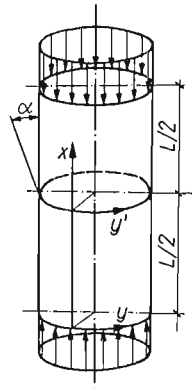


STATECZNOŚĆ POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ Z OBWODOWYM ZAŁOMEM
PRZY ŚCISKANIU OSIOWYM

STANISŁAW ŁUKASIEWICZ, JERZY TUMIŁOWICZ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest zbadanie na drodze teoretycznej wpływu osiowo-symetrycznego załomu (rys. 1) na stateczność ściskanej powłoki walcowej. Tego rodzaju nieciągłość stycznej do południka może powstać przy spawaniu dwóch odcinków rur, jeżeli nastąpi przy tym tzw. wciągnięcie szwu. Załom ma zwykle niewielką głębokość i charakteryzuje się małym kątem między stycznymi do południka po obu jego stronach. Nawet w pobliżu załomu powierzchnia środkowa mało różni się od powierzchni walcowej.



Rys. 1

Badania stateczności powłoki walcowej z wstępnymi niedoskonałościami kształtu prowadzono już od dawna (niektóre rozwiązania przedstawione są w monografii [1]). Jednak autorom pracy nie znane są w literaturze światowej opracowania dotyczące wpływu na stateczność nieciągłości stycznej do powierzchni. Prawdopodobnie przedstawione tu zagadnienie nie było dotychczas badane teoretycznie.

W pracy przyjęto, że powłoka jest cienka, izotropowa i ma stałą grubość. Zagadnienie rozwiązano korzystając z równań technicznej teorii powłok DONNELLA-WŁASOWA. W przypadku powłoki walcowej ze wstępnymi niedoskonałościami kształtu mają one następującą postać (rys. 1)

$$(1) \quad \frac{D}{h} \Delta \Delta w = L(w + w_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$(2) \quad \frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w + 2w_0) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

gdzie w jest ugięciem powłoki (dodatnim do wnętrza), Φ — funkcją naprężeń, $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E — modułem sprężystości materiału powłoki, ν — liczbą Poissona, h — grubością powłoki, R — promieniem walca $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — operator Laplace'a, $L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ jest nieliniowym operatorem różniczkowym.

Kształt powłoki został określony przez ugięcie wstępne w_0 , które przyjęto w postaci

$$(3) \quad \begin{aligned} w_0 &= f_0 e^{k\left(x - \frac{L}{2}\right)}, & x < \frac{L}{2}, \\ w_0 &= f_0 e^{-k\left(x - \frac{L}{2}\right)}, & x \geq \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

gdzie f_0 jest głębokością, załomu, α_0 oznacza kąt załomu pokazany na rys. 1, określony przez $\operatorname{tg} \alpha_0 = \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=L/2} = kf_0$, L — długość powłoki.

Stosując równania (1) i (2) przyjęto, że współczynniki pierwszej formy kwadratowej powierzchni środkowej badanej powłoki są stałe w całym obszarze i równe jedności. Postawione zagadnienie rozwiązano metodą Ritza.

Przed podjęciem rozwiązania wykonano doświadczenie, którego celem było stwierdzenie w jakim stopniu istnienie załomu w powłoce wpływa na kształt pofalowania. Próby przeprowadzono na modelach powłok wykonanych z kartonu o wymiarach: $R = 70$ mm, $L = 325$ mm, $h = 0,3$ mm. Załom miał głębokość około 1 mm i kąt około 20° . Po obciążeniu modeli okazało się, że istnienie załomu nie wpływa zasadniczo na formę odkształceń i tylko zmniejsza liczbę fal obwodowych, np. z 6 do 4. Pofalowanie było symetryczne względem płaszczyzn załomu. Przeprowadzone doświadczenia miały charakter jedynie jakościowy i obciążenia krytycznych nie zmierzono. Biorąc pod uwagę wyniki doświadczeń postanowiono przyjąć ugięcie w postaci funkcji stosowanych przy badaniu stateczności walcowej doskonałej oraz powłok zbliżonych kształtem do walca [2].

Istnienie załomu w powłoce powoduje występowanie silnego zginania w jego sąsiedztwie po obciążeniu powłoki. W rozwiązaniu można rozpatrywać tylko jedną połówkę powłoki. Podstawowy stan naprężeń błonowych w powłoce o małym kącie załomu może być zastąpiony przez stan naprężeń identyczny jak w powłoce bez załomu i pewne dodatkowe obciążenie poprzeczne $1/2q$. Wielkość tego obciążenia wynika z równowagi załomu (rys. 2)

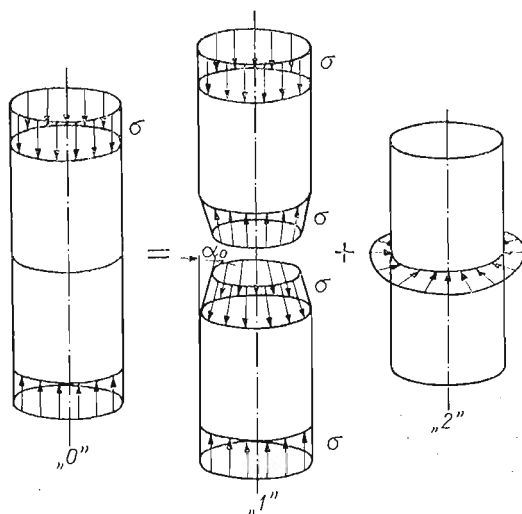
$$(4) \quad q = -2\sigma_{xx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} h \sin \alpha_0.$$

Przed rozwiązaniem zagadnienia nieliniowego określono siły krytyczne na podstawie zlinearyzowanego równania (2). Ugięcie przyjęto w postaci:

$$(5) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + pw_1(x, y) + f_2,$$

gdzie m — liczba półfal na tworzącej, nieparzysta — odkształcenie symetryczne względem załomu, n — liczba fal obwodowych.

Składnik $p \cdot w_1(x, y)$ reprezentuje stan zgięciowy istniejący przed wyboczeniem (rys. 2). Jego wartość obliczono analizując ugięcie powłoki walcowej poddanej działaniu obciążenia q w połowie długości. Funkcja w spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia. Przy



Rys. 2

obliczaniu sił błonowych uwzględniono również składową pochodzącą od stanu zgięciowego przed pofalowaniem. Pełna energia potencjalna była minimalizowana ze względu na parametr f_1 . Okazało się, że składniki uwzględniające stan zgięciowy przed pofalowaniem nie miały wpływu na wartości sił krytycznych. W dalszych obliczeniach, opartych na równaniach nieliniowych zrezygnowano ze składnika reprezentującego podstawowy stan zgięciowy w przewidywanej postaci odkształcenia.

Zależność górnej siły krytycznej od kąta załomu α_0 uzyskana na podstawie rozwiązania zagadnienia w ujęciu liniowym była bardzo podobna do zależności otrzymanej z równań nieliniowych i nie będzie tu przedstawiona.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Do badania stateczności powłoki w ujęciu nieliniowym przyjęto następującą funkcję ugięcia:

$$(6) \quad w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_3,$$

$x \leq \frac{L}{2}$, m — liczba półfal wzdłuż tworzącej walca, n — liczba fal na obwodzie.

Spełnia ona warunki brzegu swobodnie podpartego.

Jeśli m jest liczbą nieparzystą można przyjąć, że druga połowa powłoki odkształca się w sposób opisany identyczną funkcją; odkształcenia będą symetryczne względem załomu. W przypadku m parzystego, gdy rozpatrywana część powłoki odkształca się w sposób określony przez (6) a deformację drugiej połowy opisuje wzór

$$(7) \quad w = -f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} + f_3,$$

w jest ciągle wraz z pochodnymi na całej powłoce, a pełna energia potencjalna drugiej powłoki jest opisana identycznym wzorem jak pierwszej. Jednocześnie z rozpatrywaną częścią odkształcać się będzie pozostała część powłoki. Mamy wtedy wyboczenie o postaci niesymetrycznej względem płaszczyzny załomu.

Odpowiadający przyjętym odkształceniom rozkład naprężeń błonowych został obliczony z równania ciągłości odkształceń dla powłoki cylindrycznej:

$$(8) \quad \frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Równanie to różni się od (2) brakiem po prawej stronie składnika $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Przy małej krzywiznie południka w okolicy załomu (mały kąt α_0 — rzędu paru stopni oraz niezbyt małe f_0) pominięty wyraz jest dużo mniejszy od składników prawej strony równania (8). W przypadku odkształcenia osiowo-symetrycznego równania (2) i (8) są identyczne.

Z powodu powyższego uproszczenia w rozwiązaniu nie występuje w sposób jawny parametr załomu f_0 , a efekt załomu jest scharakteryzowany jedynie przez kąt załomu α_0 . Po wstawieniu założonego ugięcia (6) do równania (8) i scałkowaniu otrzymuje się funkcję naprężeń:

$$(9) \quad \Phi/E = f_1^2 \frac{r^2 n^2}{2} \left(\frac{1}{16n^4} \cos \frac{2ny}{R} + \frac{1}{16r^4} \cos \frac{2rx}{R} \right) + \\ + f_1 f_2 r^2 n^2 \left[\frac{1}{(3r, n)} \sin \frac{3rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - \frac{1}{(r, n)} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} \right] + \\ + f_1 \frac{r^2 R}{(r, n)} \sin \frac{rx}{R} \sin \frac{ny}{R} - f_2 \frac{R}{8r^2} \cos \frac{2rx}{R} - \frac{py^2}{2},$$

gdzie $(ar, bn) = [(ar)^2 + (bn)^2]^2$; $r = \frac{m\pi R}{L}$.

Parametr f_3 ugięcia wyznacza się z warunku cykliczności przemieszczeń obwodowych v :

$$(10) \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0.$$

Pochodną przemieszczenia można obliczyć biorąc pod uwagę zależność między przemieszczeniami a odkształceniem oraz prawo Hooke'a. Otrzymamy

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R}.$$

Ponieważ wyrażenie (11) jest funkcją x oraz y , warunek (10) może być spełniony tylko po uśrednieniu w kierunku zmiennej x . Otrzymamy

$$(12) \quad \frac{f_3}{R} = -\frac{\nu p}{E} + f_1^2 \frac{n^2}{8R^2} - \frac{f_2}{2R}.$$

Pełna energia potencjalna wynosi

$$(13) \quad \mathcal{E} = U_c + U_\theta + L,$$

gdzie energia naprężeń błonowych:

$$(14) \quad U_c = \frac{h}{2E} \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi R} [(\Delta\Phi)^2 - (1+\nu)L(\Phi, \Phi)] dx dy,$$

a energia zginania powłoki

$$(15) \quad U_\theta = \frac{D}{2} \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi R} [(\Delta w)^2 - (1-\nu)L(w, w)] dx dy.$$

Praca sił zewnętrznych L składa się z dwóch części:

— pracy L_1 sił błonowych na zbliżeniu końców powłoki

$$(16) \quad L_1 = h \int_0^{2\pi R} \Delta\sigma_{xx}|_{x=0} dy,$$

gdzie Δ jest połową zmiany odległości między końcami powłoki, dodatnią przy skróceniu

$$(17) \quad \Delta = - \int_0^{L/2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_0^{L/2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx;$$

— pracy L_2 dodatkowego obciążenia q na przemieszczeniu załomu

$$(18) \quad L_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} q \cdot w \Big|_{x=\frac{L}{2}} dy = h \sin \alpha_0 \int_0^{2\pi R} \sigma_{xx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} w \Big|_{x=\frac{L}{2}} dy,$$

$$(19) \quad L = L_1 + L_2.$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych bezwymiarowych:

$$(20) \quad \hat{E} = \mathcal{E} \frac{2R^2}{\pi E L h^4}, \quad \vartheta = \frac{r}{h} = \frac{m\pi R}{nL}, \quad \hat{p} = \frac{\dot{p}R}{Eh}$$

$$\xi_1 = f_1/h, \quad \xi_2 = f_2/h,$$

pełną energię potencjalną można zapisać w postaci:

$$(21) \quad E = E_1 \xi_1^4 + E_2 \xi_1^2 \xi_2^2 + E_3 \xi_1^2 \xi_2 + E_4 \xi_1^2 + E_5 \xi_1^2 p + +$$

$$+ E_6 \xi_2^2 + E_7 \xi_2^2 p + E_8 \xi_2 p + E_9 p.$$

Współczynniki $\hat{E}_1 \dots \hat{E}_9$ są niezależne od \hat{p} , ξ_1 , ξ_2 .

Dla nieparzystych m wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{128} n^4 (1 + \vartheta^4) \frac{h}{R}, \\
 E_2 &= \frac{1}{4} (n\vartheta)^4 \left[\frac{1}{(3\vartheta, 1)} + \frac{1}{(\vartheta, 1)} \right] \frac{h}{R}, \\
 E_3 &= -\frac{1}{16} n^2 \left[1 + \frac{8\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} \right] + 2 \sin \alpha_0 (n\vartheta)^2 \left[\frac{1}{(3\vartheta, 1)} + \frac{1}{(\vartheta, 1)} \right] \frac{R}{L}, \\
 E_4 &= n^4 \frac{h}{R} \frac{(\vartheta, 1)}{48(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \frac{R}{h} \frac{\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} - 2 \frac{R}{L} \frac{R}{h} \sin \alpha_0 \frac{\vartheta^2}{(\vartheta, 1)}, \\
 (22) \quad E_5 &= -\frac{1}{4} n^2 [\vartheta^2 + 2 \sin \alpha_0] \frac{R}{L}, \\
 E_6 &= \frac{1}{6(1-\nu^2)} (n, \vartheta)^4 \frac{h}{R} + \frac{1}{8} \frac{R}{h}, \\
 E_7 &= -\frac{1}{2} (n\vartheta)^2, \\
 E_8 &= -2 \frac{R}{h} \frac{R}{L} \sin \alpha_0, \\
 E_9 &= \frac{R}{h} + 4\nu \sin \alpha_0 \frac{R}{h} \frac{R}{L}.
 \end{aligned}$$

W przypadku m parzystego niektóre współczynniki mają nieco inną postać:

$$\begin{aligned}
 E_3 &= -\frac{1}{16} n^2 \left[1 + \frac{8\vartheta^4}{(\vartheta, 1)} \right], \\
 (23) \quad E &= n^4 - \frac{(\vartheta, 1)}{48(1-\nu^2)} + \frac{1}{4} \frac{R}{h} \frac{\vartheta^4}{(\vartheta, 1)}, \\
 E_8 &= 2 \sin \alpha_0 \frac{R}{h} \frac{R}{L}.
 \end{aligned}$$

Pełną energię potencjalną zminimalizowano ze względu na parametry ξ_1 i ξ_2

$$(24) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi_2} = 0.$$

Ze wzorów (24) otrzymano w przypadku $\xi_1 \neq 0$ (odkształcenie nieosiowo-symetryczne) zależność \hat{p} od ξ_2 :

$$(25) \quad \hat{p} = -\frac{-4E_1 E_6 \xi_2 + (E_2 \xi_2^2 + E_3 \xi_2 + E_4) (2E_2 \xi_2 + E_3)}{2E_1 (2E_7 \xi_2 + E_8) - E_5 (2E_2 \xi_2 + E_3)}$$

oraz zależność ξ_1 od ξ_2 i \hat{p} :

$$(26) \quad \xi_1^2 = -\frac{2E_6 \xi_2 + 2E_7 \xi_2 \hat{p} + E_8 \hat{p}}{2E_2 \xi_2 + E_3}.$$

Powyższe wzory opisują rodzinę krzywych równowagi o dwóch parametrach: n oraz ϑ (ϑ jest zmienną dyskretną, odpowiada całkowitym wartościom m i n).

Krzywe przedstawiono w układzie współrzędnych $\hat{e}-\hat{p}$, gdzie

$$(27) \quad \hat{e} = \frac{2\Delta R}{Lh}$$

jest bezwymiarowym parametrem charakteryzującym skrócenie powłoki. Korzystając ze wzorów (17) i (27), założonej postaci ugięcia i obliczonej funkcji naprężeń otrzymuje się wzór wiążący \hat{p} oraz \hat{e}

$$(28) \quad \hat{e} = \hat{p} + \frac{1}{8} \vartheta^2 n^2 \frac{h}{R} \left(\xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \right).$$

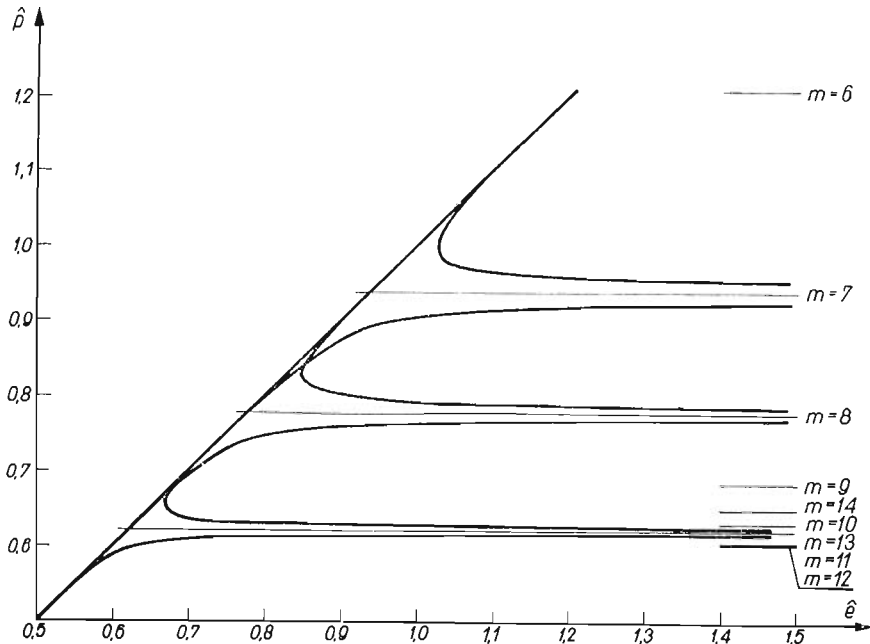
W ramach założonego modelu odkształcenia powłoki (6) pozostaje zbadanie przypadku, gdy $\xi_1 = 0$. Odkształcenie jest wtedy osiowo-symetryczne:

$$(29) \quad w = -\frac{1}{2} f_2 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \frac{1}{2} f_2 + f_3.$$

Pierwsze z równań (24) jest spełnione tożsamościowo, drugie daje zależność

$$(30) \quad \xi_2 = -\frac{E_8 \hat{p}}{2(E_6 + E_7 \hat{p})}.$$

Dla każdego m istnieje krzywa osiowo-symetrycznych stanów równowagi, rozpoczynająca się w punkcie $\hat{p} = 0, \hat{e} = 0$, od której odłączają się linie opisujące odkształcenia o różnych liczbach fal na obwodzie powłoki (rys. 3).

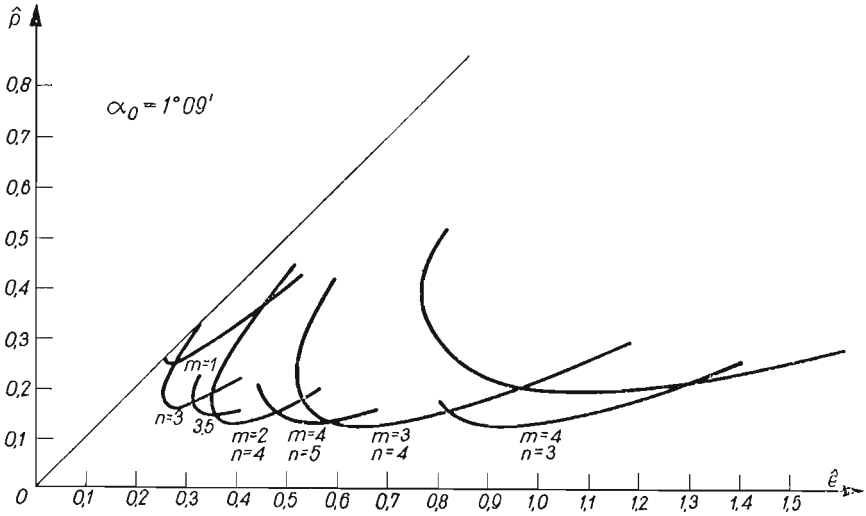


Rys. 3. Krzywe równowagi stanów osiowo-symetrycznych przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$

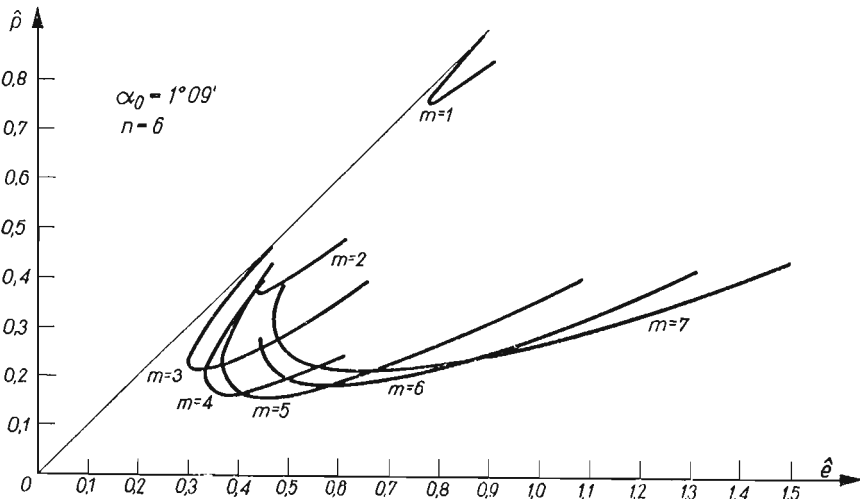
3. Wyniki obliczeń numerycznych

Obliczenia przeprowadzono dla $\nu = 0,3$; $h/R = 0,01$; $L/R = 4$. Na rys. 4 - 7 przedstawione są krzywe stanów równowagi odpowiadające różnym liczbom fal. Nie pokazano wykresów dla $n = 1, 2$ oraz $n > 6$ gdyż odpowiadają one dużym siłom i odkształceniom i opisują nie realizujące się stany równowagi. Z tego samego względu nie przedstawiono wykresów dla $m > 9$.

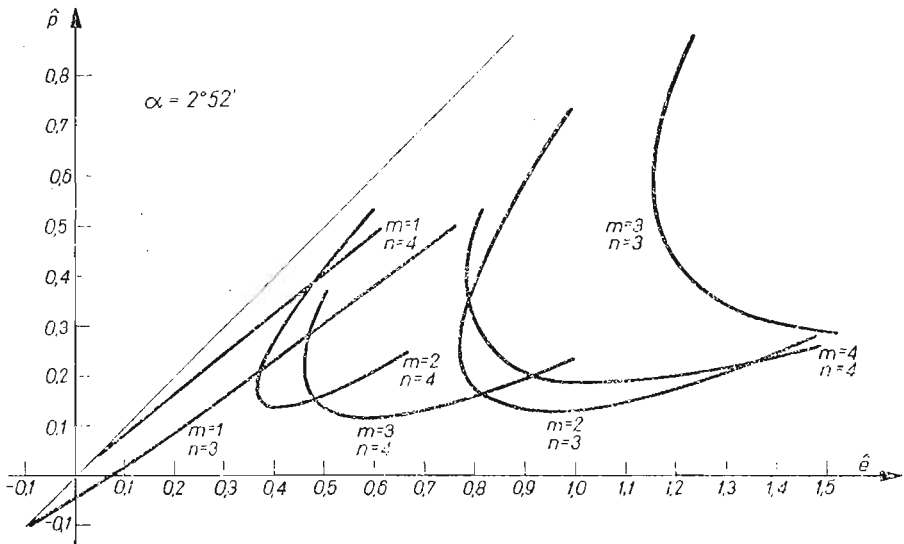
Krzywe nieosiowo-symetrycznych stanów równowagi rozpoczynają się blisko prostej $\hat{p} = \hat{e}$, dalej przy wzroście ξ_2 na ogół przebiegają w kierunku zmniejszającego się \hat{p} i \hat{e} ,



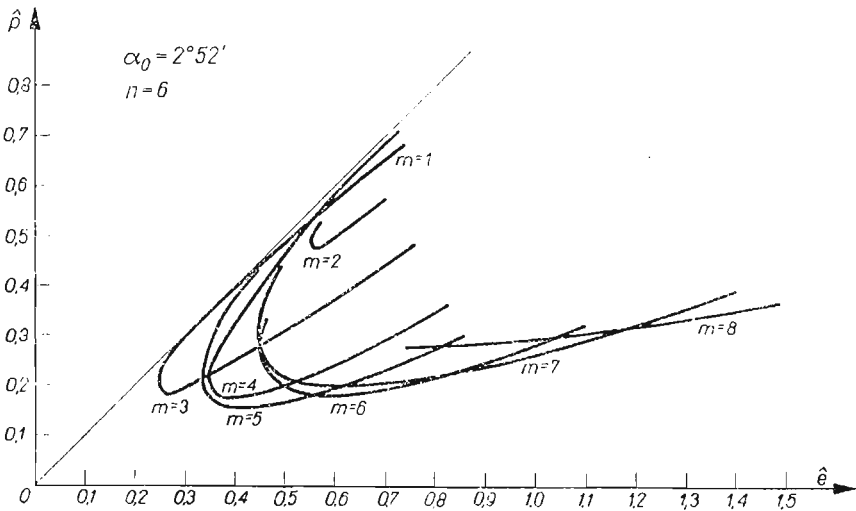
Rys. 4. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ dla $n = 3, 4, 5$



Rys. 5. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ dla $n = 6$



Rys. 6. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ dla $n = 3, 4$



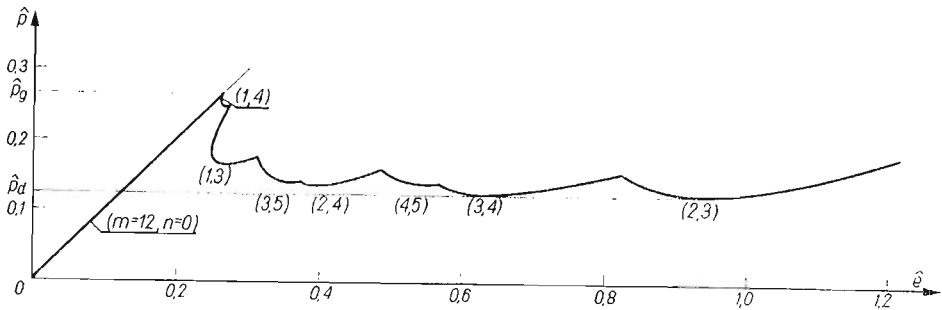
Rys. 7. Krzywe stanów równowagi przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ dla $n = 6$

osiągają minimum i dążą ku rosnącym \hat{p} i \hat{e} . Wyjątek stanowią krzywe odpowiadające $m = 1$ oraz $n = 3 \div 6$ przy $\alpha_0 = 2^\circ 52'$ — są one stale rosnące. Wartość kąta załomu najbardziej wpływa na przebieg linii odpowiadających małym m oraz n . Ze wzrostem α_0 linie te przesuwają się do dołu i wyprostowują się. Z przebiegu linii określonej parametrami $\alpha_0 = 2^\circ 52'$, $m = 1$, $n = 3$ wynika, że może istnieć stan równowagi powłoki pofalowanej bez obciążenia.

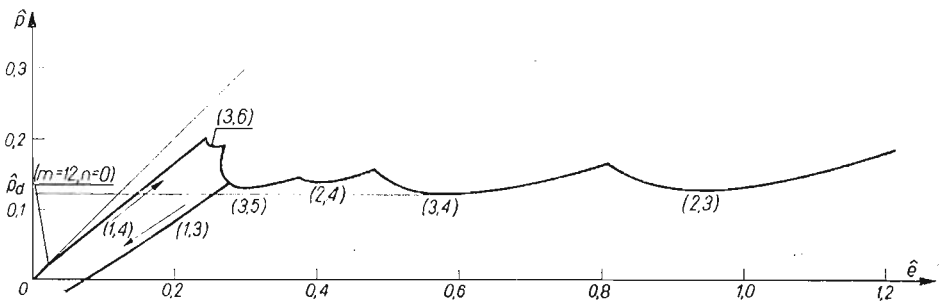
Przy obciążeniu powłoka początkowo odkształca się osiowo-symetrycznie. Krzywe równowagi stanów osiowo-symetrycznych rozpoczynają się w początku układu współ-

rzędnych i przebiegają początkowo (co najmniej do $\hat{p} \approx 0,57$) bardzo blisko prostej $\hat{p} = \hat{e}$. Powyżej każdej z nich ma asymptotę poziomą przy \hat{p} zależnym od m , a niezależnym od kąta załomu. Za asymptotą poziomą przy dalszym wzroście p krzywe zbliżają się nieograniczenie do prostej stanów niepofalowanych. Niektóre linie równowagi przedstawione są na rys. 3. Dla ustalonego m przebieg krzywej stanu osiowo-symetrycznego zależy od wielkości kąta załomu. Gdy maleje on do zera, krzywa dąży do pokrycia się z linią $\hat{p} = \hat{e}$. W przypadku doskonałej powłoki cylindrycznej, osiowo-symetryczne stany równowagi są możliwe na prostej stanów niepofalowanych oraz na prostych równoległych do osi \hat{e} . Siły krytyczne przy osiowo-symetrycznych odkształceniach powłoki doskonałej określają położenie asymptot w przypadku powłoki z załosem. Ich zależność od m przedstawia tabl. 1 ($2m$ oznacza tam liczbę półfal wzdłuż tworzącej walca — wzór (29)).

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń można określić spodziewany przebieg zależności między siłą a skróceniem powłoki przy ściskaniu. Spośród wielu otrzymanych rozwiązań (dla różnych m i n), spełniających warunek minimum pełnej energii potencjalnej względem parametrów f_1 oraz f_2 , należy wybrać te, które mogą się zrealizować. Przyjmując jako kryterium wyboru krzywych ich wysokość położenia na wykresie $\hat{e} - \hat{p}$ otrzymano wykresy ściskania powłok o kącie załomu $1^\circ 09'$ oraz $2^\circ 52'$ przedstawione na rys. 8 i 9.



Rys. 8. Krzywa obciążenia powłoki z załosem o kącie $\alpha_0 = 1^\circ 09'$



Rys. 9. Krzywa obciążenia powłoki z załosem o kącie $\alpha_0 = 2^\circ 52'$

Przy $\alpha_0 = 1^\circ 09'$ powłoka początkowo odkształca się osiowo-symetrycznie, $m = 12$. Jest to pofalowanie o bardzo małej amplitudzie i praktycznie nie zmniejsza sztywności powłoki. Przy $\hat{p} = \hat{p}_g = 0,264$ (górną siłą krytyczną) linie stanów symetrycznych przecinają się z krzywą $m = 1, n = 4$. Następuje przeskok, przy którym spada siła albo wzrasta

Tablica 1

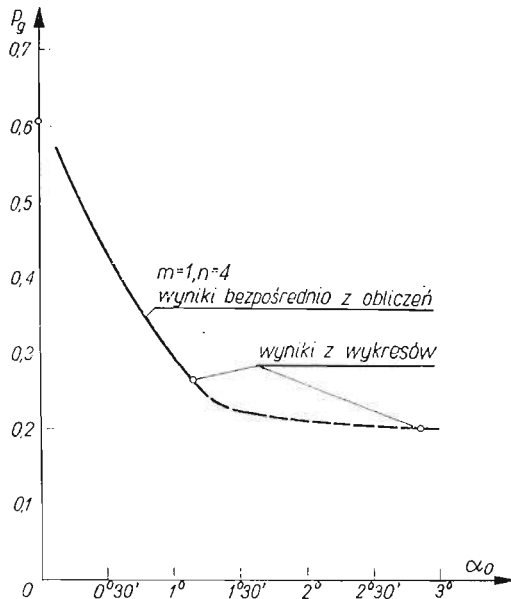
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
\hat{p}_a	40,57	10,15	4,523	2,571	1,679	1,208	0,938	0,778	0,683	0,631	0,608	0,606	0,621	0,649	0,688

skrócenie (lub też zmienia się jedno i drugie — w zależności od urządzenia obciążającego powłokę). Dalej stan powłoki zmienia się według krzywej girlandowej. Dolna siła krytyczna wynosi $\hat{p}_d = 0,125$.

W przypadku załomu o kącie $\alpha_0 = 2^\circ 52'$, już przy $\hat{p} = 0,0234$ następuje przejście w stan niesymetryczny. Następnie siła i skrócenie rosną przy $m = 1, n = 4$; widać wyraźne zmniejszenie sztywności powłoki. Górna siła krytyczna ma w tym przypadku wartość 0,200. Dalej następuje przeskok lub powłoka deformuje się według przedstawionej krzywej — w zależności od sposobu obciążenia. Dolna siła krytyczna wynosi $\hat{p} = 0,122$. Interesujące zjawisko zachodzi przy odciążaniu powłoki. Ostatnia faza odciążania przebiega inaczej niż pierwsza część obciążania. Po usunięciu obciążenia powłoka pozostanie pofalowana, odkształcenie pozostanie także przy niezbyt silnym rozciąganiu.

Na obu wykresach ściskania powłoki widoczna jest tendencja wzrostu stosunku m/n przy zbliżaniu końców powłoki. Oznacza to zmianę proporcji zakłębnień — względne zwiększenie ich wymiaru obwodowego i jest zgodne z wynikami doświadczeń przeprowadzonych na powłokach «doskonałych» [1].

Zależność górnej siły krytycznej od wielkości kąta załomu przedstawia rys. 10. Przy małych kątach górną siłę krytyczną określa punkt przecięcia linii stanów symetrycznych oraz niesymetrycznych. W tym zakresie zależność jest przedstawiona linią ciągłą. Gdy



Rys. 10. Zależność górnej siły krytycznej od kąta załomu

kąt załomu $\alpha_0 \rightarrow 0$ rozwiązania zagadnienia wyznaczenia sił krytycznych przechodzi w znane rozwiązanie dla powłoki doskonałej ($\hat{p} = 0,605$). Jeżeli kąt załomu jest większy, przejście powłoki w stan niesymetryczny nie wyznacza górnej siły krytycznej (w przeciwieństwie do powłoki walcowej doskonałej). Za punktem bifurkacji siła rośnie dalej i osiąga największą wartość przy większych odkształceniach. W tym przypadku górną

siłę krytyczną określa najwyżej położony punkt wykresu ściskania powłoki; odpowiedni odcinek zależności $\hat{p}_g(\alpha_0)$ zaznaczono na rys. 10 linią przerywaną.

Należy podkreślić, że w przedstawionym rozwiązaniu badano tylko stany równowagi. Zmiana liczby pofalowań na powłoce nie zachodzi statycznie, przejściu na kolejny odcinek krzywej girlandowej towarzyszy mały przeskok. Z tego względu wykres ściskania uzyskany doświadczalnie będzie różnił się od krzywej przedstawionej na rys. 8 i 9.

4. Wnioski

Z przedstawionego rozwiązania wynika, że istnienie obwodowego złomu na ściskanej powłoce walcowej ma niekorzystny wpływ na jej stateczność. Szczególnie silny jest wpływ na górną siłę krytyczną. Załom o kącie 1° powoduje zmniejszenie górnej siły krytycznej o 50%. Natomiast dolna siła krytyczna mało zależy od kąta załomu. Przy ściskaniu powłoki z załomem o bardzo małym kącie następuje przeskok, podobnie jak w przypadku powłoki doskonałej. Im kąt załomu większy, tym przeskok będzie mniejszy, przy kącie o wielkości rzędu paru stopni powłoka może odkształcić się bez przeskoku związanego z dużym spadkiem siły i znacznym skróceniem.

Literatura cytowana w tekście

1. А.С. Волмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.
2. St. ŁUKASIEWICZ, W. SZYSKOWSKI: On the stability and the postbuckling equilibrium of shells of revolution, *ZAMM*, **51** (1971) 635 - 639.

Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИЗЛОМОМ ПО ОКРУЖНОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В работе обсуждается влияние поперечного излома поверхности цилиндрической оболочки на ее устойчивость при осевом сжатии. Такой излом может получиться в результате сварки цилиндрических труб. Задача решена в нелинейной постановке методом Ритца. Исследовано влияние величины угла излома на верхнюю и нижнюю критическую силу.

S u m m a r y

STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL WITH A CIRCUMFERENTIAL NOTCH UNDER AXIAL COMPRESSION

The paper concerns the effect of a circumferential notch at the surface of the axially compressed cylindrical shell on its stability. Such a notch may be a result of welding of two cylindrical pipes. The problem is solved by means of the Ritz method. The effect of the value of the notch angle on the critical force and postbuckling behaviour is examined.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1977 r.