MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 15 (1977)

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA ŚCISKANEGO PRZY DUŻYCH UGIĘCIACH METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO*)

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozwój komputerów o dużej pojemności pamięci operacyjnej i krótkim czasie dostępu do pamięci stałej sprawia, że na nowo pojawiają się dawniej niepraktyczne metody obliczeniowe. Coraz bardziej rozwijają się nowe, bezpośrednie metody obliczeń numerycznych. Coraz bardziej skuteczne stają się narzędzia analizy numerycznej, za pomocą których pokonano wiele nierozwiązywalnych uprzednio problemów i zadań. Możliwości współczesnej techniki obliczeniowej pozwalają efektywnie rozwiązać szereg zagadnień teorii optymalnego sterowania.

Jedną z metod tej teorii jest programowanie dynamiczne, które pojawiło się jako ogólna metoda rozwiązywania zagadnień wariacyjnych. Metody tej używa się również przy rozwiązywaniu innych zagadnień teorii optymalnego sterowania.

Ogólnie przez programowanie dynamiczne rozumie się optymalne sterowanie procesami, czyli takimi zjawiskami, na których przebieg mamy wpływ. Oddziaływanie to nazywane sterowaniem musimy tak dobrać, aby otrzymany rezultat był ekstremalny przy spełnieniu wszystkich ograniczeń nałożonych na proces. Idea programowania dynamicznego tkwi w zamianie jednego zadania z wieloma zmiennymi na ciąg zadań, kolejno rozwiązywanych, o mniejszej liczbie zmiennych. Optymalizację takiego wieloetapowego procesu prowadzi się na podstawie zasady optymalności BELLMANA, która jest szczególnie wygodna, jeżeli rozpatrywany proces ciągły może ulec dyskretyzacji (kwantyzacji). Związane to jest z przyjęciem odmiennych metod rachunkowych, z wykorzystaniem EMC, w których proces ciągły zastępuje się układem dyskretnym. Funkcje opisujące proces mogą być nieciągłe lub dane w postaci tablic.

Niektóre zadania teorii sprężystości rozwiązuje się tą metodą. W szczególności elementy konstrukcyjne z jedną współrzędną stanu można, używając programowania dynamicznego, rozwiązywać na dwa różne sposoby. W pierwszym, numerycznie całkuje się równanie Hamiltona-Jacobiego–Bellmana. W drugim, numerycznie rozwiązuje się formułę rekurencyjną zwaną równaniem funkcyjnym Bellmana. Ten drugi sposób użycia idei programo-

*) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych» — koordynowanego przez IPPT PAN.

wania dynamicznego nosi nazwę dyskretnej wersji programowania dynamicznego i z powodzeniem stosowany był w celu rozwiązania jednowymiarowych elementów konstrukcyjnych, w ujęciu wariacyjnym, przez POCZTMANA w pracach [1, 2]. Metoda ta pozwala przy użyciu współczesnych EMC rozwiązywać również równanie funkcyjne Bellmana z dwiema zmiennymi stanu. BARANENKO [3] użył dyskretnej metody programowania dynamicznego do wyznaczenia ugięć sprężystej, prostokątnej membrany, utwierdzonej na brzegu i obciążonej równomiernie na całej powierzchni, przy równoczesnym ograniczeniu ugięć. W pracy [4] ta sama metoda przeniesiona została na inne dwuwymiarowe zadania teorii sprężystości. ANGEL i BELLMAN [5] podają dalsze możliwości stosowania tej metody z równoczesnym dołączeniem niektórych procedur numerycznych w języku fortran. Autorzy podają między innymi literaturę dotyczącą rozwiązań szeregu dwuwymiarowych elementów konstrukcyjnych omawianą metodą.

Również w podejściu do optymalnego kształtowania elementów konstrukcyjnych tą metodą wskazać możemy na dwa odrębne sposoby. Pierwszy, polegający na całkowaniu równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana [6], oraz drugi, z wykorzystaniem równania funkcyjnego. Jak dotąd tylko kilka prac poświęconych jest zastosowaniu równania funkcyjnego Bellmana do optymalnego kształtowania w zadaniach teorii sprężystości. Poszukiwanie minimum objętości wspornika o przekroju prostokątnym, jednostronnie sztywno utwierdzonego, z materiału pełzającego, przy ograniczeniach geometrycznych przedstawiono w artykule [7]. Tą samą metodę wykorzystano w pracy [8], gdzie jako kryterium przyjęto minimum objętości pręta sprężystego poddanego zginaniu, z uwzględnieniem dużych przemieszczeń i nałożeniu dodatkowych ograniczeń. Algorytm programowania dynamicznego otrzymany dla procesu dyskretnego na podstawie zasady optymalności można stosować wykorzystując metody analityczne, z tym, że na ogół jest to niemożliwe, a w przypadkach kiedy to się udaje, postępowanie analityczne jest uciążliwe przy większej liczbie etapów [9]. W niniejszej pracy posługiwać się będziemy wyłącznie bezpośrednią metodą numeryczną.

Posługiwanie się dyskretną wersją programowania dynamicznego ma wiele zalet, które wynikają z odmiennego sposobu wyznaczania ekstremum, polegającego na przeszukiwaniu skończonego zbioru wartości. Taki sposób wyznaczania ekstremum umożliwia w naturalny sposób wprowadzenie wielu ograniczeń lokalnych, z którymi spotykamy się w realnych przypadkach. Między innymi, ograniczenie dopuszczalnych naprężeń, wymiarów, ugięć. Często te dodatkowe warunki upraszczają obliczenia, gdyż eliminują z procesu «przeszukiwania» te wartości zmiennej stanu i sterowania, które nie spełniają na danym etapie nałożonych ograniczeń. Możliwe są również globalne warunki ograniczające wartość energii czy też objętości.

Cytowane powyżej prace nie zawierają szczegółów obliczeń maszynowych, wspólnych dla wszystkich jednowymiarowych elementów konstrukcyjnych. Po sformułowaniu problemu i odwołaniu się do równania funkcyjnego podano wyniki końcowe. Celem tej pracy będzie pełniejsze przytoczenie szczegółów obliczeń maszynowych użytej metody w odniesieniu do sformułowanego poniżej zadania optymalnego kształtowania ściskanego słupa, przy dużych ugięciach. Część pierwsza poświęcona będzie obciążeniu siłą skupioną, w drugiej zaś uwzględnimy dodatkowo ciężar własny słupa.

2. Sformułowanie problemu

Rozważać będziemy sprężysty pręt, o przekroju prostokątnym, długości l, obciążony stałą siłą skupioną P taką, że $P > P_{kr}$, zachowującą kierunek działania (rys. 1). Sztywność pręta $\alpha = EI$ będzie opisana następująco: $\alpha_1 = EI_1$ dla odcinka $[0, l_1]$, $\alpha_2 = EI_2$ dla odcinka $(l_1, l_2]$. Poszukiwać będziemy takiej wartości $\delta = \alpha_2/\alpha_1$, która zapewni minimum odchylenia końca pręta x_k od stanu nieodkształconego.

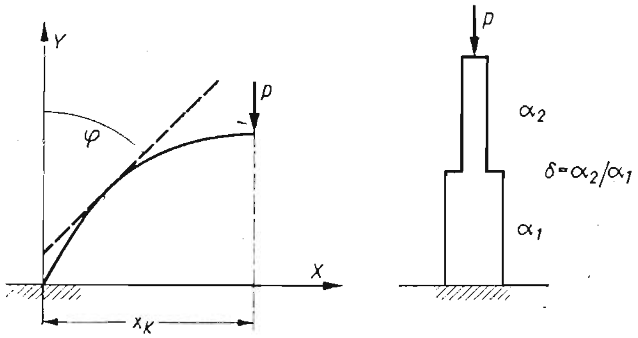
(1) $$\min_{\delta \in U_1} x_k,$$

gdzie $U_1 = \{\delta: 0 \leqslant \delta \leqslant 1\}$.

Równocześnie przyjmiemy następujące warunki ograniczające związane z:

— ograniczeniem objętości V_0 pręta

(2) $$V_0 = \text{const},$$



Rys. 1. Sposób obciążenia pręta

— zapewnieniem warunku równowagi, poprzez minimalizację energii potencjalnej E odkształconego pręta [10]:

(3) $$\min_{\varphi \in U_2} E,$$

gdzie $U_2 = \{\varphi: 0 \leqslant \varphi(s) \leqslant \Pi \wedge \varphi(0) = 0\}, \quad 0 < s \leqslant 1.$

Sposób rozwiązania. Energię potencjalną odkształcenia pręta przy wyboczeniu oraz potencjał siły zewnętrznej zapiszemy w postaci całek:

(4) $$A_1 = \int_0^l \frac{\alpha}{2}(\varphi')^2 ds'; \qquad A_2 = P\int_0^l \cos\varphi ds'.$$

Energia potencjalna E układu przedstawionego na rys. 1 ma postać

(5) $$E = \int_0^{l_1} \left[\frac{\alpha_1}{2}(\varphi')^2 + P\cos\varphi\right] ds' + \int_{l_1}^{l} \left[\frac{\alpha_2}{2}(\varphi')^2 + P\cos\varphi\right] ds'.$$

Minimum wyrażenia (3) jest równoznaczne z przyjęciem pełnego, nieliniowego równania różniczkowego linii ugięcia.

Wprowadzając oznaczenia:

$$(6)\qquad \frac{s'}{s}=l;\quad c_1=\frac{Pl^2}{\alpha_1};\quad \delta=\frac{\alpha_2}{\alpha_1};\quad \varphi'=\frac{1}{l}\frac{d\varphi}{ds},$$

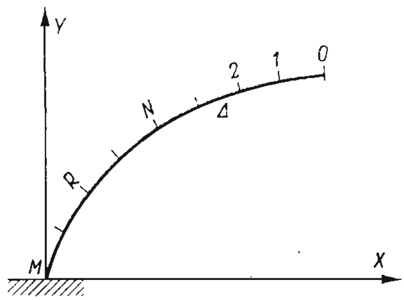
otrzymujemy następującą postać funkcjonału E

$$(7)\qquad E=\frac{\alpha_1}{l}\left\{\int\limits_0^{s_1}\left[\frac{1}{2}(\varphi')^2+c_1\cos\varphi\right]ds+\int\limits_{s_1}^{s_2}\left[\frac{\delta}{2}(\varphi')^2+c_1\cos\varphi\right]ds\right\}.$$

Zastępując w (7) całkowanie sumowaniem, mamy, opuszczając czynnik α_1/l,

$$(8)\qquad E=\sum_{R=N+1}^{M}\left[\frac{1}{2}(\varphi_R')^2+c_1\cos\varphi_R\right]\Delta+\sum_{R=1}^{N}\left[\frac{\delta}{2}(\varphi_R')^2+c_1\cos\varphi_R\right]\Delta.$$

Porządek numeracji pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Numeracja etapów

Pochodną φ_R' zastąpimy dalej ilorazem różnicowym

$$(9)\qquad \varphi_R'=\frac{\varphi_R-\varphi_{R-1}}{\Delta}.$$

W miejsce wyjściowego funkcjonału (5) otrzymujemy jego wartość przybliżoną

$$(10)\qquad E=\sum_{R=N+1}^{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_R-\varphi_{R-1}}{\Delta}\right)^2+c_1\cos(\varphi_R)\right]\Delta+$$

$$+\sum_{R=1}^{N}\left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{\varphi_R-\varphi_{R-1}}{\Delta}\right)^2+c_1\cos(\varphi_R)\right]\Delta.$$

Minimum sumy (10) poszukiwać będziemy bezpośrednio wykorzystując EMC, na podstawie zasady optymalności Bellmana, według której «końcowy odcinek trajektorii optymalnej jest sam dla siebie optymalny». W wyniku jednokrotnej realizacji tej procedury wyznaczona zostanie linia ugięcia odkształconego pręta, a zatem i położenie końca x_k^1, dla jednej wartości $\delta_1\in U_1$, przy spełnieniu ograniczenia (2). Następnie procedura ta zostaje powtórzona dla innej wartości $\delta_2\in U_1$. Jej realizacja daje inny stan równowagi oraz nowe położenie końca odkształconego pręta x_k^2. Każdemu elementowi $\delta_i\in U_1$ odpowiada jedno położenie końca x_k^i. Spośród elementów zbioru $X = \{x_k^i\}$, $i = 1, \ldots, I$ wybiera się element minimalny. Wskaźnik I równy jest liczbie elementów zbioru U_1 i mówi o ilości powtórzeń równania funkcyjnego.

Najbardziej pracochłonne, w sensie potrzebnego nakładu obliczeń, jest wyznaczanie kolejnych stanów równowagi na podstawie (10). Poniżej przedstawione zostaną najważniejsze elementy tych obliczeń. Równanie funkcyjne Bellmana dla (10) ma postać

$$f_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1}\in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_R) \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\}, \tag{11}$$

gdy $0 \leqslant R \leqslant N$, lub

$$f_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1}\in U_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_R - \varphi_{R-1}}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos\varphi_{R-1} \right] \Delta + f_{R-1}(\varphi_{R-1}) \right\}, \tag{12}$$

gdy $N+1 \leqslant R \leqslant M$.

Obliczenia rozpoczynamy od swobodnego końca przesuwając się ku utwierdzeniu, gdzie dodatkowo musi być spełniony warunek $\varphi(0) = 0$.

Dla $N = 1$ z (11) otrzymujemy

$$f_1(\varphi_1) = \min_{\varphi_0\in U_2} \left\{ \frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos\varphi_1 \right\} \Delta. \tag{13}$$

Podzielmy cały zbiór U_2 na ii równych części. Elementy tego zbioru oznaczać będziemy $\varphi(i)$, gdzie $i = 1, \ldots, ii$. Odpowiedni indeks oznaczać będzie kolejny etap i tak na przykład $\varphi_0(i)$ będzie i-tą wartością sterowania na etapie pierwszym. Nadajmy więc sterowaniu pierwszą wartość $\varphi_0(1)$. Zmieniając zmienną sterowania $\varphi_0(1)$ na $\varphi_0(2)$ porównujemy wartość wyrażenia (13). Mniejszą z nich zapamiętuje się. Sterowaniu nadaje się kolejną wartość $\varphi_0(3)$, a obliczoną wartość (13) porównuje się z uprzednio zapamiętaną. Mniejszą z nich zachowuje się w pamięci w miejsce poprzedniej. Wyczerpując cały zbiór sterowań dopuszczalnych $\varphi_0(1), \varphi_0(2), \ldots, \varphi_0(ii)$ otrzymujemy w końcu najmniejszą wartość wyrażenia (13) dla zmiennej stanu $\varphi_1(1)$.

W dalszym ciągu zmienimy stan na $\varphi_1(2)$ i z (13) wyznaczamy wartość najmniejszą, podstawiając kolejno za sterowanie $\varphi_0(1), \ldots, \varphi_0(ii)$ ze zbioru U_2. Obliczenia w tym etapie kończą się z chwilą stablicowania funkcji $f_1(\varphi_1)$. Dyskretne wartości tej funkcji zapisuje się w pamięci maszyny, w formie tablicy $f[i, k]$, gdzie k oznacza numer etapu, i zaś wartość zmiennej stanu. Elementy $f[i, k]$ należy teraz zachować w pamięci EMC, gdyż będą potrzebne przy odtwarzaniu «ścieżki optymalnej». Te same operacje wykonujemy po cofnięciu się o jeden krok do tyłu i ustaleniu $k = 2$.

Z (11) otrzymujemy

$$f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi_1\in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_1) \right] \Delta + f_1(\varphi_1) \right\}. \tag{14}$$

Organizacja obliczeń na tym etapie jest podobna, z tym, że w miejsce $f_1(\varphi_1)$ podstawia się elementy macierzy $f[i, 1]$, to jest:

$$f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi_1(i)\in U_2} \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_1(i)) \right] \Delta + f[i, 1] \Big\}. \tag{15}$$

Stablicowane $f_2(\varphi_2)$ oznaczamy $f[i, 2]$. Elementy $f[i, 2]$, gdzie $i = 1, \ldots, ii$ będą potrzebne do stablicowania $f_3(\varphi_3)$ w etapie trzecim, a cała macierz $f[i, k]$ o $ii \times M$ elementach wykorzystana będzie przy odtwarzaniu «ścieżki optymalnej».

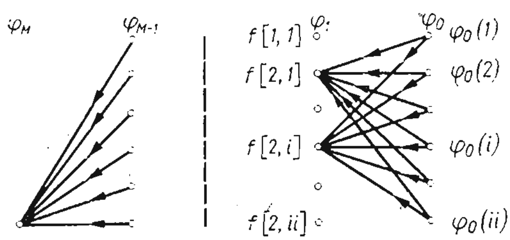
W etapie trzecim mamy:

$$f_3(\varphi_3) = \min_{\varphi_2(i) \in U_2} \left\{ \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(\varphi_2(i)) \right] \Delta + f[i, 2] \right\}. \tag{16}$$

Po N-krotnym cofnięciu się znajdujemy się w punkcie $R = N$. Dla $N+1 \leqslant R \leqslant M$ operację minimum przeprowadza się tak samo, poprzez wielokrotne porównywanie, z tym, że należy posługiwać się wyrażeniem (12) w miejsce (11). W szczególności w ostatnim etapie otrzymamy

$$f_M(0) = \min_{\varphi_{M-1}(i) \in U_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{0 - \varphi_{M-1}(i)}{\Delta} \right)^2 + c_1 \cos(0) \right] \Delta + f[i, M-1] \right\}. \tag{17}$$

Rysunek 3 przedstawia schematycznie sposób tablicowania $f_1(\varphi_1)$, $f_2(\varphi_2)$ oraz $f_M(0)$. Na dowolnym etapie R zmienna sterowania $\varphi_k(i)$ przyjmuje zawsze tę samą, skończoną liczbę ii wartości dyskretnych z przedziału $[0, \pi]$. Z chwilą osiągnięcia przeciwległego



Rys. 3. Sposób tablicowania funkcji celu

brzegu (sztywne utwierdzenie pręta), należy odtworzyć tak zwaną «ścieżkę optymalną» przy ruchu do przodu, to znaczy określić te wartości kąta $\varphi_k(i)$ ($k = 1, \ldots, M$), które dały najmniejszą wartość energii E w M etapach. Oznaczmy te kąty φ_k^* ($k = 1, \ldots, M$). Współrzędne punktów linii ugięcia określimy:

$$X_R = \sum_{i=M-1}^{R} \Delta \sin \varphi_i^*; \qquad Y_R = \sum_{i=M-1}^{R} \Delta \cos \varphi_i^*. \tag{18}$$

Wyznaczenie ścieżki optymalnej kończy obliczenia dla danej, jednej wartości parametru $\delta \in U_1$. Dla innej wartości parametru $\delta \in U_1$ rozwiązuje się równania (11) i (12) według tego samego schematu na nowo. Każde kolejne rozwiązanie (11) i (12) daje odpowiednie położenie końca. Minimalną wartość x_k określimy na podstawie wykresu $x_k = f(\delta)$.

Wyniki. Objętość pręta V o przekroju prostokątnym, płaskozbieżnego, o przekroju zmieniającym się skokowo, możemy zapisać następująco:

$$V = [F_1 s_1 + F_2(s_2 - s_1)]l, \tag{19}$$

gdzie F_1, F_2 oznaczają przekroje pręta.

Po wprowadzeniu parametru δ objętość V wynosi

$$V = \frac{12\alpha_1 l}{Eb^2}[s_1 + \delta(s_2 - s_1)], \tag{20}$$

lub korzystając z (6)

$$V = \frac{12Pl^3}{Eb^2 c_1}[s_1 + \delta(s_2 - s_1)], \tag{21}$$

gdzie c_1 jest bezwymiarową stałą.

Niech V_0 oznacza bezwymiarową objętość

$$V_0 = \frac{VEb^2}{12Pl^3}. \tag{22}$$

Wtedy wyrażenie (21) zapiszemy

$$c_1 V_0 = s_1 + \delta(s_2 - s_1).$$

Konkretne obliczenia przeprowadzono dla parametrów zestawionych w tablicy 1, wykorzystując EMC Odra 1204 oraz Cyber 72.

Tablica 1

Rysunek	s_1	s_2	V_0	δ	φ	Δ
4, 5	0,5	0,5	0,180	$0 \div 1$	$0 \div \Pi$	0,05
6, 7	0,5	0,5	0,300	$0 \div 1$	$0 \div \Pi$	0,05
8, 9	0,5	0,5	0,370	$0 \div 1$	$0 \div \Pi$	0,05

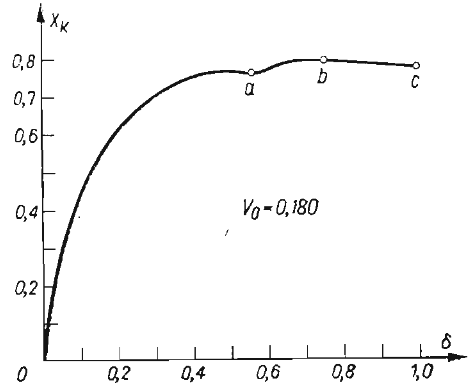
Na rysunkach 4, 6, 8 pokazano zależność odchylenia x_k końca pręta w funkcji δ, dla ustalonej w każdym przypadku stałej objętości V_0.

Rysunki 5, 7, 9 przedstawiają linie ugięcia jakie otrzymano dla wybranych wartości parametru δ, oznaczonych literami *a*, *b*, *c*.

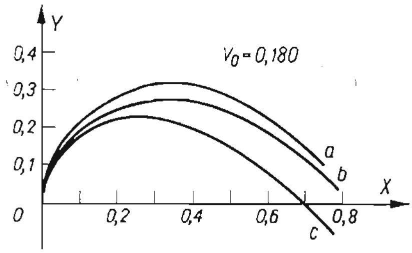
Przyjmując «małą» objętość pręta ($V_0 = 0{,}180$) cały pręt ulega odkształceniu niezależnie od rozkładu masy w przedziałach $[0, s_1]$ i $(s_1, s_2]$. Przy odpowiednim zwiększeniu objętości ($V_0 = 0{,}300$, rys. 6) pręt przy właściwym sposobie rozłożenia masy nie traci stateczności. Dwa minimalne odchylenia x_k zaznaczono na rys. 6 punktami *b* i *c*. Punkt *a* odpowiada przypadkowi, który nie ma znaczenia z technicznego punktu widzenia, gdyż górna część pręta doznaje bardzo dużych przemieszczeń (krzywa *a* rys. 7).

Dalsze zwiększanie objętości poszerza obszar statecznego zachowania się pręta, (rys. 8 i 9).

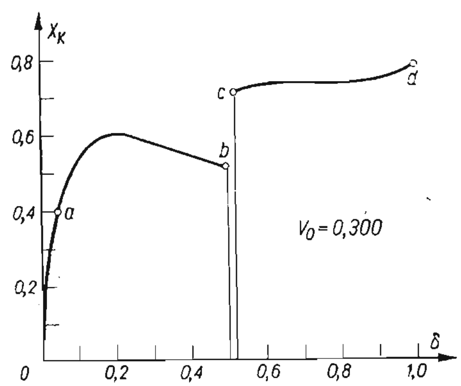
Wyznaczono również zależność kąta odchylenia końca pręta φ_k od stanu pierwotnego, dla rozpatrzonych wcześniej przypadków. Otrzymaną zależność pokazano na rys. 10. Wydaje się, że przyjęcie kryterium optymalności w postaci $\min\limits_{\delta \in U_1} \varphi_k$ daje bardziej syntetyczny obraz form odkształcenia przy różnym sposobie rozkładu masy w przedziałach $[0, s_1]$ oraz $(s_1, s_2]$.



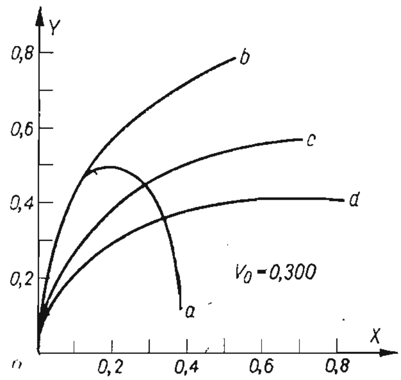
Rys. 4. Zależność odchylenia końca x_k od sposobu rozkładu masy



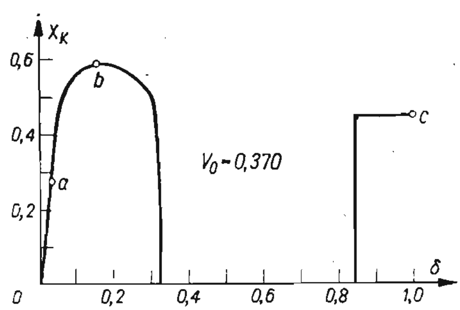
Rys. 5. Linie ugięcia pręta przy oznaczonych na rys. 4 przez a, b, c wartościach parametru δ



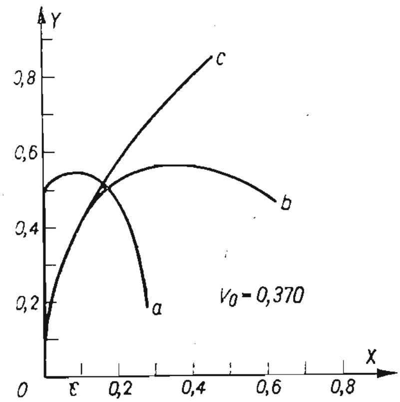
Rys. 6. Zależność odchylenia końca x_k w funkcji δ przy $V_0 = 0,300$



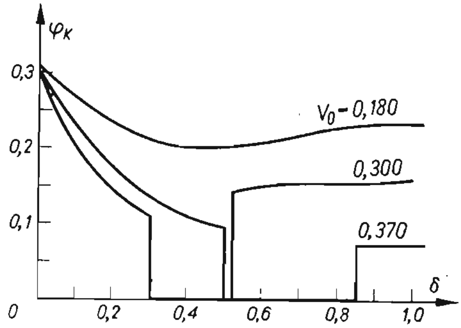
Rys. 7. Linia ugięcia pręta przy oznaczonych na rys. 6 przez a, b, c, d wartościach parametru δ



Rys. 8. Zależność odchylenia końca x_k w funkcji δ przy $V_0 = 0,370$



Rys. 9. Linie ugięcia pręta dla dowolnie wybranych punktów a, b, c z rys. 8



Rys. 10. Zależność kąta odchylenia końca pręta φ_k w funkcji δ dla trzech różnych wartości V_0

3. Wpływ ciężaru własnego

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy optymalne kształtowanie pręta z uwzględnieniem jego ciężaru własnego. Wszystkie poprzednie założenia pozostają w mocy, z tym, że w miejsce kryterium optymalności (1) przyjmiemy minimum kąta odchylenia końca φ_k.

(24) $$\min_{\delta \in U_1} \varphi_k .$$

Funkcjonał (7) przyjmie postać

(25) $$E = \int_0^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + (c_1 + \tilde{c}_2) \cos\varphi \right] ds + \int_0^{s_2} \left[\frac{\delta}{2} (\varphi')^2 + (c_1 + \tilde{c}_3) \cos\varphi \right] ds,$$

gdzie

$$\tilde{c}_2 = \frac{l^3}{\alpha_1} \int_0^{s_1} q_v ds_v ; \qquad c_3 = \frac{l^2}{\alpha_1} \int_0^{s_2} q_v ds_v ,$$

(26) $$q_v = \frac{12\gamma}{Eb^2} \alpha_1 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant s \leqslant s_1 ,$$

$$q_v = \frac{12\gamma}{Eb^2} \alpha_2 \quad \text{dla} \quad s_1 < s \leqslant s_2 ,$$

γ oznacza ciężar właściwy.

Po podstawieniu (26) do (25) otrzymamy z dokładnością do stałego czynnika

(27) $$E = \int_0^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + \left(c_1 + c_2 \int_s^{s_2} ds_v \right) \cos\varphi \right] ds + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\delta}{2} (\varphi')^2 + \right.$$

$$\left. + \left(c_1 + c_3 \int_s^{s_2} ds_v \right) \cos\varphi \right] ds ,$$

gdzie

(28) $$c_2 = \frac{12 l^3}{Eb^2} \gamma ; \qquad c_3 = \delta c_2 .$$

Postępując tak samo jak w części pierwszej otrzymujemy następującą postać równania funkcyjnego Bellmana:

$$(29)\qquad F_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1}\in U_2}\left\{\left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{\varphi_R-\varphi_{R-1}}{\Delta}\right)^2+(c_1+c_2\,\delta\,\Delta\,R)\cos\varphi_R\right]\Delta+f_{R-1}(\varphi_{R-1})\right\},$$

gdy $0 \leqslant R \leqslant N$, lub

$$(30)\qquad F_R(\varphi_R) = \min_{\varphi_{R-1}\in U_2}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_R-\varphi_{R-1}}{\Delta}\right)^2+(c_1+c_2\,R\,\Delta)\cos\varphi_R\right]\Delta+f_{R-1}(\varphi_{R-1})\right\},$$

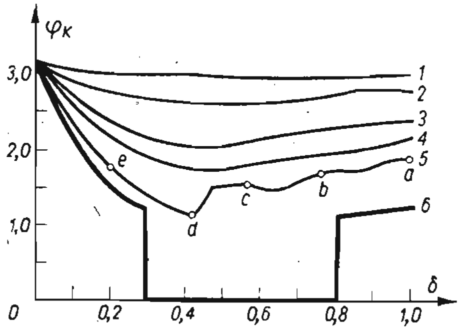
gdy $N+1 \leqslant R \leqslant M$.

Obliczenia prowadzono według schematu przedstawionego w części pierwszej dla parametrów zestawionych w tablicy 2.

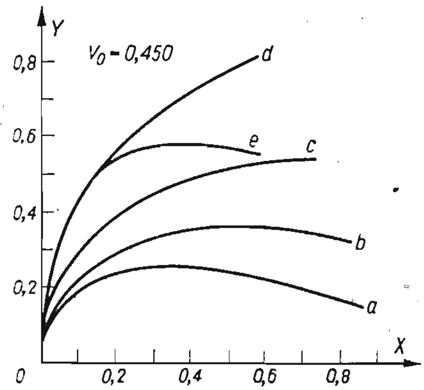
Tablica 2

Lp.	Rysunek	s_1	s_2	V_0	c_2	δ	φ	Δ
1	11, 12	0,5	0,5	0,100	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05
2	11, 12	0,5	0,5	0,180	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05
3	11, 12	0,5	0,5	0,300	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05
4	11, 12	0,5	0,5	0,370	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05
5	11, 12	0,5	0,5	0,450	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05
6	11, 12	0,5	0,5	0,600	65	$0\div1$	$1\div\Pi$	0,05

Rysunek 11 przedstawia zależność kąta odchylenia końca φ_k od δ dla różnych, stałych wartości objętości V_0. Na rys. 12 pokazano linie ugięcia jakie otrzymuje się dla punktów *a*, *b*, *c*, *d*, *e* z rys. 11. Krzywa *a* odpowiada ciągłemu rozkładowi masy ($\delta = 1$). Kolejne krzywe *b*, *c*, *d*, *e* odpowiadają pogrubianiu dolnej części pręta (to jest przedziału $[0, s_1]$).



Rys. 11. Wykres zależności kąta odchylenia końca pręta φ_k w funkcji δ dla 6 różnych wartości V_0, przy uwzględnieniu ciężaru własnego pręta



Rys. 12. Wybrane linie ugięcia dla punktów *a*, *b*, *c*, *d*, *e* z rys. 11

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. М. Почтман, Б. А. Бараненко, *Применение метода динамического программирования к исследованию больших прогибов сжатых стержней*, Прикл. Мех., **5**, 3 (1969), 132—135.
2. Ю. М. Почтман, Б. А. Бараненко, *Динамическое программирование и нелинейные задачи, статики тонких стержней*, ДАН, **182**, 5 (1968), 1029 - 1031.
3. Б. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, *Исследование деформации упругих мембран, стесненных ограничениями, методом динамического программирования*, Прикл. мат. мех., **5** (1969), 933—935.
4. Б. А. Бараненко, Б. К. Журакова, Л. А. Филипов, *Динамическое программирование в двумерных задачах теории упругости*, Прикл. мех., **7**, 11 (1971), 59 - 64.
5. E. Angel, R. Bellman, *Dynamic programming and partial differential equations*, NY 1972.
6. M. Makowski, *Optymalizacja belek na podłożu sprężystym jako problem teorii sterowania*, praca doktorska, Kraków 1972.
7. Ю. М. Почтман, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Совет Физик Доклады, **16**, 1 (1970), 29 - 30.
8. J. Błachut, *Optymalne kształtowanie pręta metodą programowania dynamicznego*, MTiS, 1, **15** (1977).
9. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki, *Metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa 1973.
10. T. Kozłowski, S. Piechnik, Z. Stojek, *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do zagadnień mechaniki budowli*, Warszawa 1967.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается оптимальное распределение массы для двух участков стержня равной длины при заданном объеме. Сечение стержня прямоугольное. Критерием оптимальности является минимум перемещения конца стержня или минимум угла наклона касательной к оси стержня в этой точке. Состояние равновесия для послекритической деформации определено методом динамического программирования из условия минимума потенциальной энергии. Оптимальное распределение массы найдено на основании полученых кривых прогиба.

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF A COMPRESSED ROD WITH LARGE DEFLECTIONS BY MEANS OF DYNAMIC PROGRAMMING

In this paper the method of determining the optimal ratio of the rigidities of two parts of the rod is presented. The rectangular cross-section is discussed. The flat-tapered rod compressed by a constant axial force or by an axial force and own weight at a fixed volume was considered. The aims of this paper are to minimize the displacement of the free end (in the first case) or to minimize the angle of deflection at that point (in the second case). The post-buckling equilibrium state has been found by minimizing the potential energy by means of the dynamic programming, Bellman's functional equation being used. The optimal mass diatribution is obtained by analyzing the deflection lines.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 grudnia 1976 r.