

TECHNICZNA TEORIA GRUBYCH TARCZ ORTOTROPOWYCH

JERZY KUJAWSKI (BIAŁYSTOK)

Analizę stanu naprężenia w tarczach grubych należy przeprowadzać za pomocą teorii uwzględniającej pełne tensory stanów naprężenia i odkształcenia.

Uściśloną teorię tarcz izotropowych opracował KĄCZKOWSKI [1]. Zgodnie z tą teorią stany naprężenia i odkształcenia w tarczy grubej można określić za pomocą funkcji naprężenia, analogicznej do funkcji Airy'ego oraz funkcji w przemieszczenia powierzchni zewnętrznych tarczy w kierunku do nich prostopadłym.

Materiały konstrukcyjne o silnej anizotropii charakteryzującej się tym, że między współczynnikami sprężystości zachodzą następujące zależności $A_{33} \ll A_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) i $A_{33} \ll A_{ll}$ ($l = 4, 5$) wykazują dużą podatność na poprzeczne odkształcenia [2, 3]. Fakt ten wymaga stosowania teorii uściślonych nawet w przypadku cienkich tarcz o odpowiednio dużej podatności na poprzeczne odkształcenia.

Klasyczna teoria tarcz może prowadzić również do dużych błędów w przypadku analizy naprężeń w pobliżu otworów, których średnica jest nieduża w porównaniu z grubością tarczy.

Z powyższych względów w pracy niniejszej przedstawimy techniczną teorię grubych tarcz ortotropowych.

Praca stanowi uogólnienie kinematycznej metody uściślonego obliczania grubych tarcz o ortotropii cylindrycznej [3].

1. Równania podstawowe

1.1. Podstawowe związki teorii sprężystości. Rozpatrzmy w ramach liniowej teorii sprężystości tarczę wykonaną z materiału jednorodnego, ortotropowego i idealnie liniowo sprężystego. Przyjmujemy, że osie x_α ($\alpha = 1, 2$) kartezjańskiego układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie środkowej tarczy, a płaszczyzny ograniczające tarczę mają równania $x_3 = \pm h$, gdzie $2h$ jest grubością tarczy.

W celu skrócenia zapisu formuł zastosowano zapis wskaźnikowy i częściowo konwencję sumacyjną. Wskaźniki oznaczone małymi literami łańcuskimi i, j , przyjmują wartości 1, 2, 3. Wskaźniki oznaczone literami greckimi α, β przyjmują wartości 1, 2.

W obszarze tarczy muszą być spełnione podstawowe związki teorii sprężystości, to jest związki Cauchy'ego

$$(1.1) \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{23} &= 2A_{44} \varepsilon_{23}, \\ \sigma_{31} &= 2A_{55} \varepsilon_{31}, \\ \sigma_{12} &= 2A_{66} \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

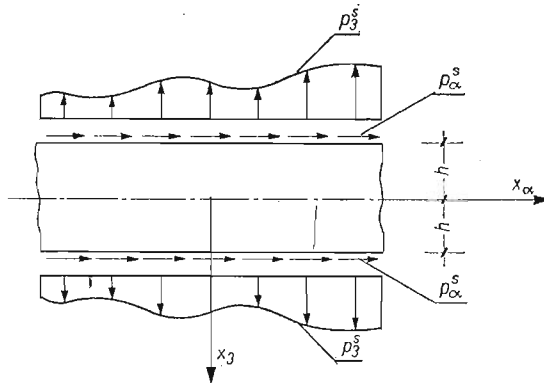
oraz równania równowagi

$$(1.3) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) oraz A_{nn} ($n = 4, 5, 6$) są współczynnikami sprężystości materiału.

Warunki brzegowe na powierzchniach granicznych $x_3 = \pm h$ mają postać

$$(1.4) \quad \sigma_{\alpha 3} = \pm p_\alpha^S, \quad \sigma_{33} = p_3^S.$$



Rys. 1

Ponadto obciążenie tarczy stanowią siły masowe X_α . Siły powierzchniowe działające na tarczę są dowolnie zmiennymi funkcjami x_α .

1.2. Pola przemieszczeń i naprężeń. Pole przemieszczenia w tarczy przyjmujemy w postaci

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0 + u_\alpha^1(1 - 3\zeta^2), & u_3 &= [u_3^0 + u_3^1(1 - \zeta^2)]\zeta, \\ \zeta &= x_3/h, \end{aligned}$$

u_i^k ($k = 0, 1$) są nieznanymi funkcjami zmiennych x_α .

Z warunków brzegowych (1.4) otrzymujemy

$$(1.6) \quad \begin{aligned} u_\alpha^1 &= \frac{h}{6} \left(u_{3,\alpha}^0 - \frac{p_\alpha^S}{G\tau_\alpha} \right), \\ u_3^1 &= \frac{1}{2} u_3^0 - \frac{h^2}{6} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} \left(u_{3,\alpha}^0 - \frac{p_\alpha^S}{G\tau_\alpha} \right)_{,\alpha} + \frac{h}{2} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} u_{\alpha,\alpha}^0 - \frac{h}{2A_{33}} p_3^S, \end{aligned}$$

gdzie $\tau_1 = A_{55}/G$, $\tau_2 = A_{44}/G$, G jest dowolnie przyjętym porównawczym modułem sprężystości poprzecznej np. A_{66} .

Ze względu na przyjęte pole przemieszczenia, pole naprężenia przedstawimy w postaci

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^1(1-3\zeta^2), \\ \sigma_{12} &= A_{66}[\varepsilon_{12}^0 + \varepsilon_{12}^1(1-3\zeta^2)], \\ \sigma_{\alpha 3} &= p_\alpha^S \zeta + G\tau_\alpha u_{3,\alpha}^1(1-\zeta^2)\zeta, \end{aligned}$$

gdzie składowe stanu naprężenia σ_φ ($\varphi = 11, 22, 33$) są określone przez wzory (1.2).

Siły wewnętrzne odniesione do płaszczyzny środkowej tarczy zdefiniowane są następująco:

$$(1.8) \quad N_{\alpha\beta} = h \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta} d\zeta, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

stąd po podstawieniu (1.7) i wykorzystaniu faktu, że $h \int_{-1}^1 (1-3\zeta^2) d\zeta = 0$, otrzymujemy

$$(1.9) \quad \begin{aligned} N_{11} &= 2hA_{11}\varepsilon_{11}^0, \\ N_{22} &= 2hA_{22}\varepsilon_{22}^0, \\ N_{12} &= 2hA_{66}\varepsilon_{12}^0. \end{aligned}$$

1.3. Układ równań różniczkowych. Ze względu na założone pole przemieszczeń (1.5) równania równowagi zostaną spełnione w sensie całkowym w następującej postaci [3]:

$$(1.10) \quad 2h \int_0^1 (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha 3,3} + X_\alpha) d\zeta = 0, \quad h \int_0^1 (\sigma_{\alpha 3,\alpha} + \sigma_{33,3}) d\zeta = 0.$$

Na podstawie (1.7) i (1.10) dochodzimy do układu równań różniczkowych:

$$(1.11) \quad L_{ij}u_j^0 = f_i,$$

gdzie

$$(1.12) \quad \begin{aligned} L_{11} &= 2h(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2), & L_{12} &= L_{21} = 2h(A_{12} + A_{66})\partial_1^2, \\ L_{22} &= 2h(A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2), & L_{\alpha 3} &= 2A_{\alpha 3}\partial_\alpha, \\ f_\alpha &= -2(p_\alpha^S + hX_\alpha), \\ L_{3\alpha} &= \frac{h^2}{8} \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} G\partial_\alpha(\nabla_\tau^2) - \frac{3}{2} A_{3\alpha}\partial_\alpha, \\ L_{33} &= -\frac{h}{24} G \left[\frac{h^2}{A_{33}} (A_{31}\partial_1^2 + A_{32}\partial_2^2) - 3 \right] \nabla_\tau^2 - \frac{3}{2} \frac{A_{33}}{h}, \\ f_3 &= -\frac{3}{2} p_3^S + \frac{h^2}{8} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 p_3^S - \frac{h}{2} \partial_\alpha p_\alpha^S - \\ &\quad - \frac{h^2}{24} \frac{1}{A_{33}} \nabla_\tau^2 \left(\frac{A_{31}}{\tau_1} \partial_1 p_1^S + \frac{A_{32}}{\tau_2} \partial_2 p_2^S \right), \\ \nabla_\tau^2 &= \tau_1 \partial_1^2 + \tau_2 \partial_2^2. \end{aligned}$$

Równania (1.11) są uwikłanym układem różniczkowych równań cząstkowych łącznie ósmego rzędu.

Układ równań można rozwickłać wprowadzając funkcje przemieszczeń spełniające następujące niejednorodne równania różniczkowe:

$$(1.14) \quad \det[L_{ij}] \Phi_j = f_i.$$

Poszukiwane przemieszczenia wyznaczamy z zależności

$$(1.15) \quad u_1^0 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \Phi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \Phi_3 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad u_2^0 = \begin{bmatrix} L_{11} & \Phi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \Phi_2 & L_{33} \\ L_{31} & \Phi_3 & L_{33} \end{bmatrix}, \quad u_3^0 = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \Phi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \Phi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \Phi_3 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie (1.12) i (1.14) otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$(1.16) \quad A_{33} \left[\frac{h^2}{36} \frac{G}{A_{33}} \left(h^2 \frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} \partial_\alpha^2 - 3 \right) \nabla_\tau^2 + 1 \right] L_1 \Phi_i + \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) L_2 \Phi_i = -\frac{1}{6h} f_i,$$

gdzie

$$L_1 = A_{11} A_{66} \partial_1^4 + [A_{11} A_{22} - A_{12} (A_{12} + 2A_{66})] \partial_1^2 \partial_2^2 + A_{22} A_{66} \partial_2^4,$$

$$L_2 = A_{13}^2 A_{66} \partial_1^4 + [A_{11} A_{23}^2 + A_{22} A_{13}^2 - 2A_{13} A_{23} (A_{12} + A_{66})] \partial_1^2 \partial_2^2 + A_{23}^2 A_{66} \partial_2^4.$$

W tarczach o średniej grubości i cieńszych, w których stosunek grubości do mniejszego boku $2h/a \leq 1/5$, układ równań można uprościć.

Jeśli $\frac{A_{3\alpha}}{A_{33}} < 5$ to człon równania różniczkowego zawierający $h^4/36$ jest wielkością

małą w stosunku do pozostałych, gdyż $\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{1}{100}$.

Po jego pominięciu otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$(1.17) \quad \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) (L_2 - A_{33} L_1) \Phi_i = -\frac{1}{6h} f_i.$$

Gdy siły powierzchniowe i masowe są równe zeru, funkcję rozwikłującą Φ wyznaczamy z następującego równania różniczkowego jednorodnego szóstego rzędu:

$$(1.18) \quad \left(\frac{h^2}{12} \frac{G}{A_{33}} \nabla_\tau^2 - 1 \right) (L_2 - A_{33} L_1) \Phi = 0.$$

Równanie to można zastąpić układem dwu równań

$$(1.19) \quad \left(A_{55} \partial_1^2 + A_{44} \partial_2^2 - \frac{12}{h^2} A_{33} \right) \Phi' = 0, \\ (A \partial_1^4 + 2B \partial_1^2 \partial_2^2 + C \partial_2^4) \Phi'' = 0,$$

gdzie

$$A = (A_{13}^2 - A_{11} A_{33}) A_{66},$$

$$2B = A_{11} A_{23}^2 + A_{22} A_{13}^2 - 2A_{13} A_{23} (A_{12} + A_{66}) - A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{33} (A_{12} + 2A_{66}),$$

$$C = (A_{23}^2 - A_{22} A_{33}) A_{66},$$

$$\Phi = \Phi' + \Phi''.$$

Dla tarczy izotropowej układ równań (1.19) przyjmuje postać

$$(1.20) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{24}{h^2} \right) \Phi' = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi' = 0,$$

gdzie $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Podobne równania otrzymał na innej drodze KĄCZKOWSKI (por. [1] s. 873), z tym, że zamiast współczynnika $\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{24}{h^2}$ znajduje się nieco większy współczynnik $\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{30}{h^2}$.

Poszukiwane przemieszczenia po pominięciu sił masowych i powierzchniowych wyznaczamy z zależności

$$(1.21) \quad \begin{aligned} u_1^0 &= (L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22})\Phi, \\ u_2^0 &= -(L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})\Phi, \\ u_3^0 &= (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})\Phi. \end{aligned}$$

Na podstawie (1.12) i (1.21) mamy

$$(1.22) \quad \begin{aligned} u_1^0 &= 4h\partial_1 [A_{23}(A_{12} + A_{66})\partial_2^2 - A_{13}(A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2)]\Phi, \\ u_2^0 &= -4h\partial_2 [A_{23}(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2) - A_{13}(A_{12} + A_{66})\partial_1^2]\Phi, \\ u_3^0 &= 4h^2 \{A_{11}A_{66}\partial_1^4 + [A_{11}A_{22} - A_{12}(A_{12} + 2A_{66})]\partial_1^2\partial_2^2 + A_{22}A_{66}\partial_2^4\}\Phi. \end{aligned}$$

1.4. Warunki brzegowe. W warunkach brzegowych na poboczniczy walca ograniczającej tarczę mogą występować w różnych kombinacjach trzy wielkości geometryczne

$$(1.23) \quad u_n, u_s, u_3$$

i trzy statyczne

$$(1.24) \quad \sigma_n, \sigma_{ns}, \sigma_{n3}.$$

Indeksami n i s oznaczono wielkości statyczne i geometryczne w kierunku normalnej i stycznej do brzegu tarczy.

Zarówno warunki geometryczne, jak i statyczne możemy spełnić jedynie w sposób całkowity.

Z uwagi na założone pole przemieszczeń otrzymaliśmy układ równań różniczkowych łącznie ósmego rzędu. Pozwala to spełnić po cztery warunki brzegowe na poboczniczy tarczy.

Możemy zatem dokładniej spełnić te warunki brzegowe, które mają najbardziej istotny wpływ na stany naprężenia i przemieszczenia w tarczy.

Przyjmujemy więc cztery wielkości geometryczne

$$(1.25) \quad u_n^0, u_n^1, u_s^0, u_3^0,$$

i cztery statyczne

$$(1.26) \quad \sigma_n^0, \sigma_n^1, \sigma_{ns}^0, \sigma_{n3}.$$

Gdy korzystamy z uproszczonego równania (1.17), spełniamy po trzy spośród wymienionych wyżej warunków brzegowych.

2. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono techniczną teorię grubych tarcz ortotropowych, obciążonych w sposób możliwie ogólny.

Teoria ta pozwala na spełnienie wszystkich związków liniowej teorii sprężystości dla ortotropowego ciała trójwymiarowego z wyjątkiem równań równowagi, które są spełnione w sensie całkowym.

W rezultacie otrzymano uwikłany układ trzech równań różniczkowych cząstkowych łącznie ósmego rzędu do wyznaczenia trzech wielkości geometrycznych — uśrednionych po grubości tarczy, przemieszczeń u_α^0 ($\alpha = 1, 2$) oraz przemieszczenia u_3^0 powierzchni zewnętrznych tarczy, w kierunku do nich prostopadłym.

Układ równań rozwikłano, wprowadzając funkcje przemieszczeń Φ_j ($j = 1, 2, 3$), metodą wyznacznikową dla układów różniczkowych równań liniowych.

Ilustracja omówionej teorii prostymi przykładami jest przedstawiona w pracach [3, 4].

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, *Theory of thick plates*, Arch. Mech. Stos., 6, 23, (1971).
2. Ю. М. ТАРНОПОЛЬСКИЙ, А. В. РОЗЕ, *Особенности расчета деталей из армированных пластиков*, Изд. „Зинатне”, Рига 1969.
3. J. KUJAWSKI, *Obrotowo-symetryczny stan naprężenia w grubych tarczach o ortotropii cylindrycznej*, Rozpr. Inż., 3, 23, (1975).
4. J. KUJAWSKI, *Średniej grubości tarcze wirujące*, Arch. Bud. Maszyn, 3, 24, (1971)

Резюме

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОЛСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ДИСКОВ

В работе представлен уточненный способ расчета толстых, ортотропных дисков, подвергнутых действию поверхностных сил со всеми тремя составляющими и массовых сил. Проблема решена в перемещениях, что дало возможность точно удовлетворить отношениям линейной теории упругости, за исключением уравнений равновесия, которые будут удовлетворены в интегральном смысле.

В результате получена система трёх дифференциальных уравнений совместно восьмого порядка для определения неизвестных функций перемещения. Это позволяет удовлетворить четырем граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, ограничивающей диск. В дисках средней толщины совместный порядок системы уравнений можно уменьшить до шестого порядка путем отбрасывания малых членов.

Summary

TECHNICAL THEORY OF STRETCHING THICK ORTHOTROPIC PLATES

The paper presents an improved calculation method of thick orthotropic plates subject to the action of arbitrary surface and body forces. The problem is solved in displacements what makes it possible to satisfy precisely the relations of the theory of linear elasticity for orthotropic three-dimensional body, except the equilibrium equations which are satisfied in the general sense.

The obtained system of three eighth order differential equations allows for determining the unknown of displacement functions satisfying three boundary conditions on the cylinder surface bounding the plate. In moderately thick plates the equation order may be reduced to six by disregarding the small terms of higher order.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1976 r.
