MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 15 (1977)

PŁASKIE ZAGADNIENIE KONTAKTOWE DLA OŚRODKA COSSERATÓW W TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

JACEK KRAJEWSKI, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wykaz oznaczeń

(x_1, x_2, x_3) układ współrzędnych prostokątnych,

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{R}^3;\ x_1 = 0, x_2 \in \langle -a, a\rangle, x_3 \in \mathscr{R}\}$ obszar kontaktu,

$D = \{(x_1, x_2) \in \mathscr{R}^2;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \in \mathscr{R}\}$,

$\lambda, \mu, \alpha, \gamma, \varepsilon$ stale materiałowe,

α_t współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej

$\nu = (3\lambda+2\mu)\alpha_t$, $e = \operatorname{div}\mathbf{u}$, $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$,

$\mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0)$ wektor przemieszczenia w płaskim stanie odkształcenia,

$\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3)$ wektor obrotu w płaskim stanie odkształcenia,

$\theta \equiv \theta(x_1, x_2)$ temperatura,

$[\sigma_{ij}]$ tensor naprężeń siłowych,

$[\mu_{ij}]$ tensor naprężeń momentowych,

$$\bar{f}_c(x_1, \xi) = \mathscr{F}_c\{f(x_1, x_2);\ x_2 \to \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2)\cos(\xi x_2)dx_2,$$

$$\bar{f}_s(x_1, \xi) = \mathscr{F}_s\{f(x_1, x_2);\ x_2 \to \xi\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x_1, x_2)\sin(\xi x_2)dx_2,$$

$H(x)$ funkcja Heaviside'a,

$$\varrho \equiv \varrho(\xi) = \sqrt{\xi^2+1/l^2},\quad \Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1+2a_0\xi^2\left(1-\frac{\xi}{\varrho}\right),$$

$$a_0 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)},\quad l^2 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\alpha\mu}.$$

1. Wprowadzenie

Rozważanie wciskania w półprzestrzeń mikropolarną sprężystą ogrzanego stempla zajmującego obszar Ω, przy założeniu, że kształt stempla oraz temperatura i siły działające na stempel nie zależą od zmiennej x_3, prowadzi do mieszanego zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D opisanego przez:

1° układ równań równowagi i równanie przewodnictwa ciepła (dla $x_1 > 0$) [1]:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &(\mu+\alpha)\nabla^2 u_1 + (\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial x_1} + 2\alpha\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = \nu\frac{\partial \theta}{\partial x_1},\\ &(\mu+\alpha)\nabla^2 u_2 + (\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = \nu\frac{\partial \theta}{\partial x_2},\\ &(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\varphi_3 - 4\alpha\varphi_3 + 2\alpha\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = 0,\\ &\nabla^2\theta = 0; \end{aligned}$$

2° warunki regularności w nieskończoności:

$$(1.2)\qquad \sigma_{ij}, \mu_{ij}, \theta \to 0 \quad \text{przy} \quad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \to \infty;$$

3° warunki brzegowe (dla $x_1 = 0$):

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &u_1(0, x_2) = w(x_2) \quad \text{dla} \quad |x_2| < a,\\ &\sigma_{11}(0, x_2) = 0 \quad \text{dla} \quad |x_2| > a,\\ &\sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathcal{R},\\ &\theta(0, x_2) = \psi(x_2) H(a-|x_2|), \quad x_2 \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

gdzie $w(x_2)$ i $\psi(x_2)$ są znanymi funkcjami. Ze względu na liniowość równań równowagi (1.1), rozwiązanie zagadnienia można otrzymać stosując zasadę superpozycji, mianowicie dodając do rozwiązania izotermicznego zagadnienia stempla wciskanego w półprzestrzeń mikropolarną rozwiązanie zagadnienia nagrzanego stempla, który nie powoduje pionowych przemieszczeń na powierzchni kontaktu.

Zakładając, że rozwiązanie izotermicznego płaskiego zagadnienia kontaktowego dla półprzestrzeni jest na ogół znane (np. [7]), rozwiązania nasze ograniczymy do zbadania drugiego z wyżej wymienionych zagadnień. Omówione na wstępie zagadnienie wciskania stempla stanowi uogólnienie na teorię termosprężystości dla ośrodka Cosseratów zagadnień rozpatrywanych dla ośrodka Hooke'a między innymi w pracach [2÷4, 6].

2. Rozwiązanie zagadnienia pomocniczego

Rozpatrzymy sprężystą, jednorodną, izotropową i centrosymetryczną półprzestrzeń mikropolarną $x_1 \geqslant 0$ w płaskim stanie odkształcenia, na brzegu której działają obciążenia normalne $p(x_2)$ i temperatura $T(x_2)$. Zagadnienie to prowadzi do zagadnienia brzegowego dla półpłaszczyzny D opisanego przez: układ równań (1.1), warunki regularności w nieskończoności (1.2) oraz następujące warunki brzegowe:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{11}(0, x_2) = p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0,\\ &\theta(0, x_2) = T(x_2), \quad x_2 \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

gdzie o funkcjach $p(x_2)$ i $T(x_2)$ zakładamy, że są przedziałami ciągłe i bezwzględnie całkowalne dla $x_2 \in \mathcal{R}$ oraz przyjmujemy, że

$$(2.2)\qquad p(-x_2) = p(x_2), \quad T(-x_2) = T(x_2), \quad x_2 \in \mathcal{R}.$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia pomocniczego ma postać [1, 5]:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_c\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right];\right.\\
&\left.\xi\to x_2\right\}-\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+2\mu)}\alpha_t\mathscr{F}_c\left\{\frac{\overline{T}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+(1-\Delta_0)x_1-\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}\right)e^{-\xi x_1}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right];\quad \xi\to x_2\right\},\\
u_2(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu}\mathscr{F}_s\left\{\frac{\tilde{p}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right];\right.\\
&\left.\xi\to x_2\right\}+\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+2\mu)}\alpha_t\mathscr{F}_s\left\{\frac{\overline{T}_c(\xi)}{\Delta_0}\left[\left(2a_0\xi+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+(\Delta_0-1)x_1\right)e^{-\xi x_1}-\right.\right.\\
&\left.\left.-2a_0\xi e^{-\varrho x_1}\right];\quad \xi\to x_2\right\},\\
\varphi_3(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2\mu}\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\mathscr{F}_s\left\{\frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0}\left(e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right);\quad \xi\to x_2\right\}-\\
&-\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\alpha_t\mathscr{F}_s\left\{\frac{\overline{T}(\xi)}{\Delta_0}\left(e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right);\quad \xi\to x_2\right\},\\
\theta(x_1, x_2) &= \mathscr{F}_c\{\overline{T}_c(\xi)e^{-\xi x_1};\quad \xi\to x_2\}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Naprężenia możemy łatwo wyznaczyć z (2.3) i związków konstytutywnych podanych np. w [1].

3. Rozwiązanie zagadnienia kontaktowego

Rozpatrzmy teraz mieszane zagadnienie brzegowe dla półpłaszczyzny D opisane przez układ równań równowagi i równanie przewodnictwa ciepła (1.1), warunki wypromieniowania w nieskończoności (1.2) oraz następujące warunki brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&\theta(0, x_2) = \psi(x_2)H(a-|x_2|) && \text{dla} \quad x_2\in\mathscr{R},\\
&\left.\begin{aligned}\sigma_{12}(0, x_2) = 0\\ \mu_{13}(0, x_2) = 0\end{aligned}\right\} && \text{dla} \quad x_2\in\mathscr{R},\\
&u_1(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad 0\leqslant |x_2| < a,\\
&\sigma_{11}(0, x_2) = 0 && \text{dla} \quad |x_2| > a.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

O $\psi(x_2)$ założymy chwilowo, że jest funkcją parzystą. Do rozwiązania powyższego zagadnienia wykorzystamy rozwiązanie zagadnienia pomocniczego określone wzorami (2.3). Z $(3.1)_1$ oraz $(2.3)_4$ otrzymujemy

$$
\overline{T}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \psi(x_2)\cos(\xi x_2)\,dx_2\,.
\tag{3.2}
$$

Spełniając pozostałe z warunków brzegowych (3.1) dostajemy $\Big($na podstawie (2.3) i związku konstytutywnego $\sigma_{11} = (2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\nu\theta\Big)$ następujące dualne równania całkowe na niewiadomą funkcję $\bar{p}_c(\xi)$:

$$(3.3)\quad \begin{aligned} &\mathscr{F}_c\left\{\frac{\bar{p}_c(\xi)}{\xi\Delta_0};\quad \xi\to x_2\right\} = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t\mathscr{F}_c\left\{\frac{\bar{T}_c(\xi)}{\xi\Delta_0};\quad \xi\to x_2\right\} && \text{dla } 0\leqslant x_2<a,\\ &\mathscr{F}_c\{\bar{p}_c(\xi);\quad \xi\to x_2\} = 0 && \text{dla } x_2>a.\end{aligned}$$

Oznaczając teraz przez

$$(3.4)\qquad A(\xi) = \frac{1}{\Delta_0}\left[\bar{p}_c(\xi)+\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t\bar{T}_c(\xi)\right]$$

oraz wykorzystując fakt, że

$$(3.5)\qquad \theta(0,x_2) = \mathscr{F}_c\{\bar{T}_c(\xi);\ \xi\to x_2\} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2>a,$$

dualne równania (3.3) możemy zapisać w postaci:

$$(3.6)\quad \begin{aligned} &\mathscr{F}_c\left\{\frac{1}{\xi}A(\xi);\ \xi\to x_2\right\} = 0 && \text{dla} \quad 0\leqslant x_2<a,\\ &\mathscr{F}_c\{\Delta_0 A(\xi);\ \xi\to x_2\} = 0 && \text{dla} \quad x_2>a.\end{aligned}$$

Oczywistym rozwiązaniem równań (3.6) jest funkcja

$$(3.7)\qquad A(\xi) = 0 \quad \text{dla} \quad \xi\geqslant 0.$$

Wykorzystując teraz (3.7) i (3.4) otrzymujemy

$$(3.8)\qquad \bar{p}_c(\xi) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t\bar{T}_c(\xi),$$

gdzie $\bar{T}_c(\xi)$ jest znaną funkcją określoną wzorem (3.3).

Podstawiając funkcję $\bar{p}_c(\xi)$ określoną wzorem (3.8) do rozwiązania pomocniczego danego wzorami (2.3), dostajemy:

$$(3.9)\quad \begin{aligned} u_1(x_1,x_2) &= \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\alpha_t\mathscr{F}_c\{\bar{T}_c(\xi)x_1e^{-\xi x_1};\quad \xi\to x_2\},\\ u_2(x_1,x_2) &= \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\alpha_t\mathscr{F}_s\left\{\frac{1}{\xi}\bar{T}_c(\xi)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1};\quad \xi\to x_2\right\},\\ \varphi_3(x_1,x_2) &\equiv 0,\\ \theta(x_1,x_2) &= \mathscr{F}_c\{\bar{T}_c(\xi)e^{-\xi x_1};\quad \xi\to x_2\}.\end{aligned}$$

Wykorzystując związki konstytutywne dla liniowej teorii termosprężystości ośrodka Cosseratów [1] oraz (3.9), możemy składowe tensorów naprężeń siłowych i momentowych napisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t \mathscr{F}_c\{\overline{T}_c(\xi)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}; \quad \xi \to x_2\},\\
&\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t \mathscr{F}_s\{\xi x_1 \overline{T}_c(\xi)e^{-\xi x_1}; \quad \xi \to x_2\},\\
&\sigma_{21}(x_1, x_2) = \sigma_{12}(x_1, x_2),\\
&\sigma_{22}(x_1, x_2) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t \mathscr{F}_c\{\overline{T}_c(\xi)(1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}; \quad \xi \to x_2\},\\
&\sigma_{33}(x_1, x_2) = -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t \mathscr{F}_c\{\overline{T}_c(\xi)e^{-\xi x_1}; \quad \xi \to x_2\},\\
&\mu_{i3}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad \mu_{3i}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

4. Wnioski końcowe

Z otrzymanego rozwiązania zagadnienia kontaktowego określonego wzorami (3.9) i (3.10) wynika, że:

1° Żadna ze składowych nie zależy od nowych stałych materiałowych α, γ, ε.

2° Obrót i naprężenia momentowe są równe zeru w całej sprężystej półprzestrzeni, przy czym spełniony jest związek $\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$.

3° Składowe u_1, u_2, σ_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$ mają taką samą postać jak w rozwiązaniu analogicznego zagadnienia kontaktowego rozpatrzonego dla ośrodka Hooke'a.

Z rozwiązania opisanego wzorami (3.9) i (3.10) można więc wysnuć takie same wnioski, jak np. w [3], mianowicie: naprężenia kontaktowe $\sigma_{11}(0, x_2)$ są proporcjonalne do temperatury, tj.

$$
\sigma_{11}(0, x_2) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\mu\alpha_t\psi(x_2)H(a-|x_2|).
$$

Ponadto zachodzą związki:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{22}(0, x_2) = \sigma_{11}(0, x_2) && \text{dla} \quad x_2 \in \mathscr{R},\\
&\sigma_{33}(x_1, x_2) = \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha_t\theta(x_1, x_2) && \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in \mathscr{D}.
\end{aligned}
$$

W rozdziale 3 pracy przyjęto założenie, że temperatura pod stemplem jest rozłożona symetrycznie względem osi $0x_2$. Jeżeli założenie to zastąpimy warunkiem $\psi(-x_2) = -\psi(x_2)$ dla $x_2 \in (-a, a)$, wtedy otrzymamy rozwiązanie różniące się tylko od rozwiązania danego wzorami (3.9) i (3.10) rodzajem transformacji $\Big($kosinusową należałoby zamienić na sinusową i na odwrót oraz $\overline{T}_c(\xi)$ na $\overline{T}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^a \psi(x_2)\sin(\xi x_2)\,dx_2\Big)$.

A więc znowu otrzymamy rozwiązanie w takiej samej postaci, jak dla ośrodka Hooke'a.

Przyjmując dalej, że zamiast jednego stempla styka się bez nacisku spowodowanego siłami zewnętrznymi z półprzestrzenią mikropolarną kilka symetrycznie rozłożonych względem osi $0x_2$ stempli, otrzymamy rozwiązanie opisane wzorami (3.9) i (3.10), gdzie za $\overline{T}_c(\xi)$ należy wstawić $\overline{T}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\omega} \psi(x_2)\cos(\xi x_2)dx_2$, (gdy $\psi(x_2)$ jest parzysta) lub $\overline{T}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\omega} \psi(x_2)\sin(\xi x_2)dx_2$, (gdy $\psi(x_2)$ nieparzysta, wtedy w (3.9) i (3.10) zmieniamy transformacje kosinusową na sinusową i na odwrót), ω jest sumą odcinków zajętych przez stemple na półprostej $x_1 = 0$, $x_2 \geqslant 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. Z. OLESIAK, *O pewnych własnościach naprężeń cieplnych*, Mech. Teor. i Stos., **5**, 2 (1967).
3. Z. OLESIAK, *Some remarks on the contact problem of thermoelasticity for a semi-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **13**, 8 (1965).
4. Z. OLESIAK, J. ŚLIŻEWICZ, *Stresses and strains in a semi-space heated on a constrained part of the boundary plane*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., **13**, 8 (1965).
5. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Osobliwości naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikropolarnym wywołane obciążeniami*, Mech. Teor. i Stos., **11**, 4 (1973).
6. D. L. GEORGE, I. N. SNEDDON, *The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch*, J. Math. Mech., **11**, 5 (1962).
7. S. MATYSIAK, *Płaskie zagadnienie kontaktowe w niesymetrycznej teorii sprężystości*, Mech. Teor. i Stos., **13**, 2 (1975).

Р е з ю м е

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА В ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В рамках теории термонапряжений для линейной среды Коссера, рассмотрена двухмерная задача о контакте между упругим полупространством и нагретым жестким штампом. Распределение температуры, не зависящее от координаты x_3 и времени t, известно а штамп свободно лежит на полупространстве.

Полученное решение для среды Коссера имеет такой же вид, как решение аналогичной задачи для среды Гука.

S u m m a r y

PLANE CONTACT PROBLEM OF A COSSERAT MEDIUM SUBJECT TO THERMAL STRESSES

The problem of contact between an elastic half-space and a heated rigid punch is considered within the theory of thermal stresses of a linear Cosserat medium. The temperature distribution under the punch is assumed to be a known function independent of x_3 and time t, the punch resting load-free at the surface of the halfspace. The solution obtained for a Cosserat medium has the same form as that referring to an analogous problem of a Hooke's body.

INSTYTUT MATEMATYKI I STATYSTYKI SGGW-AR WARSZAWA
INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1976 r.