

O PRZYBLIŻONYCH METODACH ROZWIĄZANIA
NIELINIOWYCH RÓWNAŃ RUCHU ELASTYCZNIE
POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH

JANUSZ KOLEND A (GDAŃSK)

1. Wstęp

Opis ruchu elastycznie posadowionych silników tłokowych z uwzględnieniem zmienności prędkości kątowej silnika wymaga zastosowania nieliniowych równań różniczkowych. Dodatkowym źródłem nieliniowości równań ruchu mogą być charakterystyki sztywności i tłumienia podkładek elastycznych. Liniowe składniki równań ruchu mają z reguły większe wartości niż nieliniowe człony, co ułatwia uzyskanie przybliżonych rozwiązań. W praktyce najczęściej wykorzystuje się w tym celu liniowe równania ruchu traktując prędkość kątową silnika jako stałą wielkość, przy czym w przypadku nieliniowych charakterystyk sztywności i tłumienia podkładek zastępuje się je liniowymi charakterystykami [1, 2, 3]. W pracach [4, 5, 6] uwzględniono zmienność prędkości kątowej silnika przy zastosowaniu metod asymptotycznych. W niniejszej pracy porównano wyniki obliczeń uzyskanych przy pomocy wymienionych przybliżonych metod z rezultatami obliczeń na EMC metodą Rungego-Kutty. Ze względu na dużą czasochłonność obliczeń numerycznych ograniczono się przy tym do rozpatrzenia pionowych drgań jednocylindrowego silnika. Wyniki obliczeń mogą służyć do oceny dokładności i przydatności rozpatrywanych przybliżonych metod do analizy drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych.

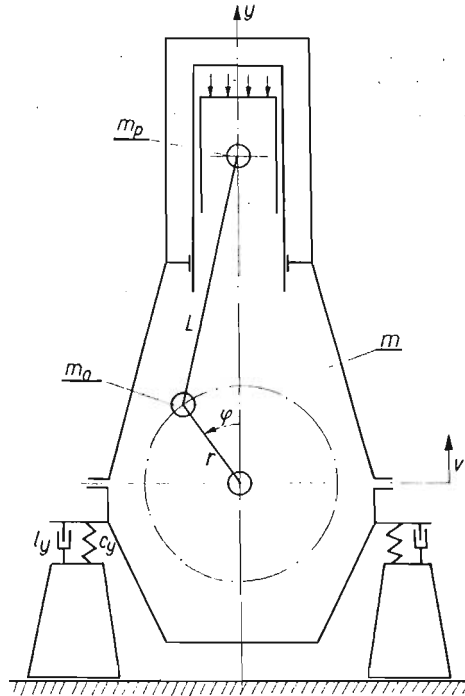
2. Model obliczeniowy

Schemat rozpatrywanego układu drgającego przedstawiono na rys. 1. Równania ruchu tego układu mają postać [4]:

$$(2.1) \quad \ddot{v} + b^2 v = \frac{\varepsilon}{m} [-l_y \dot{v} + m_p r \dot{\varphi}^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) + m_0 r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] + \frac{\varepsilon^2}{m} \left[m_p r \ddot{\varphi} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 r \ddot{\varphi} \sin \varphi \right];$$

$$(2.2) \quad \ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I} \left[rT + \sum_k C_k \sin(\xi k \varphi + v_k) - B - \sum_l B_l \sin(\eta l \varphi + \sigma_l) - h \dot{\varphi} + m_p r \ddot{v} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 r \ddot{v} \sin \varphi + \frac{1}{2} m_p r \dot{\varphi}^2 (\lambda \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi - 3 \lambda \sin 3\varphi - \lambda^2 \sin 4\varphi) + m_p g r \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + m_0 g r \sin \varphi \right] + \frac{\varepsilon^2}{2I} m_p r^2 \ddot{\varphi} \left(-\lambda \cos \varphi + \cos 2\varphi + \lambda \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 4\varphi \right).$$

Do obliczeń przyjęto następujące wartości parametrów układu: $m = 4000$ [kg] — łączna masa układu drgającego; $m_p = 50$ i 100 [kg] — masa niewyrównoważona w ruchu postępowo-zwrotnym, skupiona na osi sworznia tłokowego; $m_0 = 0$ i 50 [kg] — wirująca masa niewyrównoważona, skupiona na osi czopa korbowego; $r = 0,15$ [m] — długość



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego układu drgającego

m — łączna masa układu m_0 — wirująca masa niewyrównoważona, skupiona na osi czopa korbowego; m_p — niewyrównoważona masa w ruchu postępowo-zwrotnym, skupiona na osi sworznia tłokowego; L — długość korbowodu; r — długość ramienia korby; c_y — współczynnik sztywności podkładek elastycznych; l_y — współczynnik wiskotycznego tłumienia podkładek elastycznych; v — pionowe przemieszczenie układu; φ — kąt obrotu korby

ramienia korby; $\lambda = r/L = 0,125$ — wartość ilorazu długości ramienia korby i długości

korbowodu; $b = \sqrt{\frac{c_y}{m}} = \frac{1}{2} 25\pi$ i $\frac{1}{1,6} 25\pi$ [rad/s] — częstość drgań własnych układu;

$\nu = \frac{l_y}{2mb} = 0,1$ i $0,5$ — bezwymiarowy współczynnik wiskotycznego tłumienia pod-

kładek elastycznych; $I = I' + m_p r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 \right) + m_0 r^2 = 8$ i 12 [kgm²], I' — mo-

ment bezwładności wirujących mas wyrównoważonych względem osi wału; $rT =$
 $= 1700 \left(1 - 0,75 \frac{\dot{\varphi} - 25\pi}{25\pi} \right)$ [Nm] — średnia wartość momentu napędowego silnika,

pochodzącego od sił gazowych; $B_j = \frac{1}{6} 10^4 \left(\frac{\dot{\varphi}}{25\pi} \right)^2$ [Nm] — średnia wartość momentu

oporowego odbiornika mocy; $C_1 = \frac{\pi}{4} 6,87 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_2 = \frac{\pi}{4} 9,65 \times$

$\times 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_3 = \frac{\pi}{4} 8,04 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm], $C_4 = \frac{\pi}{4} 3 \cdot 25^2 \cdot 0,15$ [Nm] — amplitudy harmoniczných składowých momentu napędowego silnika od sił gazowych; $\vartheta_1 = \frac{\pi}{180} 52$ [rad], $\vartheta_2 = \frac{\pi}{180} 26$ [rad], $\vartheta_3 = \frac{\pi}{180} 9$ [rad], $\vartheta_4 = \frac{\pi}{180} 357$ [rad] — fazy harmoniczných składowých momentu napędowego silnika od sił gazowych; $\xi = \frac{1}{2}$ — liczba cykli pracy silnika przypadająca na jeden obrót wału; $B_l = 0$ — amplitudy harmoniczných składowých momentu oporowego odbiornika mocy; $h = \frac{200}{6 \cdot 25\pi}$ [Nms/rad] — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obracaniu wału korbowego; $g = 9,81$ [m/s²] — przyspieszenie ziemskie.

3. Przybliżone rozwiązania

Do obliczeń wykorzystano:

- 1) rozwiązania liniowych równań ruchu,
- 2) rozwiązania uzyskane metodą Kryłowa-Bogolubowa-Mitropolskiego (KBM), w pierwszym przybliżeniu,
- 3) rozwiązania uzyskane metodą uśredniania w pierwszym przybliżeniu.

Ad 1. Przy założeniu, że prędkość kątowna silnika jest stała, równanie (2.1) posiada rozwiązanie

$$(3.1) \quad v = v_0 = \frac{(m_p + m_0)r\omega^2}{m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}} \cos(\omega t - \delta_1) + \frac{m_p r \lambda \omega^2}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}} \cos(2\omega t - \delta_2),$$

$$\sin \delta_1 = \frac{l_y \omega}{m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}}, \quad \sin \delta_2 = \frac{2l_y \omega}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m}\right)^2}}.$$

Prędkość kątowną $\omega = \omega_0$ wyznaczono z równania

$$(3.2) \quad rT(\omega_0) - B(\omega_0) - h\omega_0 = 0.$$

Wynosi ona $\omega_0 = 25\pi$ [rad/s].

Ad 2. Asymptotyczna metoda KBM daje w pierwszym przybliżeniu następujące rozwiązania równań (2.1) i (2.2) dla stanów ustalonych [4]:

$$(3.3) \quad v = v_1 = a \cos(\varphi + \psi) + \varepsilon u, \quad a = \frac{(m_p + m_0)r\omega^2}{m(\omega + b) \sqrt{(b - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2m} l_y\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_y}{2m(\omega - b)}, \quad u = \frac{m_p r \lambda \omega^2}{m(b^2 - 4\omega^2)},$$

przy czym ω spełnia równanie

$$(3.4) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega - \frac{1}{4\omega^2} a^2 b^2 l_y (\omega + b) = 0.$$

Ad 3. Stosując metodę uśredniania wprowadza się zamianę zmiennych¹⁾ zgodnie z wzorami:

$$(3.5) \quad v = A \cos(\varphi + \phi), \quad \dot{v} = -Ab \sin(\varphi + \phi), \quad \dot{\phi} = \Omega$$

i przekształca równania (2.1), (2.2) do postaci

$$(3.6) \quad \dot{A} = \varepsilon X_R, \quad \dot{\phi} = \varepsilon Y_R, \quad \dot{\Omega} = \varepsilon Z_R.$$

Funkcje X_R, Y_R, Z_R określono w pracy [5]. Rozwiązań równań (3.6) poszukuje się w postaci

$$(3.7) \quad \begin{aligned} A &= a + \varepsilon U(a, \psi, \omega, \varphi), \\ \phi &= \psi + \varepsilon V(a, \psi, \omega, \varphi), \\ \Omega &= \omega + \varepsilon W(a, \psi, \omega, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie a, ψ, ω oznaczają wolnozmiennne składowe, zaś U, V, W wibracyjne składniki. Po podstawieniu (3.7) do równań (3.6) i uśrednieniu otrzymuje się dla stanów ustalonych rozwiązania w pierwszym «nieulepszonym» przybliżeniu [5]

$$(3.8) \quad a = \frac{(m_p + m_0)r\omega^2}{2mb \sqrt{(b - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2m} l_y\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{l_y}{2m(\omega - b)},$$

przy czym prędkość kątowna ω określona jest zależnościami

$$(3.9) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega + \frac{1}{2}(m_p + m_0)abr\omega \sin \psi = 0, \quad \sin \psi = -\frac{abl_y}{(m_p + m_0)r\omega^2}.$$

W pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu drgania masy m wyrażają się zależnością

$$(3.10) \quad v = (a + \varepsilon U) \cos(\varphi + \psi + \varepsilon V) \cong (a + \varepsilon U) \cos(\varphi + \psi) - \varepsilon a V \sin(\varphi + \psi).$$

Funkcje U i V wynoszą

$$(3.11) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{4bm\omega} \left\{ abl_y \sin 2(\varphi + \psi) + (m_p + m_0)r\omega^2 \cos(2\varphi + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - 2m_p r \lambda \omega^2 \left[\cos(\varphi - \psi) - \frac{1}{3} \cos(3\varphi + \psi) \right] \right\}, \\ V &= \frac{1}{4abm\omega} \left\{ abl_y \cos 2(\varphi + \psi) - (m_p + m_0)r\omega^2 \sin(2\varphi + \psi) - \right. \\ &\quad \left. - 2m_p r \lambda \omega^2 \left[\sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{3} \sin(3\varphi + \psi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

W wyniku podstawienia (3.11) do (3.10) otrzymuje się

$$(3.12) \quad v = a \frac{\omega + b}{2\omega} \cos(\varphi + \psi) - \frac{m_p r \lambda \omega^2}{3bm} \cos 2\varphi = a_1 \cos(\varphi + \psi) - b_1 \cos 2\varphi.$$

W zależnościami (3.9) zamiast amplitudy a wystąpi zatem w pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu amplituda $a_1 = a \frac{\omega + b}{2\omega}$.

¹⁾ Analogiczną zamianę zmiennych stosowano w pracach [5, 6].

4. Rozwiązanie numeryczne

Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę Rungego-Kutty, często używaną do wyznaczania rozwiązań układów równań różniczkowych zwyczajnych [7]. Dokładność tej metody zależy od rzędu zastosowanych formuł i kroku całkowania. Przyjęto formuły IV rzędu, wygodne do programowania ze względu na ich prostotę i zapewniające wystarczającą dokładność obliczeń (błąd w jednym kroku jest rzędu ϱ^5 , gdzie ϱ oznacza krok całkowania). Przyjęto krok całkowania $\varrho = 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s], odpowiadający obrotowi wału silnika o kąt $\varphi = 3^\circ$ przy prędkości kątowej $\omega_0 = 25\pi$ [rad/s], (tj. przy 750 obr/min) i zapewniający wystarczająco gęsty podział przedziałów zmienności funkcji trygonometrycznych, występujących w równaniach (2.1) i (2.2). Równania te zastąpiono układem równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= z, & \dot{\varphi} &= x, \\ \dot{x} &= \frac{mD - AB}{mC - A^2}, & \dot{z} &= \frac{AD - BC}{mC - A^2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = r \left[(m_p + m_0) \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda m_p \sin 2\varphi \right],$$

$$B = x^2 r [(m_p + m_0) \cos \varphi + m_p \lambda \cos 2\varphi] - l_y z - c_y v,$$

$$C = I - m_p r^2 \left(-\frac{1}{2} \lambda \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \lambda \cos 3\varphi + \frac{1}{8} \lambda^2 \cos 4\varphi \right),$$

$$D = rT(x) + \sum_k C_k \sin(\xi k \varphi + \vartheta_k) - B(x) - hx + m_p gr \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) + \\ + m_0 gr \sin \varphi + \frac{1}{4} m_p r^2 x^2 (\lambda \sin \varphi - 2 \sin 2\varphi - 3 \lambda \sin 3\varphi - \lambda^2 \sin 4\varphi).$$

Wartości początkowe dla $t = \varphi = 0$ wyznaczano z zależności (3.1) dla $x(0) = \omega_0 = 25\pi$ [rad/s]. Stwierdzono, że przy takich wartościach początkowych następowało stosunkowo szybkie ustalanie się obliczeniowych parametrów ruchu silnika, co umożliwiło przerwanie obliczeń po 720 krokach całkowania.

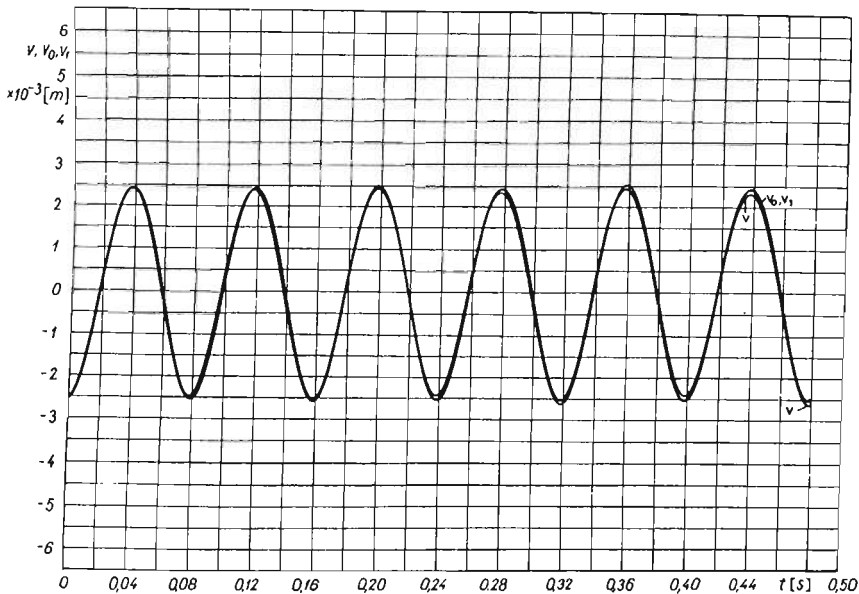
5. Wyniki obliczeń

W obliczeniach ograniczono się do analizy drgań układu w stosowanym w praktyce zakresie wartości ilorazu podstawowej częstości wymuszeń do częstości drgań własnych amortyzowanego obiektu $\mu = \omega/b > \sqrt{2}$. Pomimo że tłumienie w podkładkach elastycznych jest na ogół małe, zbadano także zachowanie się analizowanego układu i przydatność wymienionych w rozdziale 3 przybliżonych metod w przypadku silniejszego tłumienia, przyjmując wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia podkładek $\nu = l_y/2 mb = 0,5$. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1, a wybrane przebiegi drgań silnika w funkcji czasu oraz wyznaczonej metodą Rungego-Kutty prędkości kątowej silnika w funkcji czasu przedstawiono na rys. 2 - 5.

Tablica 1. Wyniki obliczeń parametrów ruchu silnika

Lp.	Parametry układu drgającego				Metoda I				Metoda II I przybliżenie				Metoda III I «ulepszone» przybliżenie				Metoda Rungego-Kutty	
	m_0	m_p	I	$\frac{\omega_0}{b}$	ν	v_m	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	v_m	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	a_1	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$	v_m	$\frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$
	[kg]	[kg]	[kgm ²]			[mm]	[mm]	[mm]		[mm]	[mm]	[mm]		[mm]	[mm]		[mm]	
1	0	50	8	2	0,1	2,5389	2,4780	0,0624	1	2,5489	2,4862	0,0625	0,9997	3,7312	0,1561	0,9993	2,6322	0,9989
2	0	50	12	2	0,1	2,5389	2,4780	0,0624	1	2,5489	2,4862	0,0625	0,9997	3,7312	0,1561	0,9993	2,5901	1,0000
3	0	100	8	2	0,5	4,2376	4,1602	0,1208	1	4,5561	4,4617	0,1251	0,9949	6,6667	0,3088	0,9883	4,1615	0,9736
4	0	100	12	2	0,5	4,2376	4,1602	0,1208	1	4,5561	4,4617	0,1251	0,9949	6,6667	0,3088	0,9883	4,1807	0,9783
5	50	100	8	2	0,5	6,3166	6,2404	0,1208	1	6,8039	6,7286	0,1252	0,9885	9,9228	0,3042	0,9735	6,3091	0,9564
6	50	100	12	2	0,5	6,3166	6,2404	0,1208	1	6,8039	6,7286	0,1252	0,9885	9,9228	0,3042	0,9735	6,2722	0,9630
7	50	100	8	1,6	0,5	6,4847	6,4406	0,1227	1	7,1432	7,0875	0,1307	0,9718	8,9713	0,2381	0,9524	6,4432	0,9456
8	50	100	12	1,6	0,5	6,4847	6,4406	0,1227	1	7,1432	7,0875	0,1307	0,9718	8,9713	0,2381	0,9524	6,4395	0,9536

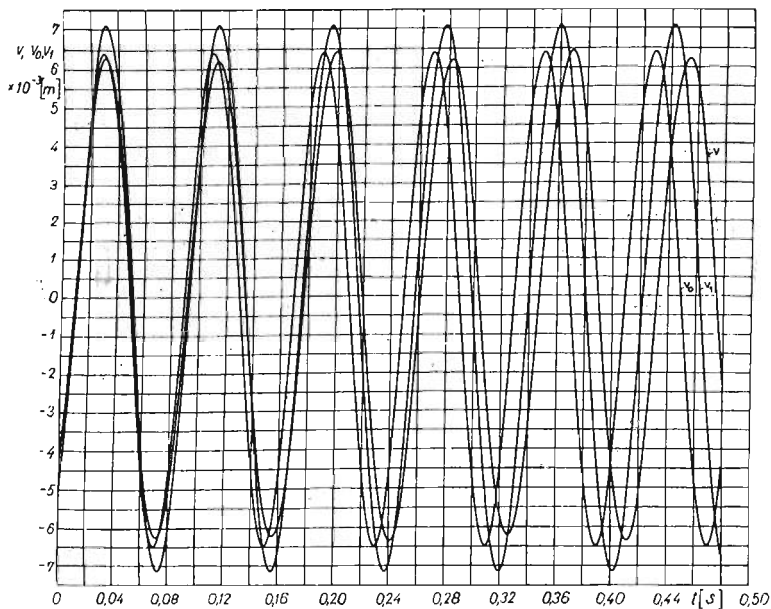
v_m — maksymalne przemieszczenie silnika; a , a_1 — amplituda pierwszej harmonicznej drgań silnika, b_1 — amplituda drugiej harmonicznej drgań silnika, ω — średnia prędkość kątowna silnika, $\omega_0 = 25 \pi$ [rad/s], φ_s [rad] — kąt obrotu wału silnika w czasie do $t = 0$ do $t = 720 \cdot 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s].



Rys. 2. Wykres przebiegu pionowych drgań układu w funkcji czasu dla $m_0 = 0$, $m_p = 50$ [kg], $b =$

$$= \frac{1}{2} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0, I = 8 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

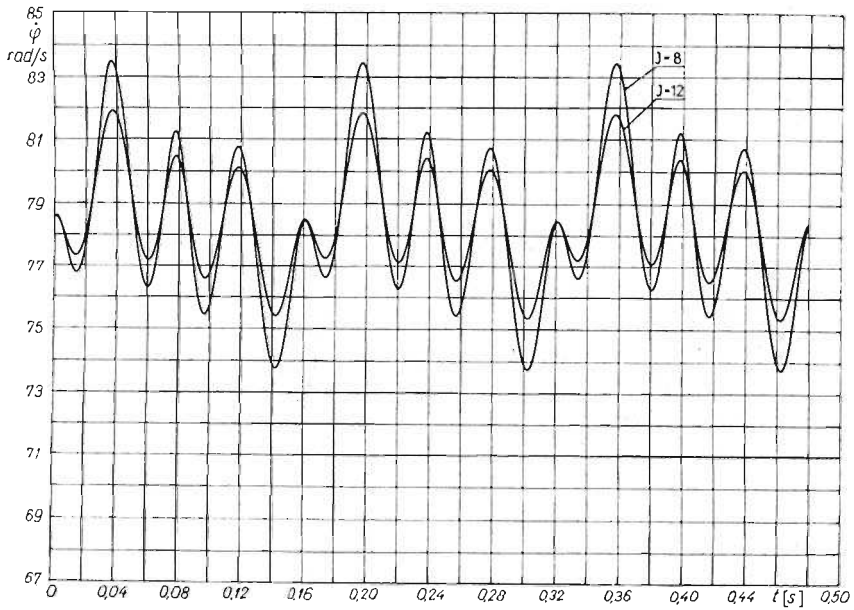
v — według Rungego-Kutty dla $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0(0)$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$; v_0 — ustalone drgania według rozwiązania liniowego równania ruchu; v_1 — ustalone drgania według metody KBM



Rys. 3. Wykres przebiegu pionowych drgań układu w funkcji czasu dla $m_0 = 50$ [kg], $m_p = 100$ [kg],

$$b = \frac{1}{1,6} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,5, I = 8 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

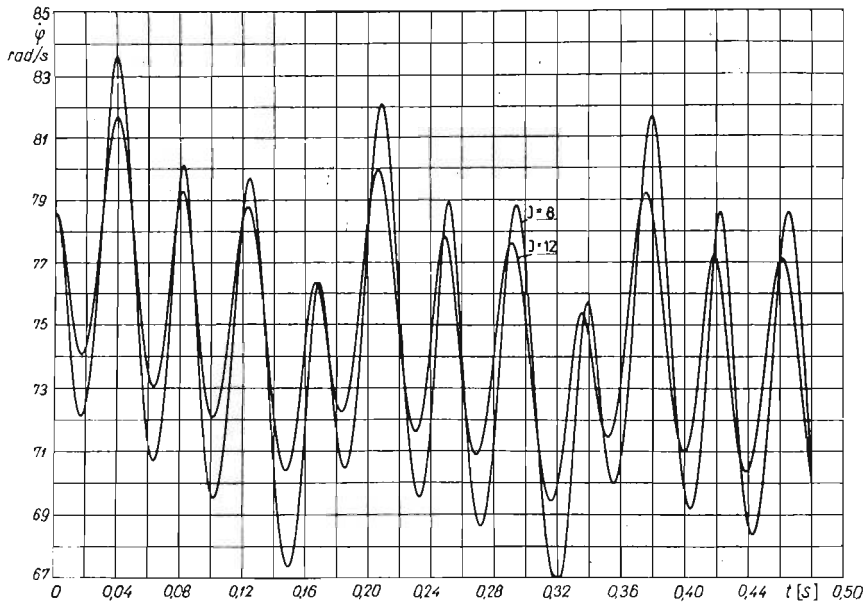
v — według Rungego-Kutty dla $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0(0)$, $\dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$; v_0 — ustalone drgania według rozwiązania liniowego równania ruchu; v_1 — ustalone drgania według metody KBM



Rys. 4. Wykres przebiegu prędkości kątowej silnika w funkcji czasu dla $m_0 = 0$, $m_p = 50$ [kg], $b =$

$$= \frac{1}{2} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,1, I = 8 \text{ i } 12 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\dot{\phi}(0) = \omega_0, \quad v(0) = v_0(0), \quad \dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$$



Rys. 5. Wykres przebiegu prędkości kątowej silnika w funkcji czasu dla $m_0 = 50$ [kg], $m_p = 100$ [kg],

$$b = \frac{1}{1,6} 25\pi \text{ [rad/s]}, \nu = 0,5, I = 8 \text{ i } 12 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$\dot{\phi}(0) = \omega_0, \quad v(0) = v_0(0), \quad \dot{v}(0) = \dot{v}_0(0)$$

6. Uwagi końcowe

W przypadku liniowych charakterystyk sztywności i tłumienia założenie o stałości prędkości kątowej pozwala wyznaczyć z wystarczającą w praktyce dokładnością parametry drgań silnika w oparciu o liniowe równania różniczkowe ruchu. Rozwiązania takie nie uwzględniają jednakże wpływu tłumiących własności podkładek na stratę mocy i spadek prędkości kątowej silnika, co może okazać się istotne, zwłaszcza przy większych wartościach współczynników tłumienia podkładek. Z równania (2.2) wynika, że dodatkowy moment oporowy na wale, wywołany drganiami silnika, wynosi

$$(6.1) \quad \Delta M = -m_p r \ddot{v} \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right) - m_0 r \ddot{v} \sin \varphi.$$

Po podstawieniu do (6.1) rozwiązań (3.1), otrzymuje się stały składnik dodatkowego momentu oporowego

$$(6.2) \quad (\Delta M)_0 = \frac{(m_p + m_0)^2 r^2 \omega^4}{2m \sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + \left(l_y \frac{\omega}{m} \right)^2}} + \frac{(m_p r \lambda \omega^2)^2}{m \sqrt{(b^2 - 4\omega^2)^2 + \left(2l_y \frac{\omega}{m} \right)^2}}.$$

W celu uwzględnienia spadku prędkości kątowej silnika na skutek tłumienia w podkładkach należy zatem równanie (3.2) zastąpić równaniem

$$(6.3) \quad rT(\omega) - B(\omega) - h\omega - (\Delta M)_0 = 0.$$

Wyznaczone na podstawie (3.1) i (6.3) parametry ruchu analizowanego układu podano w tablicy 2.

Tablica 2. Wyniki obliczeń parametrów ruchu silnika z zależności (3.1) i równania (6.3)

Lp.	Parametry układu drgającego				Metoda I z uwzględnieniem dodatkowego momentu oporowego		
	m_0	m	$\frac{\omega_0}{b}$	ν	a	b_1	$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\varphi_s}{6 \cdot 2\pi}$
	[kg]	[kg]			[mm]	[mm]	
1	0	50	2	0,1	2,4806	0,0624	0,9984
2	0	100	2	0,5	4,1752	0,1209	0,9771
3	50	100	2	0,5	6,2921	0,1212	0,9481
4	50	100	1,6	0,5	6,4862	0,1236	0,9322

a, b_1 — amplitudy pierwszej i drugiej harmonicznej drgań silnika, ω — średnia prędkość kątowa silnika, $\omega_0 = 25 \pi$ [rad/s], φ_s [rad] — kąt obrotu wału silnika w czasie od $t = 0$ do $t = 720 \cdot 6,67704 \cdot 10^{-4}$ [s].

Zależność (6.2) przedstawić można w postaci

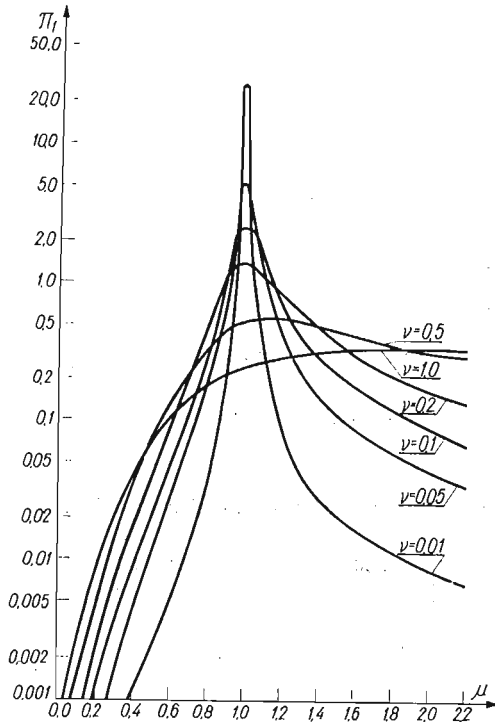
$$(6.4) \quad (\Delta M)_0 = \frac{1}{m} (m_p + m_0)^2 r^2 \omega^2 \pi_1 + \frac{1}{m} m_p^2 r^2 \omega^2 \pi_2,$$

gdzie oznaczono

$$\pi_1 = \frac{\mu^3 \nu}{(1 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \nu^2}, \quad \pi_2 = \frac{4\lambda^2 \mu^2 \nu}{(1 - 4\mu^2)^2 + 16\mu^2 \nu^2}.$$

Bezwymiarowy współczynnik π_2 ma w praktyce znacznie mniejszą wartość niż współczynnik π_1 . Zależność wartości współczynnika π_1 od wartości ilorazu częstości $\mu = \omega/b$ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia $\nu = l_y/2mb$ przedstawiono na rys. 6. Maksymalne wartości π_1 występują przy

$$\mu = \sqrt{2\nu^2 - 1 + \sqrt{(2\nu^2 - 1)^2 + 3}}.$$



Rys. 6. Zależność wartości współczynnika π_1 od wartości ilorazu częstości $\mu = \omega/b$ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia $\nu = l_y/2mb$

W ogólnym przypadku drgań silników rzędowych z cylindrami w układzie V równanie (6.3) przyjmuje postać

$$(6.5) \quad crT(\omega) - B(\omega) - h\omega - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Delta M dt = 0,$$

gdzie c jest liczbą wykorbień wału korbowego, przy czym zgodnie z [4] i przyjętymi w tej pracy oznaczeniami zachodzą zależności:

$$\Delta M = -m_{p1} P_1 - m_{p2} P_2 - m_0 P_3,$$

$$P_{1/2} = -\frac{1}{2} \left[4cr^2 \alpha \dot{\alpha} \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 \right) + \sum_{n=0}^{c-1} \left\{ 2r^2 f_2 f_3 \omega^2 (\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \beta^2 \sin^2 \delta) + 2r^2 f_3^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \dot{\beta} \gamma \sin 2\delta \pm \dot{\gamma} \beta \sin 2\delta + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta) + 2rf_3 \ddot{u} (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - 2rb_1 f_3 \ddot{y} (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) + 2rc_1 f_3 \dot{\beta} (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) \mp 2rf_3 \ddot{v} (\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) - 2r^2 f_1 f_3 (\ddot{y} \cos \delta \pm \dot{\beta} \sin \delta) (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - r^2 \omega^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{2} \lambda \sin(\theta \mp \delta) - \sin 2(\theta \mp \delta) - \frac{3}{2} \lambda \sin 3(\theta \mp \delta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin 4(\theta \mp \delta) \right] + 4r^2 \omega \alpha \dot{\alpha} \left[\frac{1}{2} \lambda \cos(\theta \mp \delta) - \frac{1}{2} \cos 2(\theta \mp \delta) - \frac{1}{2} \lambda \cos 3(\theta \mp \delta) - \frac{1}{8} \lambda^2 \cos 4(\theta \mp \delta) \right] \mp 2r(a_n \pm e) f_3 \ddot{y} (\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) \pm 2rc_1 f_3 \ddot{\alpha} (\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) - 2r^2 f_1 f_3 \alpha \ddot{\alpha} + 2r(a_n \pm e) f_3 \dot{\beta} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) - 2rf_3 \dot{w} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) - 2rb_1 f_3 \ddot{\alpha} (\alpha \cos \delta \mp \sin \delta) \right\} \right],$$

$$P_3 = -\frac{1}{2} \left\{ 2cr^2 \gamma \dot{\gamma} \omega + 2cr^2 \beta \dot{\beta} \omega - 2cr^2 \ddot{\alpha} + cr^2 (\beta \ddot{y} - \gamma \dot{\beta}) + \sum_{n=0}^{c-1} \left[-2r^2 \gamma \dot{\gamma} \omega \cos 2\theta + r^2 \gamma^2 \omega^2 \sin 2\theta + 2r^2 \beta \dot{\beta} \omega \cos 2\theta - r^2 \beta^2 \omega^2 \sin 2\theta + 2r\gamma \ddot{u} \sin \theta - 2r\beta \ddot{u} \cos \theta - 2rb_0 \gamma \ddot{y} \sin \theta + 2rb_0 \beta \dot{\gamma} \cos \theta + 2rc_0 \gamma \dot{\beta} \sin \theta - 2rc_0 \beta \dot{\beta} \cos \theta - r^2 \gamma \ddot{y} \sin 2\theta + r^2 \beta \dot{\gamma} \cos 2\theta + r^2 \gamma \dot{\beta} \cos 2\theta - 2r^2 \gamma \dot{\beta} \omega \sin 2\theta - 2r^2 \beta \dot{\gamma} \omega \sin 2\theta - 2r^2 \beta \gamma \omega^2 \cos 2\theta + r^2 \beta \dot{\beta} \sin 2\theta - 2r\ddot{v} \sin(\theta - \alpha) + 2rc_0 \ddot{\alpha} \sin(\theta - \alpha) - 2a_n r \dot{\gamma} \sin(\theta - \alpha) - 2r\dot{w} \cos(\theta - \alpha) + 2ra_n \dot{\beta} \cos(\theta - \alpha) - 2b_0 r \ddot{\alpha} \cos(\theta - \alpha) \right] \right\},$$

$$f_1 = \cos(\theta \mp \delta) + \frac{1}{4} \lambda \cos 2(\theta \mp \delta),$$

$$f_2 = \cos(\theta \mp \delta) + \lambda \cos 2(\theta \mp \delta),$$

$$f_3 = \sin(\theta \mp \delta) + \frac{1}{2} \lambda \sin 2(\theta \mp \delta),$$

$$\theta = \omega t + nd_n \pi.$$

Wielkości u , v , w , α , β i γ są rozwiązaniami liniowych równań różniczkowych ruchu, które można uzyskać m.in. z podanych w pracy [4] równań (4.1) przez podstawienie $\dot{\varphi} = \omega$, $\varphi = \omega t$.

Wyrażenia opisujące funkcje $P_{1/2}$ i P_3 upraszczają się dla silników wielocylindrowych. Przykładowo, dla silników o układach wykorbień podanych w tabl. 3 otrzymuje się:

dla silnika 4/1

$$P_{1/2} = SK_1 (\sin \omega t - \cos \omega t + 2\lambda \sin 2\omega t) + K_2,$$

$$P_3 = rS[(\ddot{y} - \alpha \ddot{\beta}) (\sin \omega t - \cos \omega t) - (\dot{\beta} + \alpha \dot{\gamma}) (\cos \omega t + \sin \omega t)],$$

dla silnika 4/2

$$P_{1/2} = SK_1(3\sin\omega t + \cos\omega t) + K_2,$$

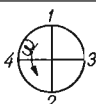
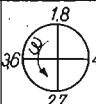
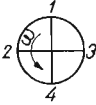
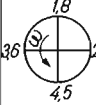


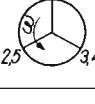

$$P_3 = rS[(\ddot{\gamma} - \alpha\ddot{\beta})(3\sin\omega t + \cos\omega t) - (\ddot{\beta} + \alpha\ddot{\gamma})(3\cos\omega t - \sin\omega t)],$$

dla silnika 5/1

$$P_{1/2} = SK_1 \left[0,264\sin\omega t + 0,364\cos\omega t + \frac{1}{2} \lambda(4,736\sin 2\omega t + 1,528\cos 2\omega t) \right],$$

$$P_3 = rS[(\ddot{\gamma} - \alpha\ddot{\beta})(0,264\sin\omega t + 0,364\cos\omega t) - (\ddot{\beta} + \alpha\ddot{\gamma})(0,264\cos\omega t - 0,364\sin\omega t)];$$

Tablica 3

Liczba wykorzystanień	Oznaczenie silnika	Układ wykorzystanień	Liczba wykorzystanień	Oznaczenie silnika	Układ wykorzystanień
4	4/1		8	8/1	
4	4/2		8	8/2	
5	5/1		8	8/3	
6	6/1		8	8/4	

dla silnika 6/1

$$P_{1/2} = \frac{9}{4} r^2 \lambda [(\ddot{\gamma} \cos \delta \pm \ddot{\beta} \sin \delta)(\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - 2\omega^2(\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \beta^2 \sin^2 \delta + \alpha^2 + \alpha \ddot{\alpha}) \sin 3\omega t - 3r^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \dot{\beta} \gamma \sin 2\delta \pm \dot{\gamma} \beta \sin 2\delta + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta + 2\alpha \dot{\alpha}) \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 - \lambda \cos 3\omega t \right),$$

$$P_3 = 0,$$

dla silnika 8/1

$$P_{1/2} = 2K_2, \quad P_3 = 0;$$

dla silnika 8/2

$$P_{1/2} = 2K_2, \quad P_3 = 0;$$

dla silnika 8/3

$$P_{1/2} = SK_1 [(3 - 2\sqrt{2}) \sin\omega t + (1 - \sqrt{2}) \cos\omega t], \quad P_3 = 0,$$

dla silnika 8/4

$$P_{1/2} = SK_1 [(3-2\sqrt{2}) \sin \omega t - (1-\sqrt{2}) \cos \omega t], \quad P_3 = 0.$$

W powyższych zależnościach oznaczono:

$$K_1 = r [\ddot{\gamma}(\alpha \sin \delta \pm \cos \delta) - \ddot{\beta}(\alpha \cos \delta \mp \sin \delta)],$$

$$K_2 = \frac{1}{4} r^2 \lambda^2 [(\ddot{\gamma} \cos \delta \pm \ddot{\beta} \sin \delta) (\gamma \cos \delta \pm \beta \sin \delta) - 4\omega^2 (\gamma^2 \cos^2 \delta \pm \beta \gamma \sin 2\delta + \\ + \beta^2 \sin^2 \delta + \alpha^2) + \alpha \ddot{\alpha}] \sin 4\omega t - \frac{1}{2} r^2 \omega (2\gamma \dot{\gamma} \cos^2 \delta \pm \beta \dot{\gamma} \sin 2\delta \pm \gamma \dot{\beta} \sin 2\delta + \\ + 2\beta \dot{\beta} \sin^2 \delta + 2\alpha \dot{\alpha}) (4 + \lambda^2 - \lambda^2 \cos 4\omega t),$$

S oznacza odległość osi sąsiednich cylindrów, leżących w jednej płaszczyźnie. Różnica pomiędzy funkcjami $P_{1/2}$ dla silników 8/3 i 8/4 wynika z przeciwnego kierunku obrotów w tych silnikach.

Porównując wyniki obliczeń parametrów ruchu analizowanego silnika metodami KBM i uśredniania z wynikami uzyskanymi metodą Rungego-Kutty stwierdzono, że rezultaty obliczeń metodami KBM i Rungego-Kutty różnią się stosunkowo mało (por. rys. 2 i 3), natomiast wartości amplitud pionowych drgań silnika w obszarze ponadrezonansowym, obliczone metodą uśredniania w pierwszym «nieulepszonym» przybliżeniu, są większe od analogicznych wartości uzyskanych pozostałymi metodami (por. tabl. 1). Mniejsze różnice w porównaniu do rezultatów otrzymanych metodami KBM i Rungego-Kutty wykazują wyniki obliczeń metodą uśredniania w pierwszym «ulepszonym» przybliżeniu. Stwierdzono także, że w miarę zbliżania się do rezonansu różnice pomiędzy wynikami obliczeń poszczególnymi metodami maleją.

Przeprowadzone obliczenia dają możliwość względnego porównania i oceny przydatności rozpatrywanych metod do analizy drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych. Należy przy tym zaznaczyć, że metody KBM i uśredniania umożliwiają uwzględnienie nieliniowości charakterystyk sztywności i tłumienia podkładek. Mogą one być także stosowane, podobnie jak metoda Rungego-Kutty, do analizy procesów przejściowych [4].

Literatura cytowana w tekście

1. В. КЭР, Вильсон, *Вибрационная техника*, Гос. Научно-Техн. Изд. Машиностр. Лит., Москва 1963.
2. О. К. Найдено, П. П. Петров, *Амортизация судовых двигателей и механизмов*, Судпромгиз, Ленинград 1962.
3. Z. PIETRAS, *Drgania wymuszone okrętowych silników spalinowych tłokowych ustawionych na elastycznych podkładkach*, Budownictwo Okrętowe, 3 (1973).
4. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 13 (1975).
5. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 14 (1976).
6. J. KOLENDA, *Nieliniowe drgania elastycznie zawieszonych silników tłokowych przy kinematycznych wymuszeniach stochastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 15 (1977).
7. J. LEGRAS, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WN-T, Warszawa 1974.

Р е з ю м е

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ АМОРТИЗИРОВАННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

В работе приводятся результаты расчетов вертикальных колебаний и угловой скорости одноцилиндрового двигателя, установленного на амортизаторах. Применяются решения линейных уравнений движения, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского и метод усреднения, а также метод Рунге-Кутты. Полученные результаты могут служить для оценки точности и пригодности рассматриваемых приближенных методов.

S u m m a r y

ON APPROXIMATE SOLUTION METHODS OF THE NON-LINEAR MOTION
EQUATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED PISTON ENGINES

In this paper vertical vibrations and rotation speed of an one-cylinder, elastically mounted piston engine are considered. The solutions of linear motion equations, the Krylov-Bogolubov-Mitropolskij and the averaging methods as well as the Runge-Kutta method are applied. The results of calculations can be used for the estimation of the accuracy and applicability of the approximate methods presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 stycznia 1977 r.