

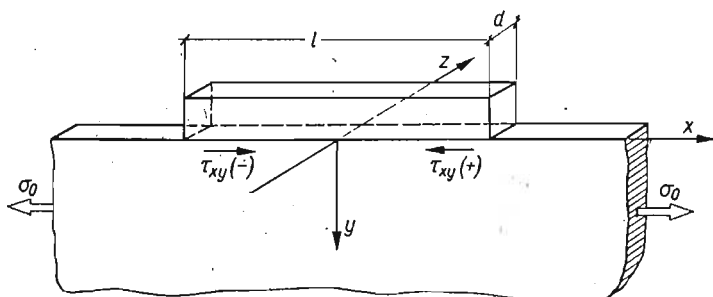
## INWERSYJNA METODA BADANIA MODELI ELASTOOPTYCZNYCH Z WIĘZAMI SZTYWNYMI

ROMAN DOROSZKIEWICZ, JERZY LIETZ, BOGDAN MICHAŁSKI  
(WARSZAWA)

W artykule tym przedstawimy pewne zagadnienie doświadczalnej analizy naprężeń referowane przez autorów w 1974 roku<sup>1)</sup>, które można rozwiązać metodą elastoptyczną przy użyciu nieco innej techniki od ogólnie stosowanej.

Tematem badania było wyznaczenie stanu naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej, na brzegu której istnieje sztywna więź. Naprężenia te wymuszone są przez odkształcenia półpłaszczyzny w kierunku równoległym do brzegu. Głównym celem było znalezienie składowych naprężenia na linii styku półpłaszczyzny z więzią.

Rozpatrujemy nieodkształcalną więź o długości  $l$ , doskonale zespoloną z brzegiem sprężystej półpłaszczyzny w układzie odniesienia  $x, y, z$ , jak na rys. 1.



Rys. 1. Schemat modelu półpłaszczyzny z więzią

W oddaleniu od więzi półpłaszczyznę obciążamy równomiernym naprężeniem rozciągającym  $\sigma_0$ , które wywołuje jednorodne pole odkształceń  $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ . Na skutek usztywniającego działania więzi, w jej otoczeniu pole odkształceń i naprężeń przestaje być jednorodne, a na końcach więzi oczekujemy znacznego spiętrzenia naprężeń.

Z pomiarów elastoptycznych uzyskujemy w każdym punkcie płaskiego modelu:

- 1) rząd izochromy  $m = \sigma_1 - \sigma_2$  (naprężenia wyrażamy dla wygody bezwymiarowo w rzędach izochrom),
- 2) parametr izokliny  $\varphi$ .

<sup>1)</sup> R. S. Doroszkiewicz, J. Lietz, B. Michalski. Inwersyjna metoda badania modeli elastoptycznych z więzami sztywnymi. VI Sympozjum doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego. Warszawa — wrzesień 1974.

Szczególna sytuacja występuje jednak na granicy połączenia półpłaszczyzny z więzią. Z założenia nieodkształcalności więzi i nierozdzielności odkształceń wynika, że wydłużenie względne  $\varepsilon_x$  (rys. 1) musi być równe zero. Ten dodatkowy warunek  $\varepsilon_x = 0$  wraz z wynikami pomiarów elastooptycznych  $m$  i  $\varphi$  pozwala w pełni określić stan naprężenia na granicy więzi. Z warunków równowagi i prawa Hooke'a, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z = 0$ ), łatwo wyprowadzić następujące wyrażenia na składowe stanu naprężenia:

$$(1) \quad \sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \quad \sigma_y = -\frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi,$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} m \sin 2\varphi.$$

Charakterystyczna, dla stanu naprężenia pod więzią, jest proporcjonalność do siebie naprężeń normalnych, gdyż  $\sigma_x = \nu \sigma_y$ .

Analizując wyniki obliczone z powyższych wzorów należy zwrócić uwagę na całkowity warunek równowagi. Z tego, że wypadkowa sił działających między więzią a półpłaszczyzną jest równa zero wynika, że

$$(2) \quad \int_{-l/2}^{l/2} \tau_{xy} dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_y dx = 0.$$

Pierwszy z tych warunków jest spełniony, gdy wykres  $\tau_{xy}(x)$  jest antysymetryczny, co wynika z symetrii układu. Warunek drugi jest bardzo dobrym sprawdzianem poprawności wyznaczenia naprężeń  $\sigma_y$ . Wynika z niego oczywiście, że wielkość  $\sigma_y$  musi zmieniać znak. Ta zmiana znaku występuje w charakterystycznych dla zagadnienia punktach, w których  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ , a  $\varphi = 45^\circ$ . Na obrazie elastooptycznym izoklina  $45^\circ$  wskazuje te punkty.

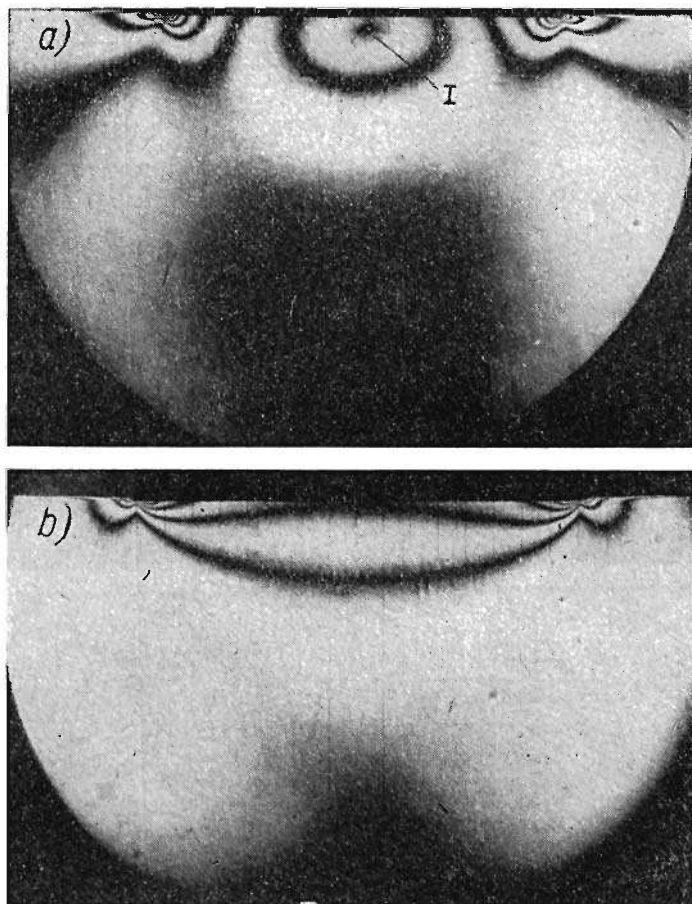
W rzeczywistości sprawę komplikuje wpływ skończonej grubości modelu. W zwykłych badaniach elastooptycznych przy umiarkowanych gradientach stanu naprężenia stosuje się modele o grubości do 10 mm przyjmując, że w modelach tych występuje płaski stan naprężenia, ponieważ mogą one swobodnie odkształcać się po grubości, a  $\sigma_z = 0$ . Jeżeli jednak z brzegiem modelu zespolona jest nieodkształcalna więź, to narzuca ona na brzegu nie tylko warunek  $\varepsilon_x = 0$  ale również  $\varepsilon_z = 0$ . Związane z tym oddziaływanie ( $\tau_{yz} \neq 0$ ) wprowadza w sąsiedztwie więzi trójwymiarowy stan naprężenia. W jego strefie obraz elastooptyczny jest nieprawidłowy i nieczytelny. Należy więc w miarę możliwości dążyć do zlikwidowania lub przynajmniej ograniczenia tego oddziaływania. Najwłaściwsza droga do wyeliminowania wpływu trójwymiarowości prowadzi, jak wynika z licznych badań prowadzonych przez autorów, do wykonania modelu o małej grubości, a więzi o możliwie dużych wymiarach. Decyduje tutaj stosunek  $l/d$  gdzie  $l$  oznacza długość więzi,  $d$  — grubość modelu. Doświadczenia wykazały, że przy  $l/d$  rzędu 30 - 40 wpływ grubości modelu przestaje odgrywać rolę.

Istnieje możliwość rozwiązania postawionego zagadnienia metodą badania elastooptycznego, ale nieco inną techniką opartą na zasadzie superpozycji. Potraktujmy stan naprężenia panujący w rozciąganej półpłaszczyźnie z więzią jako stan wynikający z superpozycji dwu stanów naprężenia. Symbolicznie zapiszemy to

$$S = S_I + S_{II},$$

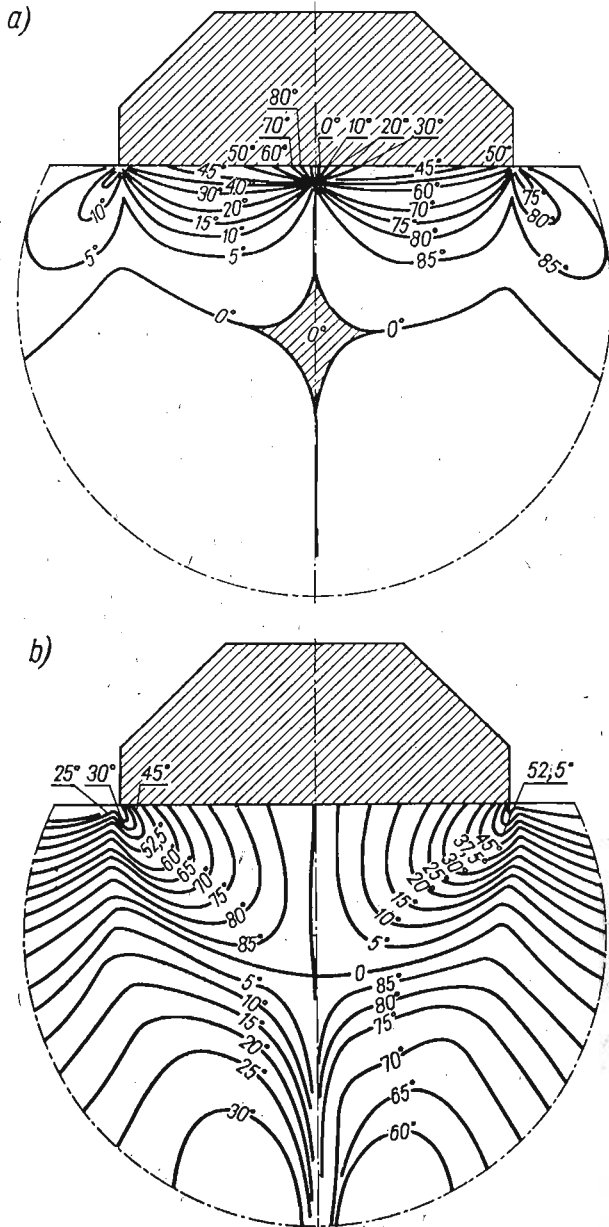
gdzie  $S_I$  oznacza jednorodny stan naprężenia wynikający z jednoosiowego rozciągania,  $S_{II}$  — stan naprężenia wywołany oddziaływaniem więzi, tzn. siłami wywieranymi na półpłaszczyznę przez więź.

Stan naprężenia taki sam, jak  $S_{II}$ , lecz przeciwnego znaku, można łatwo zrealizować poddając model równomiernemu rozciąganiu  $\sigma_0$  i utrzymując go pod obciążeniem w stanie



Rys. 2. Izochromy: a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

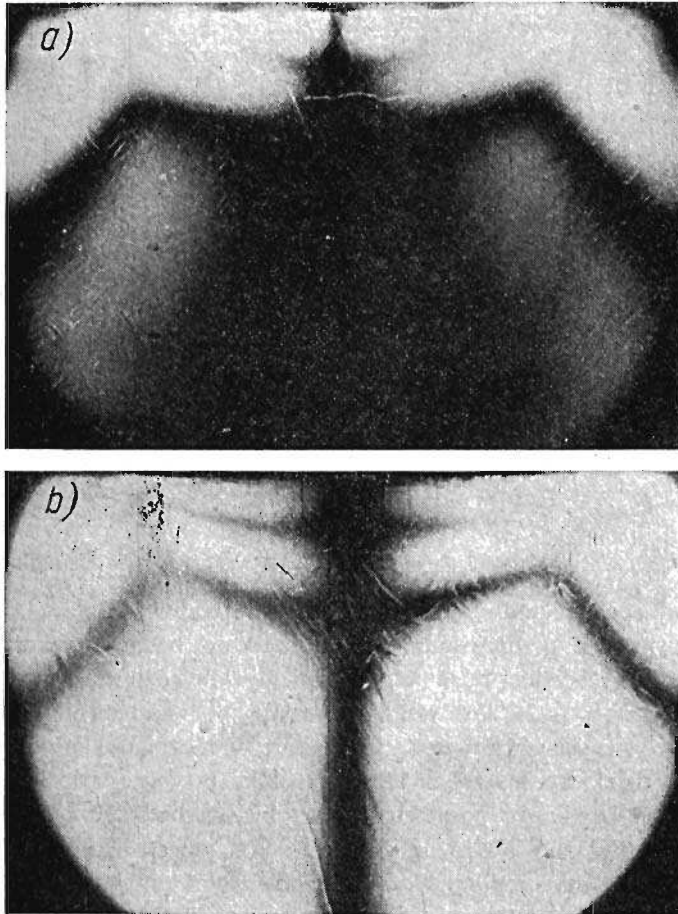
odkształconym. Do tak odkształconego modelu przyklejamy więź, a po całkowitym związaniu połączenia klejonego model odciążamy. Wokół więzi powstanie wówczas stan naprężenia  $-S_{II}$ , który można zarejestrować elastooptycznie. Dla tak przeprowadzonego badania przyjmujemy umownie nazwę «badanie inwersyjne» ze względu na odwrócenie czynności w badaniu (najpierw obciążenie, potem klejenie), jak również odwrócenie znaku naprężeń.



Rys. 3. Izokliny: a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

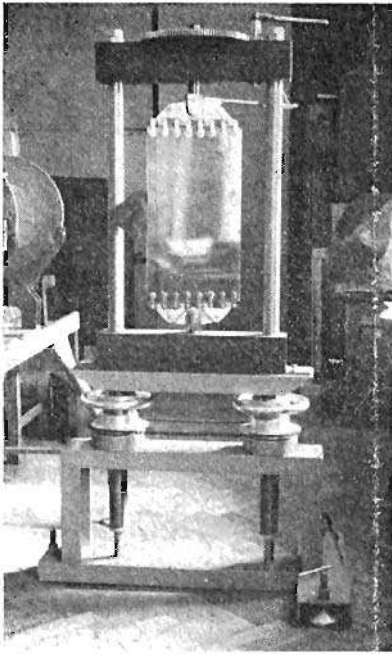
Wyznaczania naprężeń na granicy połączenia półpłaszczyzny z więzią dokonać można podobnie na podstawie danych elastoptycznych  $m$  i  $\varphi$ , z tym, że dodatkowym warunkiem na granicy jest

$$(3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu} \sigma_0 - \frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \frac{1}{1-\nu} \sigma_0 - \frac{1}{1-\nu} m \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{m}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

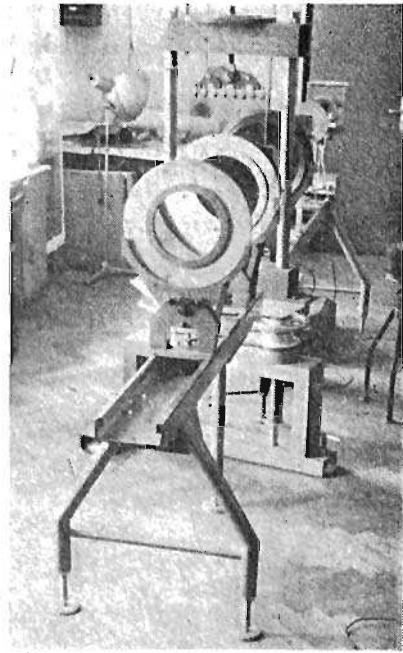


Rys. 4. Izoklina  $0^\circ$ : a) badanie proste, b) badanie inwersyjne

Składowe naprężenia (3) dadzą się łatwo przeliczyć na przypadek prosty (nieinwersyjny):  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  zmieniają tylko znak, a do wartości  $\sigma_x$  trzeba ponadto dodać wartość naprężenia  $\sigma_0$ , z jakim rozciągany był wstępnie model.



Rys. 5. Urządzenie do obciążania modelu



Rys. 6. Stanowisko badawcze

Naprężenia przeliczone oznaczamy gwiazdką:

$$(4) \quad \sigma_x^* = \sigma_0 - \sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu} (m \cos 2\varphi - \sigma_0),$$

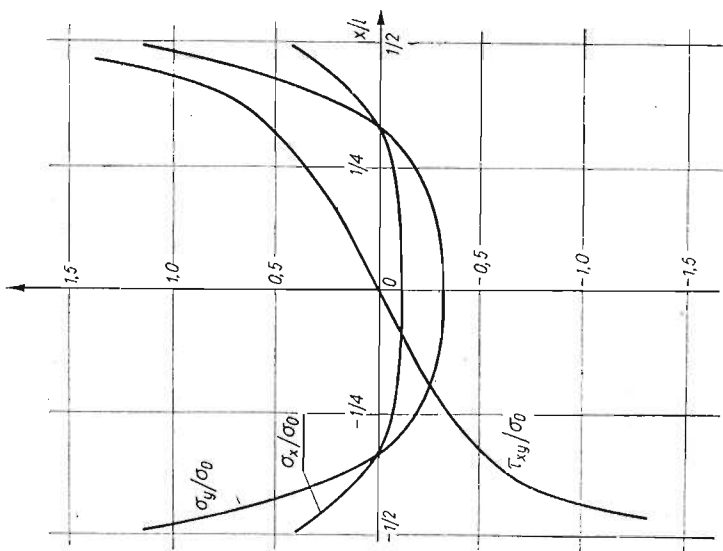
$$\sigma_y^* = -\sigma_y, \quad \tau_{xy}^* = -\tau_{xy}.$$

Wykresy  $\tau_{xy}^*$  i  $\sigma_x^*$  również podlegają sprawdzeniu wg wzorów (2).

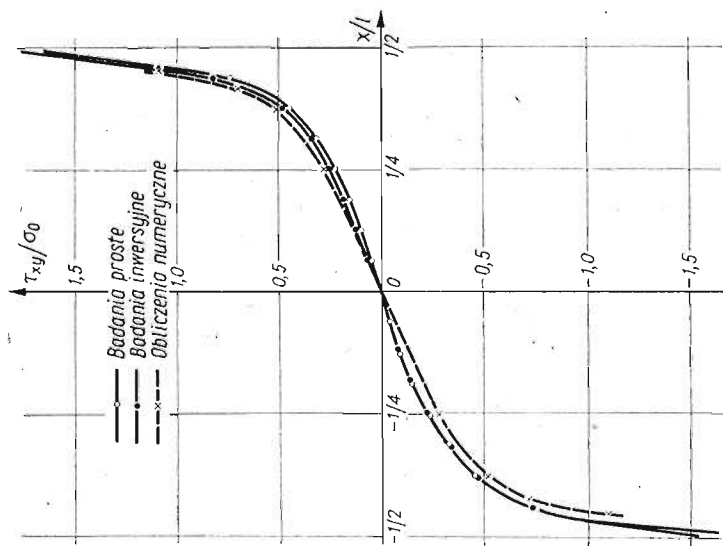
Korzyści płynące z przeprowadzonego dodatkowo badania inwersyjnego są bezsporne. Otrzymujemy bowiem te same wyniki z zupełnie różnych obrazów elastoptycznych (izochromy na rys. 2). Porównanie wyników pozwala ocenić dokładność badań i co ważniejsze w pewnych obszarach wartości naprężeń można dokładniej określić w badaniu inwersyjnym dzięki np. lepszej czytelności izoklin (porównaj rys. 3a oraz 3b). Można łatwo wykazać, że izoklina o parametrze 0 w obu przypadkach przebiega jednakowo, mimo iż pola izoklin są zupełnie różne. Potwierdzają to zdjęcia izoklin  $0^\circ$  (rys. 4a i b).

Wykorzystując doświadczenia wstępnych etapów badań przyjęto duże wymiary modelu ( $300 \times 580$  mm) uzyskując w ten sposób: a) zmniejszenie wpływu pełzania kleju; b) lepszą czytelność obrazu elastoptycznego zwłaszcza w sąsiedztwie więzi; c) wyższe rzędy izochrom przy zachowaniu korzystnego stosunku  $l/d = 27$ .

Model wykonano ze specjalnie odlanej płyty epoksydowej grubości 6 mm. Po środku dłuższego boku przyklejono stalową więź używając kleju epoksydowego z wypełniaczem aluminiowym. Obie krótsze krawędzie obciążono ośmioma siłami skupionymi za pomocą układu dźwigniowego (rys. 5).



Rys. 8. Wykresy naprężeń pod więzią



Rys. 7. Wykresy naprężeń stycznych pod więzią

Badania prowadzono w polaryskopie z równoległą wiązką światła, rzutując obrazy elastooptyczne na ekran. Zdjęcie stanowiska badawczego widoczne jest na rys. 6.

Na rys. 7 przedstawiono wykresy  $\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}$  wzdłuż więzi, uzyskane z badania prostego i inwersyjnego. Ich zgodność jest wysoka. Dla porównania linią przerywaną pokazano wyniki obliczenia numerycznego, które przeprowadzono metodą elementów skończonych podaną przez O. C. ZIENKIEWICZA, dzieląc badany obszar na skończoną liczbę wielokątów.

Wykresy na rys. 8 przedstawiają ostateczne wyniki badania półpłaszczyzny z więzią, uzyskane z uśrednienia wyników badań prostych i inwersyjnych.

Autorzy uważają, że zaproponowany sposób badania warto jest stosować w pewnych przypadkach, jakimi mogą być np. pasma z więzami usztywniającymi, inkluzjami itp.

#### Резюме

#### ОБРАТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ФОТОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ С ЖЕСТКИМИ СВЯЗЯМИ

Авторы предлагают метод исследования плоских фотоупругих моделей с жесткими связями. Суть его в том, что склеивание связи с моделью производится под нагрузкой а само фотоупругое исследование — без нагрузки. В работе показаны преимущества такой методики, особенно при параллельном проведении обычного опыта.

Метод иллюстрируется примером растянутой в одном направлении полуплоскости, к которой прикреплена жесткая связь конечной длины.

#### Summary

#### INVERSIONAL METHOD OF INVESTIGATION OF PHOTO-ELASTIC MODELS

The authors present a certain method of investigation of two-dimensional photoelastic models with rigid constraints. It consists in the fact that cementing of constraints with the model is performed under load, and photoelastic investigation — without external loads.

In the paper are presented advantages of the method, particularly when being used together with a conventional investigation.

The method is presented on an example of a half-plane under uni-axial load, the boundary of which is attached to a rigid constraint of finite length.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1976 r.*