MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 15 (1977)

ZASTOSOWANIE ZASADY GAUSSA W MECHANICE OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

N. Ja. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

Pierwsze zastosowanie zasady Gaussa w mechanice kontinuum znajdujemy w pracy CZETAJEWA [1], poświęconej zagadnieniu ewolucji idealnej gasnącej gwiazdy. Za pomocą tej zasady CZETAJEW otrzymał kryterium, pozwalające z kilku możliwych w okolicy punktu bifurkacji stanów równowagi wybrać taki stan, który odpowiada rzeczywistej ewolucji ciała ciekłego.

Ewolucja gasnącej gwiazdy polega na kolejnym przechodzeniu z jednej statecznej konfiguracji do drugiej. CZETAJEW ujął to zagadnienie w taki sposób: należy wyznaczyć ciąg statecznych konfiguracji dla stanów równowagi jednorodnego ciała ciekłego, obracającego się wokół osi przechodzącej przez środek ciężkości i kurczącego się ze stałą prędkością w kierunku radialnym pod wpływem wzajemnego przyciągania cząstek cieczy.

Taki ciąg statecznych konfiguracji CZETAJEW otrzymał za pomocą twierdzenia Lagrange'a o stateczności w przypadku istnienia funkcji U.

Stan równowagi dla wartości parametrów zaburzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełniających układ równań

$$\frac{\partial U}{\partial A_i} = 0 \tag{1}$$

jest stateczny, jeżeli tym wartościom parametrów odpowiada $\max U$. Wartości parametrów i funkcji U są zmienne w czasie, zatem konfiguracje stateczne tworzą zbiór ciągły.

Traktując czas t i parametry A_i określające konfigurację stanu równowagi, jako współrzędne w przestrzeni $n+1$-wymiarowej, możemy odwzorować w tej przestrzeni ciąg statecznych stanów równowagi w postaci krzywej przecięcia powierzchni (1). W ogólnym przypadku krzywa ta dzieli się na kilka gałęzi, które mogą również przecinać się. Każdemu ciągowi stanów równowagi odpowiada określona gałąź (C). Jeżeli punkt M gałęzi (C) należy jednocześnie do innej gałęzi, nazywamy go punktem bifurkacji. CZETAJEW pokazał, że zasada Gaussa pozwala wybrać w punkcie bifurkacji gałąź stanów równowagi odpowiadającą dalszej ewolucji układu.

W rzeczywistym ruchu ciała ciekłego moment pędu względem osi obrotu pozostaje stały. Jeżeli oś z jest osią obrotu, to warunek ten można zapisać w postaci

$$\omega \int (x^2+y^2)\,dm = C, \tag{2}$$

gdzie ω oznacza prędkość obrotu. W przypadku kurczenia się ciała warunek (2) wymaga wzrostu ω, a tym samym i wzrostu siły odśrodkowej. Relację (2) można traktować jako równanie więzów. Ruchem swobodnym w danym zagadnieniu jest ruch bez ograniczenia (2), czyli ruch ze stałą prędkością obrotu. Tak więc, w ruchu swobodnym nie uwzględniamy siły powodującej promieniowe kurczenie się ciała. Odchylenie ruchu rzeczywistego od swobodnego dla cząstki masy dm ma następujące współrzędne (pomijamy wielkości infinitezymalne trzeciego rzędu):

$$x\omega\delta\omega\, dt^2, \quad y\omega\delta\omega\, dt^2, \quad 0.$$

Wymuszenie dla całego ciała wynosi

$$Z = dt^4\omega^2(\delta\omega)^2 \int (x^2+y^2)dm.$$

Z warunku minimum wymuszenia wynika, że rzeczywistej zmianie konfiguracji stanu równowagi odpowiada minimalny przyrost prędkości obrotowej $\delta\omega$. Ponieważ z warunku (2) mamy

$$\delta\omega = -C\frac{\delta\int (x^2+y^2)dm}{[\int (x^2+y^2)dm]^2},$$

to moduł przyrostu momentu bezwładności ciała względem osi obrotu

$$\left|\delta\int (x^2+y^2)dm\right|$$

również osiąga minimum. W takim razie rzeczywistą gałąź ewolucji w punkcie bifurkacji określa maksimum momentu $\int (x^2+y^2)dm$.

1. Prace Tamuża

W pracy TAMUŻA [2] zasada minimum wymuszenia została przeniesiona na ciało sztywno-plastyczne bez wzmocnienia. Autor rozważa ciało sztywno-plastyczne, którego objętość V ogranicza odcinkowo gładka powierzchnia S. Na części tej powierzchni S_T dane są siły powierzchniowe T_i, a na pozostałej części S_v — prędkości v_i. W określonej chwili czasu $t = t_0$ znane są prędkości $v_i^*(x, y, z, t)$ w obszarze V, czyli znane są również prędkości odkształceń

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}v_{i,j}^*+v_{j,i}^*).$$

Prędkościami dopuszczalnymi są takie v_i, które spełniają warunki kinematyczne na S_v, warunek nieściśliwości w V i postulat ciągłości ciała. W chwili $t = t_0$ dopuszczalne prędkości są jednocześnie rzeczywistymi:

$$v_i(x, y, z, t)_{t=t_0} = v_i^*(x, y, z, t_0).$$

Dopuszczalne prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_{ij}$ i kinematycznie dopuszczalne naprężenia σ_{ij} spełniają prawo płynięcia dla danej funkcji $f(\sigma_{ij})$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}.$$

Dopuszczalne przyśpieszenia w_i i dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ definiowane są następująco:

$$w_i = \frac{\partial v_i(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad \ddot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(w_{ij}+w_{ji}).$$

W dalszej części pracy analizowane są ograniczenia na $\ddot{\varepsilon}_{ij}$, wynikające z prawa płynięcia dla różnych przypadków powierzchni płynięcia [3].

Jeżeli powierzchnia

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

jest gładka i wypukła, to prawo płynięcia ma postać

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \begin{cases} \lambda = 0, \text{ jeżeli } f < 0, \\ \lambda \geqslant 0, \text{ jeżeli } f = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Różniczkując po czasie, otrzymujemy:

$$\ddot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right) \begin{cases} \dot{\lambda} = 0, & \lambda = 0, & \text{jeżeli } f < 0, \\ \dot{\lambda} \geqslant 0, & & \text{jeżeli } f = 0,\ \lambda = 0, \\ \dot{\lambda} & \text{dowolne,} & \text{jeżeli } \lambda > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

W dalszym przypadku dla $\lambda = 0$ mamy

$$\ddot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

czyli dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń spełniają prawo płynięcia. W trzecim przypadku brak ograniczeń na $\ddot{\varepsilon}_{ij}$.

Uogólnione prawo płynięcia dla odcinkowo-liniowej powierzchni płynięcia $f_k = a_{ijk} \cdot \sigma_{ij}$ ma postać

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda_k a_{ijk} \begin{cases} \lambda_k = 0 \ , \text{ jeżeli } \ f_k < 0, \\ \lambda_k \geqslant 0 \ , \text{ jeżeli } \ f_k = 0. \end{cases}$$

Różniczkując względem czasu, otrzymujemy

$$\ddot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_k a_{ijk} \begin{cases} \dot{\lambda}_k = 0 \ , \text{ jeżeli } f_k < 0, \\ \dot{\lambda}_k \geqslant 0 \ , \text{ jeżeli } f_k = 0,\ \lambda_k = 0, \\ \dot{\lambda}_k \text{ — dowolne, jeżeli } \lambda_k > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Tak więc dla $\lambda_k = 0$ przyśpieszenie odkształcenia $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ spełnia uogólnione prawo płynięcia. W przypadku $\lambda_r \neq 0$, $\lambda_k = 0$, $f_k < 0 (k \neq r)$, przyśpieszenie $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ jest prostopadłe do powierzchni $f_r = a_{ijr} \cdot \sigma_{ij}$, lecz może mieć zwrot w kierunku wnętrza obszaru wypukłego. Jeżeli stan naprężeń odpowiada wierzchołkowi powierzchni płynięcia, to nie ma żadnych ograniczeń na $\ddot{\varepsilon}_{ij}$. Zasada minimum wymuszenia ma w tym przypadku taką postać: funkcjonał wymuszenia

$$I = \int_{(V)} \frac{m\ddot{w}_i^2}{2} dV - \int_{(V)} P_i \ddot{w}_i dV - \int_{(S_T)} T_i \ddot{w}_i dS + \int_{(V)} \sigma_{ij} \ddot{\varepsilon}_{ij} dV,$$

gdzie P_i są siłami masowymi, a m gęstością materiału, osiąga minimum dla rzeczywistych $\ddot{w}_i^*$, $\ddot{\varepsilon}_{ij}^*$, σ_{ij}^* w klasie wartości kinematycznie dopuszczalnych $\ddot{w}_i$, $\ddot{\varepsilon}_{ij}$, σ_{ij}.

Dowód tego twierdzenia oparty jest na analizie różnicy wartości funkcjonału $I^* - I$ dla pól rzeczywistych i dopuszczalnych. Wykorzystując fakt, że rzeczywiste przyśpieszenia $\ddot{w}_i^*$ i naprężenia σ_{ij}^* spełniają równania ruchu

$$\sigma_{ij,j}^* + P_i - m\ddot{w}_i^* = 0,$$

a σ_{ij}^* dodatkowo — statyczne warunki brzegowe

$$\sigma_{ij}^* n_j = T_i,$$

można wyrażenie I^*-I sprowadzić do postaci

$$I^*-I = -\int_{(V)} \frac{m(w_i^*-w_i)^2}{2} dV + \int_{(V)} \ddot{\varepsilon}_{ij}(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij}) dV.$$

Na podstawie warunków (1.2), (1.3), które spełniają dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń dla różnych powierzchni płynięcia, można wykazać, że wyrażenie

$$\ddot{\varepsilon}_{ij}(\sigma_{ij}^* - {}_{ij})$$

nie jest dodatnie. W takim razie $I^*-I < 0$, czyli $I^* < I$. Następnie udowodniono jednoznaczność pola przyśpieszeń w dowolnej chwili czasu.

W pracy Tamuża zawarte jest również ważne z punktu widzenia zastosowań praktycznych uogólnienie zasady minimum wymuszenia dla pól przyśpieszeń mających nieciągłości na powierzchniach, dzielących ciało na skończoną liczbę podobszarów o ciągłych przyśpieszeniach.

2. Prace Reitmana

Zasada Gaussa została uogólniona dla szerokiej klasy ciał odkształcalnych w dwóch publikacjach Reitmana [4, 5]. Funkcjonał wymuszenia dla dowolnego ciała odkształcalnego przyjęto w postaci

$$I = \int_{(V)} \frac{\varrho(\ddot{u}_j)^2}{2} dV - \int_{(V)} P_j \ddot{u}_j dV - \int_{(S_T)} T_j \ddot{u}_j dS + \int_{(V)} \sigma_{jk} \ddot{\varepsilon}_{jk} dV, \tag{2.1}$$

którą można otrzymać biorąc za punkt wyjścia wzór na wymuszenie dla układu punktów materialnych

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2.$$

Ponieważ siły i masy nie podlegają wariacji, prawą stronę tego wzoru można zapisać, jako

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2} - X_i \ddot{x}_i\right).$$

W przypadku ciała stałego, zamiast poszczególnych mas skupionych, mamy elementy objętości dV. Zatem sumę $\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \ddot{x}_i^2$ zamieniamy na całkę

$$\int \frac{\varrho \ddot{u}_j^2}{2} dV,$$

w której występują gęstość ϱ i składowe $\ddot{u}_j$ przyśpieszeń.

Sumowanie

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \ddot{x}_i$$

jest równoważne trzem pozostałym członom całkowym we wzorze (2.1). Jak wiadomo, siły związane z dowolnym ciałem odkształcalnym można podzielić na zewnętrzne i wewnętrzne. Z kolei siły zewnętrzne dzielimy na masowe P_j i powierzchniowe T_j. Odpowiadają im druga i trzecia całka w wyrażeniu (2.1). Natomiast trzecia całka związana jest ze stanem sił wewnętrznych, czyli naprężeń. Zamiast składowych przyśpieszeń przemieszczeń występują w niej przyśpieszenia odkształceń $\ddot{\varepsilon}_{jk}$. Kinematycznie dopuszczalne przyśpieszenia odkształceń związane są równaniami

(2.2) $$\ddot{\varepsilon}_{jk} = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{jk}+\ddot{u}_{kj})$$

z przyśpieszeniami przemieszczeń, a rzeczywiste przyśpieszenia spełniają równania ruchu

$$\sigma_{jk,k}+P_j-\varrho\ddot{u}_j = 0.$$

Różnica wartości funkcjonału I dla ruchu rzeczywistego i kinematycznie dopuszczalnego może być zapisana w postaci

$$I-I^* = -\int_{(V)} \frac{\varrho(\ddot{u}_j-\ddot{u}_j^*)^2}{2} dV+\int_{(V)} \ddot{\varepsilon}_{jk}(\sigma_{jk}-\sigma_{jk}^*)dV.$$

Z tego wzoru REITMAN otrzymał warunek dostateczny na minimum funkcjonału wymuszenia. Warunek ten żąda identyczności naprężeń odpowiadających ruchowi rzeczywistemu i dopuszczalnemu w rozważanej chwili czasu:

(2.3) $$\sigma_{jk} = \sigma_{jk}^*.$$

Warunek ten jest spełniony w ciałach sprężystym i sprężysto-plastycznym opisanym w ramach teorii deformacyjnej, jeżeli w danej chwili czasu określone są odkształcenia. Natomiast dla ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, opisanego w ramach teorii plynięcia, wystarczy ustalić prędkości odkształceń związane z naprężeniami przez prawo plynięcia. W przypadku ośrodka lepkiego, w którym do jednoznacznego określenia naprężeń potrzebne są odkształcenia i prędkości odkształceń, należy założyć wartości prędkości odkształceń.

Reitman stosuje zasadę minimum wymuszenia do zagadnienia proporcjonalnego obciążenia ciała sztywno-plastycznego, które jest ważne z praktycznego punktu widzenia. Ciało zachowuje przy tym swój kształt, czyli spełnia warunek

(2.4) $$u_j = f(t)\eta_j,$$

gdzie η_j nie zależy od t.

Podstawienie wzoru (2.4) do (2.1) z uwzględnieniem (2.2) prowadzi do warunku

(2.5) $$(K+N-Z)^2/M = \max.$$

Wprowadzono w nim takie oznaczenia:

$$M = \int\limits_{(V)} \varrho\eta_j^2 dV, \quad Z = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)} \sigma_{jk}(\eta_{jk}+\eta_{kj})dV,$$

$$K = \int\limits_{(S_T)} T_j\eta_j dS, \quad N = \int\limits_{(V)} P_j\eta_j dV.$$

W przypadku $P_j = 0$ warunek (2.5) redukuje się do postaci

$$(K-Z)^2/M = \max,$$

która wyraża warunek Rżanicyna dla sztywno-plastycznych belek i płyt [6], otrzymany z zasady minimum Lagrange'a.

Zasadę Gaussa zastosował Reitman również dla zagadnień powłok sztywno-plastycznych. Wymuszenie sił wewnętrznych

$$\int\limits_{(V)} \sigma_{jk}\ddot{\varepsilon}_{jk}dV$$

w przypadku takich powłok ma postać

$$\sigma_i \int\limits_{(V)} \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{p_{\ddot{\varepsilon}} - q_z p_{\ddot{\varepsilon}\ddot{\varkappa}} + Z^2 p_{\ddot{\varkappa}}},$$

gdzie σ_i oznacza intensywność naprężenia, a $p_{\ddot{\varepsilon}}$, $p_{\ddot{\varepsilon}\ddot{\varkappa}}$, p są kwadratowymi wielomianami Iliuszyna, w których występują przyśpieszenia odkształceń.

Dla przypadku czaszy kulistej z materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia Reitman otrzymał wzory obliczeniowe, stosując minimalizację funkcjonału wymuszenia.

3. Zastosowanie zasady minimum wymuszenia w teorii filtracji

W pracy Kilczewskiego i Szepelewskiej [7] pokazano, że zasada Gaussa w postaci zmodyfikowanej wynika z równania ruchu

$$\frac{\varrho}{\sigma}\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{\gamma}{k}\bar{v} - \operatorname{grad} p - \bar{k}\gamma \tag{3.1}$$

dla przepływu filtracyjnego cieczy. We wzorze tym $\gamma = \varrho g$ oznacza ciężar właściwy, $\bar{v}$ — prędkość cząstki cieczy, p — ciśnienie hydrodynamiczne, $\bar{k}$ — wektor jednostkowy w kierunku pionowej osi z, k — współczynnik filtracji, σ — porowatość ośrodka filtrującego.

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa a ośrodek filtrujący — nieodkształcalny, to

$$\operatorname{div}(\delta\bar{u}) = 0, \tag{3.2}$$

gdzie $\delta\bar{u}$ oznacza wektor wirtualnych przemieszczeń cząstek cieczy. Z twierdzenia Ostrogradskiego warunek ten można przepisać w postaci globalnej

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\delta\bar{u})dV = \iint\limits_{(S)} \bar{n}\delta\bar{u}dS = 0. \tag{3.3}$$

Warunki (3.2) i (3.3) są równaniami więzów. Siły $\frac{\gamma}{k}\bar{v}\Delta V$ działające na element objętości ΔV traktowane są jako aktywne, a siły $\operatorname{grad} p \cdot \Delta V$ — jako reakcje więzów.

Następnie wprowadza się pojęcia więzów idealnych. Więzy zdefiniowane warunkami (3.2) i (3.3) są idealne, jeżeli wirtualna praca reakcji tych więzów jest nieujemna:

$$\delta A = -\iiint\limits_{(V)} \delta\bar{u} \operatorname{grad} p dV \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Na podstawie relacji (3.2) i (3.3) możemy napisać

$$\delta A = -\iint\limits_{(S)} p\bar{n}\delta\bar{u} dS. \tag{3.5}$$

Założono, że powierzchnia ograniczająca przepływ filtracyjny składa się z części powierzchni warstwy wodoszczelnej, sztywnych ścian, powierzchni depresji, odcinków wycieku oraz z przepuszczających ciecz granic basenów wodnych. Jeżeli ciecz przepływa z basenu A o głębokości H_1 do basenu B o głębokości H_2 i warstwa wodoszczelna jest pozioma, to warunek idealności więzów (3.4) jest spełniony, gdy

$$\iint\limits_{(S_A)} (H_1 - z)\cdot|\delta u_n|\cdot dS_A \geqslant \iint\limits_{(S_B)} (H_2 - z)\cdot|\delta u_n|\cdot dS_B. \tag{3.6}$$

W ten sposób więzy idealne muszą spełniać warunki (3.3), (3.2) i (3.6).

Wymuszenie

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i^2}{m_i},$$

gdzie $\bar{R}_i$ oznacza reakcje więzów idealnych, dla przypadku cieczy filtrującej ma postać

$$Z = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{\varrho\Delta V_i}{\sigma}}(\operatorname{grad} p_i\cdot\Delta V_i)^2,$$

lub

$$Z = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}\iiint\limits_{(V)} (\operatorname{grad} p)^2 \mathrm{d}V. \tag{3.7}$$

Wykorzystując równanie ruchu (3.1) można zapisać wymuszenie w postaci

$$Z = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varrho}\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\varrho}{\sigma}\frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\gamma}{k}\bar{v} + \bar{k}\gamma\right)^2 dV \tag{3.8}$$

lub pomijając siły bezwładnościowe i stały mnożnik zredukować do wzoru następującego:

$$Z = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + k)^2] dV, \tag{3.9}$$

gdzie v_x, v_y, v_z oznaczają składowe wektora prędkości $\bar{v}$ w układzie współrzędnych, którego punkt początkowy usytuowany jest na warstwie wodoszczelnej.

Następnie wykazano nieujemność wariacji wymuszenia:

$$\delta Z = \iiint\limits_{(V)} [v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + (v_z + k)\delta v_z] dV \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Wynika to z tego, że warunek (3.4) można zapisać w postaci

$$\iiint\limits_{(V)} [v_x \delta w_x + v_y \delta w_y + (v_z + k)\delta w_z] dV \geqslant 0, \tag{3.11}$$

zakładając

$$\delta \overline{u} = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \delta \overline{w},$$

gdzie $\delta \overline{w}$ oznacza wariację przyśpieszenia, i pomijając siły bezwładnościowe. Przy tym wariacje δw_x, δw_y, δw_z spełniają warunki więzów (3.2), (3.3) i (3.6).

Zamieniając wariacje przyśpieszeń we wzorze (3.11) na wariacje prędkości spełniające identyczne warunki, otrzymano warunek (3.10). Wyraża on zmodyfikowaną zasadę Gaussa: wartość wymuszenia (3.9) dla pola rzeczywistych prędkości cieczy filtrującej jest mniejsza od wartości wymuszenia otrzymanej dla dowolnego pola prędkości spełniającego warunki (3.2), (3.3), (3.6). Stąd na podstawie wzoru (3.7) wypływa wniosek, że całka

$$\iiint\limits_{(V)} (\mathrm{grad}\, p)^2 dV$$

osiąga dla przepływu rzeczywistego wartość minimalną.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. Четаев, *Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести*, Известия физико-математического общества при Казанском Университете, **1**, 3, Казань 1926.
2. В. П. Тамуж, *Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела*, П.М.М., **24**, 4 (1962).
3. В. Прагер, *Проблемы теории пластичности*, Москва 1958, 25—27, 47—49.
4. М. И. Рейтман, *Об одном методе решения задач динамики твердого тела и его приложении к неупругим оболочкам*, Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1964.
5. М. И. Рейтман, *Общий вариационный принцип в механике сплошной среды и его применение*, Строительная механика и расчет сооружений, Москва 1965, 9—12.
6. А. Р. Ржаницын, *Экстремальное свойство формы движения жестко-пластической системы, нагруженной за пределом несущей способности*, Известия АН СССР, Отделение технических наук, Механика и Машиностроение, 2 (1959).
7. Н. А. Кильчевский, Н. Н. Шепелевская, *Принцип наименьшего принуждения и некоторые его приложения в теории фильтрации*, Научные доклады высшей школы, Раздел „Строительство", 4, (1958).

POLITECHNIKA W WOŁGOGRADZIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 sierpnia 1975 r.