} \Delta(\alpha, \kappa) \leq 0,7403 \equiv 74,03\%.$$

Wyniki te wskazują na małą różnicę między przedstawianymi modelami tarcia ortotropowego, gdy $\kappa \in \langle 0,5; 2 \rangle$, co jak wykazano wystarczy dla praktyki inżynierskiej. Można więc stwierdzić, że model tarcia HUBERA i prezentowany w niniejszej pracy, określają zbliżone co do wartości siły tarcia gdy współczynniki μ_1 i μ_2 nie różnią się zbyt.

Przyjęty opis sił tarcia na powierzchni styku należy skonfrontować z wynikami doświadczalnymi.

5. Przykład numeryczny

W celu sprawdzenia użyteczności wprowadzonego opisu tarcia wykonano szereg testowych przykładów numerycznych dla ruchu punktu materialnego po chropowatej płaszczyźnie opisanego prostym równaniem

$$(5.1) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{T},$$

gdzie m masa punktu, \mathbf{r} wektor położenia, \mathbf{F} siła czynna, \mathbf{T} opór tarcia. Wektory równania (5.1) można przedstawić w następującej postaci

$$(5.2) \quad \mathbf{r} = [x, y]^T, \quad \mathbf{F} = [F_x, F_y]^T, \quad \mathbf{T} = -N\mathbf{Q}\mathbf{v},$$

gdzie

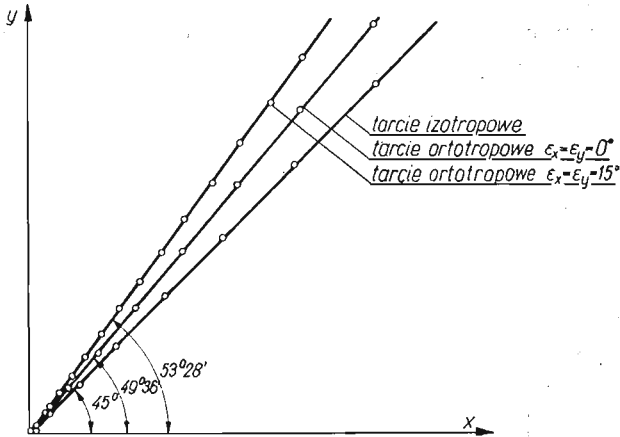
$$(5.3) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \end{bmatrix}.$$

Stąd wektor siły tarcia można przedstawić w postaci

$$(5.4) \quad \mathbf{T} = -N \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \cos \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_1 \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_2 \cos \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \end{bmatrix}.$$

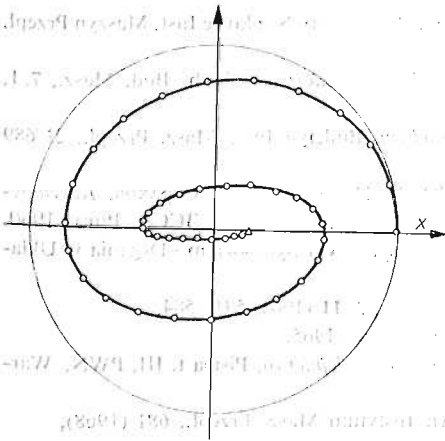
Równanie ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Na rys. 3 przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych równania (5.1) gdy $\mathbf{F} = \text{const}$ i jest nachylona do osi x pod kątem 45° , a tarcie ma charakter tarcia ortotropowego ($\mu = 0,12$) ortotropowego ($\mu_1 = 0,17$; $\mu_2 = 0,12$) i anizotropowego ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = 15^\circ$; $\mu_1 = 0,17$; $\mu_2 = 0,12$). Punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po prostej. Odległości między punktami przedstawionymi na rys. 3 odpowiadają jednokowym odstępom czasu ($\Delta t = 0,5$ [s]).

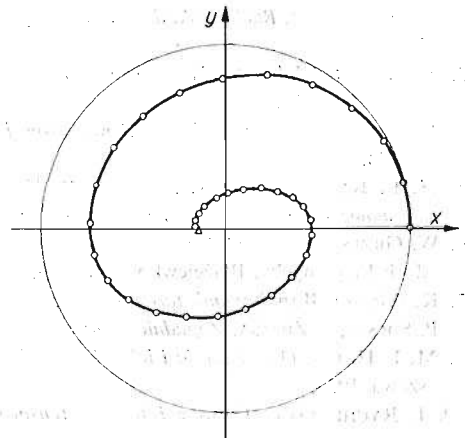


Rys. 3. Tor punktu poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie pod działaniem stałego wektora siły nachylonego do osi x pod kątem 45°

Na rys. 4, 5, 6 podano wyniki rozwiązania równania ruchu, gdy $F = -kr$ (k — stała), a charakterystyki tarcia izotropowego (rys. 4), ortotropowego (rys. 5) i ortotropowego (rys. 6) są jak w przykładzie poprzednim. Warunki początkowe ruchu dobrano tak, aby torem punktu był okrąg w przypadku braku sił oporu. Po chropowatej płaszczyźnie punkt



Rys. 4. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarcie izotropowym

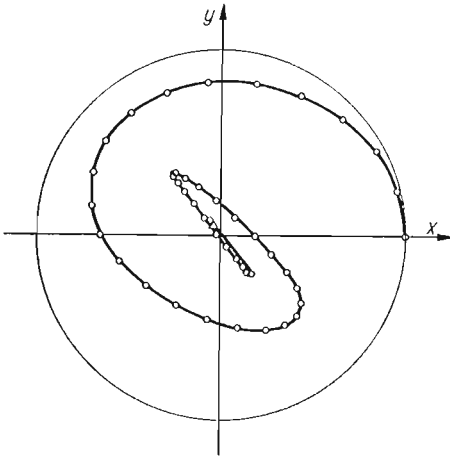


Rys. 5. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarcie ortotropowym $\epsilon_x = \epsilon_y = 0^\circ$

porusza się ruchem opóźnionym i ostatecznie zatrzymuje się w miejscu wskazanym na rysunkach. Przedstawione na rysunkach punkty odpowiadają jednakowym odstępom czasu ($\Delta t = 0,2$ [s]).

Przeprowadzone eksperymenty numeryczne wykazały, że gdy wartości współczynników tarcia na kierunkach głównych znacznie różnią się, w przykładzie z $\epsilon_x = \epsilon_y = 15^\circ$

ponad 3 razy (rys. 6), punkt dąży do poruszania się po torze o kierunku prawie pokrywającym się z kierunkiem najmniejszego tarcia. Po wykonaniu kilku gasnących wahań na tym torze, ostatecznie zatrzymuje się.



Rys. 6. Tor punktu poruszającego się pod wpływem siły centralnej, po płaszczyźnie z tarciami ortotropowym $\epsilon_x = \epsilon_y = 15^\circ$.

Literatura cytowana w tekście

1. S. W. E. EARL^s, E. J. WILLIAMS, *A linearized analysis for frictionally damped systems*, Jour. of Sound Vibr., 24 4, (1972) 445 - 458.
2. A. ZMITROWICZ, *Ruch płaski dwóch brył sztywnych z prostą styku*, Zeszyty Naukowe Inst. Maszyn Przepl. 1 (1977).
3. Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia suchego na ruchy drgające układów mechanicznych*, Arch. Bud. Masz., 7, 1, (1960) 99 - 116.
4. J. WIĘCKOWSKI, *Dynamika belki warstwowej z tarciami suchym*, Biuletyn Inst. Masz. Przepl., 21/689 (1971).
5. Н. Г. КАЛИНИН, Ю. А. ЛЕБЕДЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВА, Ю. Г. ПОНОВКО, Г. И. СТРАХОВ, *Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях*, - Издат. Акад. Наук ЛССР, Рига, 1960.
6. W. GRZESIKIEWICZ, *Opis tarcia suchego w układach mechanicznych*, VII Symposium «Drgania w Układach Fizycznych», Białeżewko, maj 1976.
7. K. WOLSKI, *Współczynnik tarcia jako wektor*, Arch. Bud. Masz., 3, 11 (1964) 581 - 584.
8. P. SOLSKI, S. ZIEMBA, *Zagadnienia tarcia suchego*, PWN, Warszawa 1965.
9. M. T. HUBER, *Opory tarcia i ich rola w niektórych zagadnieniach kolejnictwa*, Pisma t. III, PWN, Warszawa 1957.
10. I. RYCHLEWSKI, *Tensory i funkcje tensorowe*, Biuletyn Instytutu Masz, Przepl., 681 (1968),

Резюме

ТЕНЗОР ТРЕНИЯ КУЛОМБА

В работе дано определение тензора трения. Совмещение этого тензора с единичным вектором скорости скольжения дает вектор, противоположный вектору силы трения на поверхности контакта твердых тел. Приведены свойства тензора трения и его особенности. Разработанная математическая модель трения сравнивается с моделью ГУБЕРА [9].

Приведены расчеты для точки, движущейся по шероховатой плоскости под действием постоянной или зависящей от положения точки силы.

S u m m a r y

TENSOR OF COULOMB FRICTION

The paper presents a definition of a friction tensor. If that tensor is composed with a versor of a slip speed vector, then vector will be obtained which is reverse to the vector of friction force on the contact surface of solid bodies. The properties of the friction tensor and its particular cases are given. The presented model is compared with the model of Huber [9].

An exemplary calculation of a motion of a point on a rough surface with exciting force either constant or position — dependent was made.

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN
GDAŃSK-WRZESZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1977 r.
